ÜBER DIE ISOTROPEN STRAHLENPAARE 2. ART DER STRAHLENKONGRUENZEN 1. ORDNUNG 3., 2. UND 1. KLASSE

Vilko Niče, Zagreb

In meiner Abhandlung »Regelflächen mit lauter isotropen Erzeugenden in den Strahlenkongruenzen 1. Ordnung 3., 2. und 1. Klasse« habe ich in den fünf bekannten Strahlenkongruenzen 1. Ordnung isotrope Strahlenpaare untersucht, aber nur diejenigen 1. Art. In der Abhandlung war dies zwar nicht ausdrücklich betont, aber aus dem Inhalte leicht ersichtlich. Nicht achtend auf diese Tatsache wurde am Ende der Abhandlung versehentlich die Behauptung ausgesprochen, dass die elliptische lineare Strahlenkongruenz keine Regelfläche mit lauter isotropen Erzeugenden enthält. Da aber die Regelflächen isotroper Erzeugenden in den erwähnten Strahlenkongruenzen nicht nur ∞^1 isotrope Strahlenpaare 1. Art, sondern auch die ∞^2 isotrope Strahlenpaare 2. Art enthalten, stimmt offenbar die so ausgesprochene Behauptung nicht, worauf auch K. Strubecker am Ende seines Referates*) angewiesen hat. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden in einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz enthält zwar keine isotropen Strahlenpaare 1. Art, aber dafür ∞^2 isotrope Strahlenpaare 2. Art, die in der erwähnten Abhandlung nicht betrachtet wurden. Deshalb sollen nun die isotropen Strahlenpaare 2. Art in den fünf bekannten Strahlenkongruenzen 1. Ordnung kurz besprochen werden.

Bekanntlich können die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Fläche 2. Ordnung als Doppelpunkte der Involution konjugierter Pole auf dieser Geraden betrachtet werden. Sind zwei Geraden konjugiert bezüglich einer Regelfläche 2. Ordnung, bilden die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte ihrer Involutionen konjugierter Pole vier Erzeugenden dieser Regelfläche. Die Doppelpunkte dieser beiden Involutionen sind alle entweder reel, oder imaginär. Im Falle elliptischer Involution auf diesen konjugierten Geraden bilden die Verbindungsgeraden ihrer Doppelpunkte zwei Paare imaginärer Erzeugenden 2. Art dieser Regelfläche 2. Ordnung.

---

* Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, B. 43 (1952), p. 362.

Die unendlich ferne Achse des Ebenenbüschels der parallelen Ebenen der Kreisschnitte eines einschaligen Hyperboloides und die Gerade der Mittelpunkte dieser Kreisschnitte sind zwei konjugierte Geraden bezüglich des einschaligen Hyperboloides. Die Involutionen konjugierter Pole dieser Geraden sind elliptisch. Die Doppelpunkte der Involution auf der unendlich fernen Achse sind deren Schnittpunkte mit dem apsoluten Kegelschnitte. Die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte dieser Involutionen bilden also zwei Paare isotroper Erzeugenden 2. Art des einschaligen Hyperboloides. Jede der beiden Erzeugendenscharen des Hyperboloides enthält eines dieser zwei Paare. Der zweite Ebenenbüschel paralleler Kreisschnitte bildet ebenso das zweite Doppelpaar isotroper Erzeugenden 2. Art des einschaligen Hyperboloides.

Die Kongruenzen 1. Ordnung 3. und 2. Klasse enthalten je eine Erzeugendenschar der ∞^2 Regelflächen 2. Ordnung (Hyperboloide) in diesen Kongruenzen. Zwei Paare isotroper Erzeugenden 2. Art jeder dieser Schar auf jeder dieser Regelfläche 2. Ordnung sind isotrope Strahlenpaare 2. Art dieser Kongruenzen. Diese ∞^2 isotropen Strahlenpaare jeder dieser Kongruenzen sind also ein Bestandteil ihrer von lauter isotroper Erzeugenden gebildeter Regelfläche.

Die lineare Strahlenkongruenzen enthalten je eine Erzeugendenschar der ∞^3 Regelflächen 2. Ordnung in diesen Kongruenzen, von denen ihrer ∞^1 dasselbe isotrope Strahlenpaar 2. Art enthalten. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenzen enthält also ebenfals ∞^2 isotroper Strahlenpaare 2. Art. Die ∞^1 isotropen Strahlenpaare 1. Art der linearen hyperbolischen und parabolischen Strahlenkongruenzen bilden bekanntlich eine Regelfläche 4. Ordnung und VII. b. z. w. VIII. Art, die zusammen mit den ∞^2 isotropen Strahlenpaaren 2. Art die Fläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenzen bilden. Die elliptische lineare Strahlenkongruenz enthält keine isotropen Strahlenpaare 1. Art, da sie keine reelle Leitgerade besitzt in deren reellen Punkten sich ihre isotropen Strahlenpaare 1. Art schneiden könnten. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser linearen Strahlenkongruenz enthält deswegen nur die ∞^2 isotropen Strahlenpaare 2. Art.

Die Regelfläche isotroper Erzeugenden der rotatorischen linearen Strahlenkongruenzen (der elliptischen und der hyperbolischen) enthält das Paar isotroper Ebenen der Achse dieser rotatorischen Strahlenkongruenzen. Bei der hyperbolischen rotatorischen linearen Strahlenkongruenz gehören die isotropen Strahlenpaare 1. und 2. Art dieser isotroper Ebenen den Erzeugenden der Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenz an, während bei der elliptischen rotatorischen linearen Strahlenkongruenz nur die isotropen Strahlenpaare 2. Art dieser isotropen Ebenen die Erzeugenden der genannten Regelfläche bilden.

O IZOTROPNIM ZRAKAMA 2. VRSTE U KONGRUENCIJAMA 1. REDA 3., 2. I 1. RAZREDA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

U radnji »Plohe izotropnih izvodnica u kongruencijama 1. reda 3., 2. i 1. razreda« istražio sam u tim kongruencijama parove izotropnih zraka i to samo ∞^1 parova onih 1. vrste, a da to u tekstu nisam izričito istaknuo. Imajući na umu samo izotropne izvodnice 1. vrste, ustvrdio sam nepažnjom na kraju radnje, da u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji pravčasta ploha sa samim izotropnim izvodnicama. Ovo dakako ne odgovara istini, (na što je upozorio i K. Strubecker na kraju referata*) o toj radnji), ako se uzme u obzir, da na svakoj plohi izotropnih izvodnica u spomenutim kongruencijama, osim ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, postoji i ∞^2 izotropnih izvodnica 2. vrste. Na plohi izotropnih izvodnica u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji onih ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, ali dakako postoji onih ∞^2 parova izotropnih izvodnica 2. vrste. Pogledajmo sada tih ∞^2 parova izotropnih zraka 2. vrste.

Iz činjenice, da na jednoplošnom hiperboloidu postoje dva sistema usporednih kružnih presjeka proizlazi, da na svakom takvom hiperboloidu postoje 4 para izotropnih izvodnica 2. vrste, od kojih po dva para pripadaju svakom sistemu izvodnica. U kongruencijama 1. reda 3. i 2. razreda ima ∞^2 jednoplošnih hiperboloida, kojima su izvodnice jednog sistema zrake tih kongruencija. Po dva para izotropnih izvodnica 2. vrste svakog tog hiperboloida su prema tome također zrake tih kongruencija, a odavle izlazi da se i ovih ∞^2 parova izotropnih zraka 2. vrste nalaze na plohi izotropnih izvodnica tih kongruencija, osim onih poznatih ∞^1 takvih parova 1. vrste. U linearnim kongruencijama ima ∞^3 hiperboloida, ali ∞^1 od njih prolazi uvijek istim parom izotropnih izvodnica 2. vrste. Plohe izotropnih izvodnica u ovakvim kongruencijama imaju prema tome također ∞^2 izotropnih izvodnica 2. vrste. Dok ovakva ploha u hiperboličkoj i paraboličkoj linearnoj kongruenciji, koja je, kao što znamo, 4. reda, a VII. odnosno VIII. vrste, ima i ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, na takvoj plohi u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji tih ∞^1 parova takvih izvodnica 1. vrste, nego samo onih ∞^2 parova izotropnih izvodnica 2. vrste. Eliptička linearna kongruencija nema naime realnih ravnalica, u čijim realnim točkama bi se parovi takvih izotropnih zraka 1. vrste mogli sjeći.

Kod rotacionih linearnih kongruencija su sastavni dio plohe izotropnih izvodnica tih kongruencija izotropne ravnine, koje se sijeku u osi tih kongruencija. U hiperboličkoj takvoj kongruenciji su svi izotropni pravci 1. i 2. vrste u tom paru izotropnih ravnina izvodnice njene plohe izotropnih izvodnica, dok su u eliptičkoj takvoj kongruenciji samo izotropni pravci 2. vrste u tom paru izotropnih ravnina izvodnice njene plohe izotropnih izvodnica.

(Primljeno 20. VI. 1953.)