JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI
I UMJETNOSTI

VILIM NIČE

O geometrijskom mjestu četverostrukih fokusa jednog snopa ravninskih cirkularnih presjeka nekih ploha 3. i 4. reda

ZAGREB

1953

VILIM NIČE

O GEOMETRIJSKOM MJESTU ČETVOROSTRUKIH FOKUSA JEDNOG SNOPA RAVNINSKIH CIRKULARNIH PRESJEKA NEKIH PLOHA 3. I 4. REDA

Uvod. Generaliziramo li običnu inverziju na nekoj kugli ψ tako, da mjesto kugle ψ uzmemo bilo kakvu plohu 2. reda, a mjesto središta te kugle ψ odaberemo kao središte inverzije po volji neku točku P, tada smo na taj način došli do generalizirane prostorne kvadratne inverzije, kod koje će, na plohama 4. reda dobivenim takvom inverzijom iz ploha 2. reda, uz dvostruku točku P postojati još i konačne realne ili imaginarne dvostruke čunjosječnice. U mojoj radnji »Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije« izvedene su pomoću ovakve inverzije neke osobite vrste ploha 3. i 4. reda s zanimljivim singularitetima. Nekoj plohi Φ 2. reda bit će u ovakvoj posveopćenoj kvadratnoj inverziji pridružena ploha 3. ili 4. reda prema tome, je li ploha Φ prolazi ili ne prolazi središtem inverzije P. U toj točki imat će svaka takva ploha dvostruku točku, a prolazit će uvijek i presječnom krivuljom ploha ψ i Φ, jer sve točke plohe ψ 2. reda ostaju u ovakvoj kvadratnoj transformaciji invarijantne. Uzmemo li da su plohe ψ i Φ kugle, a točka P bilo gdje u prostoru, tada nastala ploha Δ_3 ili Δ_4 mora prolaziti apsolutnom kružnicom. Odatle proizlazi, da će svi ravninski presjeci takvih ploha biti cirkularni.

Sve ravnine prostora sijeku jednu ovakvu plohu u cirkularnim krivuljama, a svaka takva krivulja ima svoj četvorostruki fokus. Pridružimo li svakoj ravnini prostora ovaj četvorostruki fokus, tad smo dobili neke vrste ništični prostor. Dvostrukom točkom P prolazi ∞^2 ravnina, a svaka od tih ravnina siječe plohu u nekoj unikurzalnoj cirkularnoj krivulji 3. odnosno 4. reda, koja opet ima svoj četvorostruki fokus. Fokusi presjeka svih tih ravnina moraju biti neprekinuto povezani, dakle moraju ležati na nekoj plohi. U ovoj radnji zabavit ćemo se takvom plohom.

1. Prije nego prijeđemo na naša razmatranja, sjetit ćemo se nekih opažanja na ravninskim cirkularnim krivuljama 3. odnosno 4. reda roda nultoga, jer će nam to trebati u kasnijim prostornim razmatranjima.

Uzmemo li u nekoj ravnini uz dvije kružnice c i k po volji i neku točku P, pa za kružnicu k odredimo inverznu krivulju k_c s obzirom na kružnicu c i točku P kao centar inverzije, tad znademo, da je ta krivulja unikurzalna cirkularna krivulja 3., odnosno 4. reda. Označimo li s O_1, O_2 središta kružnica c i k, tad četvorostruki fokus O_3 nastale cirkularne krivulje k_c leži na kružnici točaka P, O_1, O_2 i čini s njima harmonijski dvoomjer $(O_1 P O_2 O_3) = -1$.[1] Ako su točke P, O_1, O_2 na jednom pravcu, t. j. obje kružnice c i k su simetrične s obzirom na taj pravac, bit će s obzirom na taj pravac simetrična i krivulja k_c. Ovaj harmonijski dvoomjer vrijedi bez obzira, da li se točka P nalazi na kružnici k ili ne, t. j. vrijedi bez obzira, je li krivulja k_c trećeg ili četvrtog reda. Ako je krivulja k simetrična, tada su točke O_1, O_2 i P na simetrali te krivulje, jer je u tu simetralu prešla kružnica točaka P, O_1, O_2, a prema tome se na njoj nalazi i četvorostruki fokus O_3. Taj je fokus i opet određen harmonijskim dvoomjerom $(O_1 P O_2 O_3) = -1$ na toj simetrali.

2. Namjesto kružnica c, k, uzmimo sada kugle ψ, Φ, a točka P neka je bilo gdje u prostoru. Svaka točka kugle Φ spojena s točkom P ima na toj zraci konjugiranu točku s obzirom na kuglu ψ, a sve te konjugirano pridružene točke točkama kugle Φ leže na nekoj plohi Δ trećeg ili četvrtog reda prema tome, da li se točka P nalazi ili ne nalazi na kugli Φ. Točka P je u svakom slučaju dvostruka točka, dok je presječna kružnica kugle Φ s polarnom ravninom pola P, s obzirom na tu kuglu, dvostruka kružnica te plohe, ako se točka P ne nalazi na kugli Φ, t. j. ako je ploha Δ 4. reda. Ove dvije činjenice proizlaze odatle, što je svim točkama presječne kružnice kugle Φ sa spomenutom polarnom ravninom pola P, s obzirom na kuglu Φ, pridružena točka P u našoj kvadratnoj transformaciji, dok su pojedine točke presječne kružnice kugle ψ s njenom polarnom ravninom s obzirom na pol P, pridružene objema probodištima kugle Φ sa spojnicama tih točaka i točke P, a to znači, da su te točke dvostruke točke dobivene plohe 4. reda. Sve ovo zapravo proizlazi direktno već iz definicije naše prostorne kvadratne transformacije, a pobliže se o tome može vidjeti u sprijeda spomenutoj radnji. Spomenuli smo već u uvodu, da sve točke kugle ψ ostaju u ovakvoj prostornoj kvadratnoj transformaciji invarijantne, dakle i svaka ploha Δ prolazi presječnom krivuljom kugala ψ i Φ. Znademo također, da odatle proizlazi, da ovako nastale plohe prolaze apsolutnom kružnicom, t. j. svi ravninski presjeci ovakvih ploha su cirkularni.

[1] Vidi rad: Konstrukcija četverostrukog fokusa cirkularnih krivulja 3. i nekih 4. reda roda nultoga. Nastav. Vjes. knj. LI.

Presječna krivulja svake ravnine prostora s ovom plohom ima svoj četvorostruki fokus, a ova pridruženost ravnine i njezina četvorostrukog fokusa određuje nam, u uvodu spomenuti, neke vrste ništični prostor.

Neki pravac neka probada neku plohu u točkama A, B. Tangente presječnih krivulja ove plohe s ravninama ovog pravca, postavljene u točkama A, B, sijeku se u presječnici tangencijalnih ravnina ove plohe u točkama A i B. Ako jedna ravnina tog pravca siječe ovu plohu u čunjosječnici, koja prolazi točkama A, B, onda spomenuta presječnica tengencijalnih ravnina plohe u točkama A, B mora prolaziti polom polare AB s obzirom na tu čunjosječnicu.

Naša ploha Δ prolazi apsolutnom kružnicom u neizmjerno dalekoj ravnini, koju svaki neizmjerno daleki pravac siječe u dvije točke. Sve ravnine takvog pravca u neizmjernosti (svezak paralelnih ravnina) sijeku plohu Δ u cirkularnim krivuljama, kojih će imaginarne tangente u njihovim zajedničkim apsolutnim točkama ležati u paru imaginarnih tangencijalnih ravnina plohe u tim apsolutnim točkama. Ove se dvije imaginarne ravnine sijeku u realnom pravcu, koji prolazi polom tog neizmjerno dalekog pravca, uzevši ga kao polaru s obzirom na apsolutnu kružnicu. Četvorostruki fokusi presječnih krivulja s takvim paralelnim ravninama nalazit će se prema tome na pravcu okomitom na te ravnine, jer samo takav prolazi polom našeg neizmjerno dalekog pravca, uzevši ga kao polaru s obzirom na apsolutnu kružnicu. Četvorostruki fokusi svih ∞^2 svezaka paralelnih ravnina nalaze se prema tome na pravcima okomitim na tim ravninama, a svi ti pravci čine neku osobitu kongruenciju u našem spomenutom ništičnom prostoru.

Svaka ravnina točke P siječe plohu Δ u cirkularnoj krivulji roda nultoga, bez obzira, je li ta ploha trećeg ili četvrtog reda. Istražujući geometrijsko mjesto četvorostrukih fokusa ovakvih cirkularnih presjeka svih ravnina točke P zapravo vidimo, da je traženo geometrijsko mjesto nožišna ploha točke P kao pola malo prije spomenute kongurencije pravaca.

Središta kugala ψ i Φ označimo s O_1, O_2. Nastala ploha Δ bit će simetrična s obzirom na ravninu točaaka P, O_1, O_2, a četvorostruki fokus R presječne krivulje plohe Δ s ravninom ovih točaka znademo naći pomoću sprijeda navedenog harmonijskog dvoomjera $(P\,O_1\,O_2\,R) = -1$, jer su točke O_1, O_2 središta presječnih kružnica kugala ψ i Φ s tom ravninom. Radi spomenute simetrije imat će sve okomite ravnine točke P na ravninu $(PO_1\,O_2)$ četvorostruke fokuse svojih presjeka također u toj ravnini, budući da su i sve presječne krivulje simetrične s obzirom na tu ravninu.

Po volji odabrana ravnina α točke P siječe kugle Φ, ψ u kružnicama k, c, kojih su središta S_2, S_1 normalne projekcije točaka O_2, O_1 na tu ravninu. Četvorostruki fokus F presječne krivulje plohe Δ s ravninom α ležat će na kružnici točaka P, S_1, S_2, a određen je harmonijskim dvoomjerom $(P\, S_1\, S_2\, F) = -1$, jer za ovu presječnu krivulju možemo uzeti, da je nastala kvadratnom inverzijom kružnice k s obzirom na kružnicu c i točku P kao centar. Točke S_1, S_2 svih ravnina α točke P nalaze se na kuglama K_1, K_2, kojima su promjeri dužine PO_1, PO_2, dakle su u prostoru sve te točke S_1, S_2 neprekinuto povezane. Kružnice točaka P, S_1, S_2 također su neprekinuto povezane, ako neprekinuto gibljemo njihovu ravninu α. Odavle izlazi, da će i četvorostruki fokusi F presjeka svih ravnina točke P biti neprekinuto povezani u prostoru na nekoj plohi Γ. Nas u prvom redu zanima, kojega je reda ta ploha? Ovdje valja spomenuti, da ima ravnina α, koje ne sijeku plohu Δ realno. To su sve one ravnine, koje sijeku Φ imaginarno. Međutim središta S_2 ovih imaginarnih presječnih kružnica uvijek su realna, isto tako kao i središta S_1 eventualnih imaginarnih presječnih kružnica kugle ψ. Prema tome vidimo, da je točka F u takvim ravninama uvijek realna, odnosno da imaginarni presjeci plohe Δ s ravninama α točke P imaju uvijek svoje realne četvorostruke fokuse F, isto kao i realni takvi presjeci.

Budući da su točke S_1, S_2 normalne projekcije točaka O_1, O_2 na ravnine točke P i posve neovisne o polumjerima kugala Φ i ψ, to su i točke F neovisne o tim polumjerima. Odavle proizlazi, da je i ploha Γ neovisna o veličini polumjera tih kugala.

Četvorostruki fokusi presjeka plohe Γ, s ravninama točke P okomitim na ravnini točaka P, O_1, O_2, ležat će na nekoj unikurzalnoj krivulji 3. reda, u ravnini $(P\, O_1\, O_2)$, kojoj je točka P dvostruka točka. Točke P, S_1, S_2, F svake ovakve ravnine leže naime zbog simetrije plohe Δ na zrakama točke P u toj ravnini, a točke S_1, S_2, osim toga i na presječnim kružnicama kugala K_1, K_2 s ravninom $(P\, O_1\, O_2)$. Za ovu unikurzalnu cirkularnu krivulju 3. reda možemo uzeti, da je nastala pomoću generalizirane kvadratne inverzije presječne kružnice kugle K_2, s obzirom na presječnu kružnicu kugle K_1 i točku P kao centar inverzije, u kojemu se obje ove kružnice sijeku. U ravnini $(P\, O_1\, O_2)$ se nalazi, kao što već znademo, i četvorostruki fokus R presječne krivulje ove ravnine s plohom Δ, a taj je normalno izvan spomenute cirkularne krivulje 3. reda, jer je određen poznatim harmonijskim dvoomjerom na kružnici točaka P, O_1, O_2. Vidimo prema tome iz dosadanjih razmatranja, da je ploha Γ višega reda od tri i da u točki P ima najmanje dvostruku točku. Tangente kugala K_1, K_2 u ravnini $(PO_1\, O_2)$ diraju u točki P plohu Γ, jer u toj točki diraju spomenutu cirkularnu krivulju 3. reda kao presječnu krivulju plohe Γ s tom ravninom.

Četvorostruki fokusi presječnih krivulja plohe Δ s tangencijalnim ravninama kugala K_1, K_2 u točki P past će u tu točku, jer se u tim ravninama točka S_1, odnosno S_2, poklapa s točkom P.

Uzmemo li točkom P po volji neki pravac, tad četvorostruki fokusi presjeka plohe Δ s ravninama ovoga pravca leže na nekoj prostornoj krivulji. Uzmimo ovakav pravac t upravo u tangencijalnoj ravnini kugle K_1 ili K_2. Vrtimo li ravninu α oko pravca t, tad četvorostruki fokus F putuje po nekoj prostornoj krivulji s. Približimo li se u neprekinutom gibanju ravnine neizmjerno blizu tangencijalnoj ravnini, tad će se i pripadni četvorostruki fokus F približiti neprekinuto neizmjerno blizu točki P. Odavle međutim, kao i iz simetrije ploha Δ i Γ s obzirom na ravninu ($PO_1\, O_2$) izlazi, da prostorna krivulja s svih takvih četvorostrukih fokusa F dira kuglu K_1, odnosno K_2, u točki P. Snop svih ∞^2 ravnina α točke P možemo razdijeliti u ∞^1 svezaka, kojih su osi tangente kugle K_1, ili K_2, u toj točki, a prema tome će i sve pripadne prostorne krivulje s četvorostrukih fokusa F, koje sačinjavaju plohu Γ, dirati kugla K_1 i K_2, u točki P. U toj točki diraju prema tome kugle K_1, K_2, odnosno njihove tangencijalne ravnine, i plohu Γ. U svakom ovakvom svesku postoji samo tangencijalna ravnina kugle K_1, odnosno K_2, u kojoj se točka P podudara s točkom S_1, odnosno S_2, dakle se samo u te dvije ravnine podudara točka P s pripadnim četvorostrukim fokusom F. Na temelju toga dobivamo, da ploha Γ ima u točki P samo dvostruku točku i to hiperbolički biplanarnu, t. j. tangencijalni se stožac 2. reda u točki P raspada u dvije realne ravnine.

Odaberimo točkom P po volji neki pravac u. Sve kružnice ravnina α ovog pravca, koje prolaze točkom P i pripadnim točkama S_1, S_2, sačinjavaju neku plohu U, na kojoj se nalazi i prostorna krivulja s četvorostrukih fokusa presjeka ovih ravnina s plohom Δ. Evidentno je, da ploha U prolazi apsolutnom kružnicom. Točke S_1, odnosno S_2, nalaze se na presječnim kružnicama r_1, r_2 kugala K_1, K_2 s ravninama točaka O_1, odnosno O_2, okomitim na pravcu u. Točku S_1, odnosno S_2, na kugli K_1, odnosno K_2, u nekoj ravnini α dobivamo tako, da dužinom PO_1, odnosno PO_2, položimo okomitu ravninu na α, i presječnom kružnicom prve takve ravnine s kuglom K_1, odnosno druge takve ravnine s kuglom K_2, siječemo presječnu kružnicu tih kugala s ravninom α. Jedna presječna točka ovih kružnica je uvijek točka P, dok je druga takva točka S_1, odnosno S_2.

Postavimo sada oko točke P kao središta po volji neku kuglu Z. Inverzijom na ovu kuglu, koju kratko nazovimo inverzija (PZ), prelaze kugle K_1, K_2 u ravnine K^{I}, K^{II}, a ploha U u neku pravčastu plohu U°, jer sve kružnice ($PS_1\, S_2$) prelaze inverzijom (PZ) u pravce. Ploha U° je zapravo samo jedan dio inverzijom dobivene plohe. Direkcioni stožac neizmjerno daleke krivulje plohe U s vrhom u P, u koji ulazi i imaginaran stožac vrha P, kojeg izvodnice prolaze apsolutnom kružnicom, također se broji kao sastavni dio čitave invertirane plohe U°, pribrojivši ovamo i neizmjerno daleku ravninu kao sliku točke P, jer se ova nalazi na plohi U. Kružnice r_1, r_2 točaka S_1, S_2 prelaze inverzijom (PZ) u kružnice r^{I}, r^{II} u ravninama K^{I}, K^{II}, a točke O_1, O_2 kugala K_1, K_2 prelaze u nožišta O^{I}, O^{II} okomica spuštenih iz točke P na ravnine K^{I}, K^{II}. Probodišta pravca u s ravninom K^{I}, odnosno K^{II}, spojena s točkom O^{I}, odnosno O^{II}, daju promjer kružnice r^{I}, odnosno r^{II}. Kružnice $(PS_1\ S_2)$ plohe U prelaze inverzijom (PZ) prema tome u pravce, koji sijeku pravac u i kružnice r^{I}, r^{II}. Svi ovakvi pravci sačinjavaju dakle pravčastu plohu U^{o}, koja je 4. reda IX. vrste,[2] i kojoj je pravac u trostruki pravac. Znademo, da je točka P na pravcu u, a prema tome je ona trostruka točka plohe U^{o}. Budući da je točka P centar inverzije (PZ), bit će neizmjerno daleka krivulja plohe U sastavljena, osim od apsolutne kružnice, i od neke krivulje 3. reda, koja može degenerirati i u pravce. Vidimo prema tome, da neizmjerno daleka ravnina siječe plohu U u krivulji 5. reda, dakle mora i ona biti 5. reda. Invertiramo li uostalom plohu U^{o} u inverziji (PZ) natrag, dobit ćemo neku plohu 8. reda, jer je inverzija (PZ) kvadratna. Ova se invertirana ploha sastoji od plohe U i trostruke neizmjerno daleke ravnine, jer je ta ravnina slika centra inverzije P, koji je trostruka točka plohe U^{o}. Odavle jasno proizlazi, da je ploha U 5. reda. Prostorna krivulja s četvorostrukih fokusa u ravninama α pravca u na plohi U prijeći će inverzijom (PZ) u neku prostornu krivulju s^{o} na plohi U^{o}. Pojedine njene točke dobit ćemo tako, da sjecišta izvodnica plohe U^{o} s ravninom K^{II} (na kružnici r^{II}) prenesemo simetrično na protivnu stranu na toj izvodnici od njezina sjecišta s ravninom K^{I} (na kružnici r^{I}). Ovo proizlazi odatle, što inverzijom (PZ) točka P, zbog harmonijskog dvoomjera $(P\ S_1\ S_2\ F) = = -1$ na kružnicama $(P\ S_1\ S_2)$, odlazi u neizmjernost na u inverziji (PZ) dobivenim pravcima kao izvodnicama plohe U^{o}.

Uzmimo na kružnici r^{II} parove točaka, koje su jednako udaljene od ravnine K^{I}. Položimo li tim točkama i pravcem u ravnine, tad sve točke u tim ravninama, koje su od ravnine K^{I} jednako udaljene na suprotnoj strani od tih točaka na kružnici r^{II}, leže na nekom konoidu 3. reda, kojemu je ravnina K^{I} direkciona ravnina, a pravac u dvostruki pravac. Ovaj je konoid 3. reda zato, što bi isto takav bio onaj, kojemu bi pravac u bio dvostruki pravac, kružnica r^{II}, ravnalica, a ravnina K^{I} direkciona ravnina. Naš spomenuti konoid 3. reda jednak je onom prvome, kojemu je ravnalica kružnica r^{II}, samo je smješten na suprotnoj strani ravnine K^{I}, i to koso simetrično u smjeru pravca u.

Prema dosad izvedenom bit će krivulja s^{o} presječna krivulja ovog konoida 3. reda i naše pravčaste plohe U^{o} 4. reda, dakle prostorna krivulja 12. reda. Budući da se dvostruki pravac konoida podudara s trostrukim pravcem plohe U^{o}, raspada se navedena krivulja 12. reda u šestorostruki pravac u i neku prostornu krivulju 6. reda. Osim pravca u imaju spomenute dvije plohe još dalja dva pravca zajednička. Sjecištima kružnice r^{II} s ravninom K^{I} pridružene su na gore spomenutom konoidu kao izvodnice spojnice tih točaka i probodišta pravca u s ravninom K^{I}, jer je udaljenost tih sjecišta od ravnine K^{I} jednaka nuli, a pridružene izvodnice nalaze se u ravninama tih sjecišta i pravca u. Ove dvije spojnice su međutim izvodnice i plohe U^{o},

[2] *Müller-Krames*, Vorlesungen über darstellende Geometrie (Leipzig-Wien 1931.), Bd. III, str. 258.

jer leže u ravnini K^{I} tako, da sijeku i kružnice k^{I}, k^{II} i pravac u. Naprijed spomenuta prostorna krivulja 12. reda raspada se dakle u šestorostruki pravac u, u dva obična pravca u ravnini K^{I} i neku prostornu krivulju 4. reda. U svakoj ravnini pravca u može se izvan tog pravca nalaziti samo jedna točka te krivulje, jer se u njoj nalazi samo jedna izvodnica spomenutog konoida 3. reda i jedna izvodnica plohe U° osim pravca u. Pravac u je prema tome trisekanta te prostorne krivulje 4. reda, t. j. ona je takva krivulja 2. vrste.

Vratimo li inverzijom (PZ) ovu prostornu krivulju 4. reda 2. vrste natrag na plohu U, tad će se ta inverzijom dobivena poznata krivulja s nalaziti na našoj plohi Γ. Pravac u sjeći će tu krivulju, a prema tome i plohu Γ, u tri točke izvan točke P. Više točaka plohe Γ, osim ove tri i točke P, ne može se nalaziti na pravcu u iz ovih razloga: Svaka točka plohe Γ četvorostruki je fokus presječne krivulje plohe Δ s jednom ravninom točke P. Pretpostavimo, da na pravcu u postoji i četvrta točka plohe Γ, osim one tri izvan točke P. Presječna ravnina plohe Δ, pridružena toj točki na naš opisani način, prolazi tom točkom i točkom P, dakle pravcem u. Mi smo međutim vidjeli, da četvorostruki fokusi presjeka plohe Δ sa svim ravninama pravca u leže na krivulji s, koja pravac u siječe samo u tri točke izvan točke P. Prema tome ne postoji četvrta ravnina pravca u, kojoj kojoj bi pridruženi četvorostruki fokus mogao ležati na pravcu u. Točka P je dvostruka točka plohe Γ, dakle ta ploha može biti samo 5. reda. Sva ova razmatranja vrijede bez obzira, da li je ploha Δ trećega ili četvrtog reda. Prostorna krivulja s svakog pravca u siječe dva puta apsolutnu kružnicu, jer se u tim točkama sijeku kružnice r_1, r_2, t. j. u tim točkama padaju točke S_1, S_2 skupa. Odavle izlazi, da ploha Γ prolazi apsolutnom kružnicom.

Odaberemo li pravac u u simetralnoj ravnini ($PO_1 O_2$), tad će i tom pravcu pridružena krivulja s biti neprekinuta krivulja 4. reda, ali će ona biti i simetrična s obzirom na tu ravninu. Iz te simetrije, iz njene neprekinutosti i iz poznate konstrukcije četvorostrukog fokusa proizlazi, da su tangente te krivulje u njenim sjecištima s ravninom ($PO_1 O_2$) okomite na toj ravnini. Jedno takvo sjecište je uvijek točka R, dok je drugo sjecište na unikursalnoj cirkularnoj krivulji 3. reda, u kojoj ta simetralna ravnina ($PO_1 O_2$) siječe plohu Γ. Ova ravnina siječe zapravo plohu Γ u nekoj cirkularnoj krivulji 5. reda, kojoj je spomenuta unikursalna cirkularna krivulja 3. reda njen realni dio. U četvorostrukom fokusu R presječne krivulje plohe Δ s tom simetralnom ravninom bit će druga realna dvostruka točka te krivulje 5. reda, na njezinu imaginarnom dijelu, o čemu ćemo govoriti još i malo kasnije.

Odaberemo li kao malo prije bilo koji pravac u točke P u ravnini ($PO_1 O_2$) i vrteći oko tog pravca jednu njegovu ravninu α ovu približavamo neizmjerno blizu ravnini ($PO_1 O_2$), približit će se neizmjerno blizu točki R i pripadni četvorostruki fokus F te ravnine.

Učinimo li to i s druge strane te ravnine, bit će ovi fokusi u parovima simetrični s obzirom na ravninu $(PO_1 O_2)$. Svi se ti fokusi nalaze međutim na pripadnoj prostornoj krivulji s, koja je neprekinuta i također simetrična s obzirom na tu ravninu. Krivulja s svakog ovakvog pravca u u ravnini $(PO_1 O_2)$ dirat će prema tome u točki R okomiti pravac na toj ravnini, a sve te krivulje neprekinuto povezane sačinjavaju našu plohu Γ. Vidimo dakle, da je i točka R dvostruka točka plohe Γ, i to eliptički biplanarna. Njen se tangencijalni stožac 2. reda raspao naime u dvije imaginarne ravnine. Svaki ovakav pravac u u ravnini $(PO_1\ O_2)$ probada plohu Γ u dvostrukoj točki P, u njegovu sjecištu s naprijed spomenutom cirkularnom krivuljom 3. reda u toj ravnini i u dva imaginarna sjecišta tog pravca s imaginarnim dijelom presječne krivulje te plohe u ravnini $(PO_1 O_2)$. Na spojnici PR padaju te imaginarne točke skupa u realnu dvostruku točku R. Sve ravnine točke R, okomite na ravnini $(PO_1 O_2)$, sjeći će prema tome plohu Γ u simetričnoj krivulji 5. reda, koja sama sebe dodiruje u točki R, jer je ova točka eliptički biplanarna točka plohe Γ. Svaki okomiti pravac na ravninu $(PO_1\ O_2)$ probada plohu Γ u pet točaka, koje su prema toj ravnini simetrično smještene. Odavle direktno proizlazi, da neizmjerno daleka točka ovih pravaca leži također na plohi Γ, a iz simetrije te plohe izlazi nadalje i to, da je ta točka infleksiona. To znači, da svaka ravnina ove neizmjerno daleke točke (okomite na ravnini $(PO_1\ O_2)$) siječe plohu Γ u simetričnoj krivulji s obzirom na presječnicu s ravninom $(PO_1\ O_2)$, t. j. parovi simetričnih točaka na toj krivulji putuju u neizmjernost na istoj strani asimptote.

Rezultate svih naših dosadanjih razmatranja izrazit ćemo sada ovim stavkom:

Odaberemo li po volji dvije kugle ψ, Φ i točku P, te pomoću generalizirane kvadratne inverzije, s obzirom na kuglu ψ i točku P kao centar, iz kugle Φ izvedemo plohu Δ, onda ova prolazi apsolutnom kružnicom. Četverostruki fokusi svih ravninskih presjeka ove plohe Δ, kroz njenu dvostruku točku P, leže na nekoj simetričnoj općoj plohi 5. reda Γ, kojoj je točka P dvostruka, i to hiperbolno biplanarna. Osim ove hiperbolno biplanarne dvostruke točke ima ova ploha u svojoj simetralnoj ravnini još jednu dvostruku točku R, koja je eliptički biplanarna. Okomito neizmjerno daleka točka, s obzirom na ravninu simetrije ove plohe, nalazi se također na toj plohi. Ova je točka infleksiona točka te plohe, t. j. svaka ravnina koja prolazi tom točkom siječe ovu plohu u krivulji, koja ima neizmjerno daleku infleksionu točku.

Budući da se svaka ravnina točke P nalazi u jednom svesku ravnina, kojemu je os jedan pravac u točke P u simetralnoj ravnini (PO_1, O_2), mogli bismo razmatranjem neprekinutog putovanja pridružene prostorne krivulje s svakom ovakvom svesku, kada os tog sveska neprekinuto putuje oko točke P, dokučiti dalje osobitosti oblika ovakvih ploha Γ. Time se mi međutim ne ćemo ovdje dalje baviti, nego ćemo se osvrnuti na jedan specijalni slučaj.

3. Neka su kugle ψ i Φ postavljene u prostoru tako, da su im središta O_1, O_2 i točka P na jednom pravcu. Nastala ploha Δ, koja opet prolazi apsolutnom kružnicom, bit će naravski i ovdje 3. ili 4. reda prema tome, da li kugla Φ prolazi ili ne prolazi točkom P, ali ovaj put bit će ona rotaciona. Ako je ta ploha 3. reda, tad će ona u neizmjernosti imati infleksioni pravac, jer je duž ovoga dira njena asimptotska ravnina, koja osim njega nema s tom plohom nikakvih drugih zajedničkih elemenata. Kugle K_1, K_2 bit će prema točki P u istom položaju kao i kugle ψ, Φ, a poznata prostorna krivulja s svakog pravca u točke P reducirat će se ovdje na jednu realnu kružnicu, koja taj pravac siječe, dok joj je ravnina na njemu okomita. Poznata ploha U ovog pravca reducira se ovdje na stožac 2. reda, jer su sve kružnice ovakve plohe u ravninama pravca u prešle u pravce, koji idu točkom P, nastaju kao proizvod projektivnih svezaka ravnina, kojima su osi pravac u i os plohe Δ. Sve ovakve kružnice s pravca u točke P sijeku os rotacione plohe Δ u istoj točki O_3 koju nam daje poznati harmonijski dvoomjer $(PO_1\ O_2\ O_3) = -1$, a koja je četvorostruki fokus svih presjeka plohe Δ s ravninama osi. Spojnica točke O_3 sa sjecištem pravca u i njegove pripadne kružnice s je promjer ove kružnice. Odatle, a i stoga, što je pravac u okomit na ravnini kružnice s, izlazi, da su sve kružnice s, odnosno da su četvorostruki fokusi svih ravninskih presjeka rotacione plohe Δ kroz točku P, na nekoj kugli Γ, kojoj se središte nalazi na osi te plohe, a koja prolazi točkom P. Iz harmonijskog dvoomjera $(P\ O_1\ O_2\ O_3) = -1$ može se lako izračunati polumjer kugle Γ, jer su dužine PO_1, PO_2 promjeri kugala K_1, K_2, a dužina PO_3 bit će promjer tražene kugle Γ. Ako polumjere kugala K_1, K_2, označimo s r_1, r_2, a polumjer kugle Γ sa r_3, tad možemo napisati za takve plohe ovaj stavak:

Ako je rotaciona ploha Δ 3. ili 4. reda nastala iz kugle Φ pomoću prostorne kvadratne inverzije s obzirom na kuglu ψ i točku P kao centar, tad će četvorostruki fokusi svih presječnih krivulja ovakve plohe Δ s ravninama točke P ležati na nekoj kugli Γ, koja prolazi točkom P, središte joj je na osi plohe Δ, a polumjer joj je $r_3 = \frac{r_1\ r_2}{r_2 - r_1}$, ako su dužine r_1, r_2 polovice udaljenosti točke P od središta O_1, O_2 kugala ψ, Φ.

4. Znamo, da svaka ravnina prostora siječe svaku našu plohu Δ u cirkularnoj krivulji, 3., odnosno 4. reda, i to roda nultoga ili prvoga. Svaka ova krivulja ima i svoj četvorostruki fokus. Uzmemo li taj fokus kao ništičnu točku ravnine ove krivulje, tad na taj način dobivamo neke vrste ništični prostor, kao što smo to spomenuli na početku ove radnje. U toč. 2. ove radnje vidjeli smo, da se četvorostruki fokusi presječnih krivulja plohe Δ svih paralelnih ravnina nalaze na jednom pravcu, koji je na tim ravninama okomit. Svih ∞^2 položaja ravnina daje ∞^2 takvih pravaca, a ovi čine neku osobitu kongruenciju, povezanu uz naš tako zvani ništični prostor. Pridružimo li pravcima ove kongruencije, konjugirano s obzirom na apsolutnu kružnicu (okomito) ravnine točke P (snop ravnina točke P), tad sjecišta konjugirano pridruženih elemenata leže na našoj plohi Γ.

Prenesemo li sve ovo na slučaj rotacionih ploha Δ, tad vidimo, da su se spomenuti ništični prostor i njegova osobita kongruencija pravaca veoma pojednostavnili. Kako se četvorostruki fokusi svih ravninskih presjeka rotacione plohe Δ 3. ili 4. reda, kroz dvostruku točku P, nalaze na nekoj kugli Γ, kojoj je središte na osi plohe Δ, a ovu siječe u točkama P i O_3, možemo ove fokuse jednostavno smatrati kao normalne projekcije točke O_3 na ravnine ovih presjeka. Rekli smo, da se četvorostruki fokusi svih presjeka plohe Δ s paralelnim ravninama nalaze na okomitom pravcu na te ravnine. U našem slučaju, kada je ploha Δ rotaciona, prolaze svi ti pravci točkom O_3, dakle se ona osobita kongruencija pravaca pretvara u snop pravaca točke O_3. Spomenutu ništičnu točku svake ravnine prostora dobit ćemo prema tome kao normalnu projekciju točke O_3 na tu ravninu. Za rotacione plohe Δ možemo prema tome napisati još i ovaj stavak:

Imamo li rotacionu plohu 3. ili 4. reda, koja prolazi apsolutnom kružnicom, a nastala je rotacijom simetralne cirkularne krivulje 3. ili 4. reda roda nultoga oko njene osi, tad su četvorostruki fokusi svih ravninskih presjeka ove plohe normalne projekcije zajedničkog četvorostrukog fokusa svih njenih presjeka kroz os, na te ravnine.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 12. VIII. 1950.

EXTRAIT DE »RAD« DE L'ACADÉMIE YOUGOSLAVE,
TOME 292, pp. 57-66

V. NIČE

LE LIEU GÉOMÉTRIQUE DES FOYERS QUADRUPLES D'UNE GERBE DE SECTIONS PLANES CIRCULAIRES DE CERTAINES SURFACES DU 3^e ET 4^e ORDRE*

Deux surfaces Φ et Ψ du 2^e ordre et un point P étant choisis, nous déterminons sur chaque droite joignant le point P et un point de la surface Φ le point conjugué par rapport à la surface Ψ. Tous ces points se trouvent sur une surface Δ du 3^e ou 4^e ordre selon que le point P se trouve sur la surface Φ ou non. Le point P sera le point double de cette surface Δ qui contient aussi la courbe d'intersection des surfaces Φ et Ψ. Si, plus spécialement, les surfaces Φ et Ψ sont des sphères, la surface Δ obtenue par cette inversion quadratique généralisée passe par la conique absolue, car toute la surface Ψ est invariante par rapport à cette inversion, donc aussi tous les éléments communs réels ou imaginaires des sphères Φ et Ψ. L'intersection de cette surface Δ et d'un plan quelconque est une courbe circulaire du 3^e ou 4^e ordre ayant un foyer quadruple. Nous nous proposons de déterminer le lieu géométrique de tels foyers quadruples appartenant à tous les plans du point double P.

Dans un travail antérieur[1] nous avons montré: Une courbe circulaire k_c du 3^e ou 4^e ordre du genre zéro étant obtenue par l'inversion quadratique généralisée d'un cercle k par rapport à un cercle c et un pôle P qui sera le point double de la courbe k_c obtenue, le foyer quadruple F de cette courbe k_c se trouve sur le cercle passant par le point P et les centres O_1 et O_2 des deux cercles c et k de sorte

* Le titre original de ce travail: *O geometrijskom mjestu četverostrukih fokusa jednog snopa ravninskih cirkularnih presjeka nekih ploha 3. i 4. reda.*

[1] Konstrukcija četverostrukog fokusa cirkularnih krivulja trećeg i nekih četvrtoga reda roda nutoga (Construction du foyer quadruple des courbes circulaires du 3^e ordre et de certaines courbes circulaires du 4^e ordre du genre zéro), Nastavni vjesnik, *LI*, p. 271—280.

qu'on ait $(PO_1, O_2F) = -1$. Au cas ou la courbe k_c est symétrique, les points O_1, O_2 et P, donc aussi le foyer quadruple F, se trouvent sur la symétrale.

Considérons maintenant une surface Δ du 3^e ou 4^e ordre obtenue des sphères Ψ et Φ par le procédé indiqué, c. à. d. qui passe par la conique absolue. Soient O_1 et O_2 les centres des sphères Ψ et Φ. A l'aide du théorème susmentionné on a montré que les foyers quadruples des sections de la surface Δ et des plans du point P forment une surface symétrique Γ du 5^e ordre. Cela découle du fait que le point P est un point double biplanaire hyperbolique de cette surface et que chaque droite de ce point coupe la surface en trois autres points. Car, c'est le nombre des points d'intersection d'une telle droite avec la courbe des foyers quadruples appartenant aux plans de la droite. Il va sans dire que la surface Γ est symétrique par rapport au plan des points P, O_1, O_2. Ce plan coupe la surface Δ en une courbe circulaire du 3^e ou 4^e ordre, dont le foyer quadruple R est aussi un point double de la surface Γ, mais un point biplanaire elliptique. Les propriétés les plus importantes de cette surface Γ peuvent être exprimées par le théorème suivant:

Étant donnée une surface Δ du 3^e ou 4^e ordre passant par la conique absolue et obtenue par une inversion quadratique généralisée d'une sphère Φ ayant le centre O_2 par rapport à une sphère Ψ au centre O_1 et un pôle P qui est un point double de la surface Δ, les foyers quadruples des sections des plans du point P et de la surface Δ se trouvent sur une surface Γ du 5^e ordre. Le point P est un point double biplanaire hyperbolique et le foyer quadruple R de la section symétrale de la surface Δ est le second point double de la surface. Ce point est biplanaire elliptique. Toutes les sections planes de la surface Γ, normales à son plan symétral, possèdent un point d'inflexion à l'infini.

Si les centres O_1 et O_2 des sphères Ψ et Φ et le point P se trouvent sur une droite, la surface Δ sera de rotation. Si elle est du 3^e ordre, elle possède une droite d'inflexion à l'infini. En considérant de telles surfaces nous avons obtenu le théorème suivant:

Étant donnée une surface de rotation Δ du 3^e ou 4^e ordre passant par la conique absolue et obtenue de la sphère Φ par l'inversion quadratique généralisée par rapport à la sphère Ψ et le point P comme pôle, les foyers quadruples de toutes les sections des plans du point P et de la surface Δ se trouvent sur une sphère Γ. Cette sphère passe par le point P, son centre est évidemment sur l'axe de la surface Δ et son rayon est $r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$, r_1 et r_2 étant les moitiés des distances du point P aux centres O_1 et O_2 des sphères Ψ et Φ.

Les foyers quadruples des section de la surface Δ et d'un faisceau de plans parallèles se trouvent sur une droite normale aux plans de ce faisceau. Les ∞^2 droites appartenant aux différents faisceaux de plans parallèles forment une certaine congruence de droites. Les surfaces Γ sont donc les surfaces pédales d'une telle congruence par rapport au point P comme pôle.

Si les surfaces Δ sont de rotation, cette congruence dégénère en une gerbe de droites. Le support de cette gerbe est le foyer quadruple commun à toutes les sections axiales de la surface Δ. Nous sommes arrivés aussi au théorème suivant:

Les foyers quadruples des sections de tous les plans et d'une surface de rotation du 3^e ou 4^e ordre passant par la conique absolue et obtenue par la rotation d'une courbe circulaire du 3^e ou 4^e ordre du genre zéro autor de son axe, sont les projections orthogonales sur ces plans du foyer quadruple commun à toutes les section axiales de cette surface.