PRILOG GEOMETRIJI TETRAEDRA

Vilko Niče, Zagreb

I. *O ortocentričkom tetraedru.* Ortocentričkim tetraedrom[1]) nazivamo onaj tetraedar, kojemu su nasuprotni bridovi okomiti. Sve četiri visine ovakvog tetraedra i sve tri najkraće transverzale njegovih nasuprotnih bridova (osi), prolaze točkom, koja se zove ortocentar tog tetraedra. Produkt udaljenosti ortocentra do vrha i do nožišta svake njegove visine je konstantan (C. F. A. Jacobi), analogno kao kod svakog trokuta. Svaki ortocentrički tetraedar je autopolarni tetraedar neke kugle, kojoj je središte ortocentar, a polumjer joj je jednak drugom korjenu malo prije spomenutog konstantnog produkta udaljenosti ortocentra do vrha i do nožišta na svakoj visini (Chr. J. Neuberg). Ako je ortocentar izvan takvog tetraedra, onda su obje udaljenosti na istoj visini istog predznaka, t. j. njihov produkt je pozitivan, a drugi korjen mu je realan, dakle je i kugla s takvim polumjerom realna. Ako je ortocentar unutar takvog tetraedra, navedene su udaljenosti na svakoj visini raznih predznaka, produkt im je negativan, a njegov drugi korjen imaginaran. Kugla, za koju je ovakav tetraedar autopolaran, je prema tome imaginarna.

Nožišta visina ortocentričkog tetraedra su ortocentri (sjecišta visina) pobočnih trokuta tetraedra. Radi malo prije spomenutog produkta čine svaki vrh i nožište njegove visine, te ortocentar i neizmjerno daleka točka na toj visini, parove pridruženih točaka jedne hiperboličke involucije, kojoj su dvostruke točke probodišta produžene visine s kuglom, za koju je taj ortocentrički tetraedar autopolaran. Poznato je naime, da je produkt udaljenosti centralne točke neke involucije do točaka jednog para pridruženih točaka te involucije konstantan (konstanta involucije). Odavle izlazi, da je udaljenost centralne točke do dvostrukih točaka hiperboličke involucije jednaka drugom korjenu te konstante. Nadalje znamo, da svaki par pridruženih točaka hiperboličke involucije čini s njenim dvostrukim točkama harmonijski dvoomjer. Budući da vrh i nožište svake visine, te probodišta te produžene visine sa spomenutom kuglom čine harmonijski dvoomjer, to će kugla, postavljena ortocen-

---

[1]) Dosad poznate osebine ma kakvog tetraedra mogu se naći u: Giuseppina Biggiogero: La geometria del tetraedro, Enciclopedia delle matematiche elementari, Vol. II, Parte I. (1942), str. 219—253. i M. R. Goormachtigh: Terminologie dans la geométrie du triangle et du tétraèdre. II Tétraèdre. Mathesis, Tome LX.-1951. str. 263—274.

trima pobočaka, biti inverzna opisanoj kugli zadanom ortocentričkom tetraedru, obzirom na kuglu, za koju je zadani ortocentrički tetraedar autopolaran. Na toj kugli ortocentara pobočaka leže i težišta pobočaka zadanog tetraedra (Jacobijeva kugla dvanaest točaka ortocentričkog tetraedra), a polumjer joj je jednak trećini polumjera opisane kugle tom tetraedru.

Ortocentar O zadanog tetraedra središte je spomenute kugle, koju označimo s K. Središte opisane kugle K_1 tom tetraedru označimo s O_1, a središte inverzne kugle K_2 opisanoj kugli K_1 tetraedru, obzirom na kuglu K, označimo s O_2. Iz opisane inverzije spomenutih kugala proizlazi, da se točke O, O_1 i O_2 nalaze na jednom pravcu n, točka O_2 dijeli dužinu OO_1 u omjeru $1:2$, budući da se dužine OO_1, OO_2 međusobno odnose kao polumjeri kugala sa središtima O_1, O_2, t. j. $OO_1 : OO_2 = 3:1$.

Nožištima visina pobočnih trokuta i polovištima bridova našeg ortocentričkog tetraedra prolazi daljnja kugla K_3, kojoj je središte O_3 težište zadanog ortocentričkog tetraetra (H. Vogt). Ova kugla K_3 prolazi prema tome Feuerbachovim kružnicama pobočaka tog tetraedra. Središte O_3 ove kugle K_3 nalazi se na okomicama pobočaka, postavljenih u središtima njihovih Feuerbachovih kružnica.

Vidimo dakle, da su okomite projekcije težišta ortocentričkog tetraedra na njegove pobočke, središta Feuerbachovih kružnica tih pobočaka. Analogno okomice tih pobočaka, postavljene u središtu njihove opisane kružnice, prolaze središtem O_1 opisane kugle K_1 našem tetraedru, a okomice pobočaka tog tetraedra, postavljene u njihovim ortocentrima, prolaze njegovim ortocentrom O. Budući da je središte Feuerbachove kružnice nekog trokuta uvijek u polovištu dužine, koju omeđuje ortocentar i središte opisane kružnice tom trokutu, to se i središte O_3 mora nalaziti na spojnici OO_1 i to upravo u polovici dužine OO_1, jer takva okomica pobočke u središtu njene Feuerbachove kružnice leži u ravnini prvih dviju okomica, koje sijeku pravac n u točkama O i O_1. Budući da je $OO_2 = {}^1/_3\, OO_1$ i $OO_3 = O_3O_1$, to izlazi da je $-(O_2O_3 : O_2O) = O_1O_3 : O_1O$ ili $(O\,O_2\,O_3\,O_1) = -1$.

Poznata je činjenica, da se težište nekog tetraedra nalazi u polovištu dužine, koju omeđuje središte njemu opisane kugle i središte hiperboloida, što ga određuju okomice svih četiriju visina tog tetraedra (H. Neumann). Kod ortocentričkog tetraedra je središte tog hiperboloida ortocentar, jer on ovdje prelazi u stožac.

Kugle sa središtima O, O_1, O_2, O_3 označili smo s K, K_1, K_2 i K_3. Vidjeli smo, da su kugle K_1, K_2 inverzno pridružene obzirom na kuglu K. Prodorna kružnica ovih dvaju kugala u toj je inverziji sama sebi pridružena, dakle se nalazi i na kugli K, a prema tome te tri kugle prolaze jednom zajedničkom kružnicom. U slučajevima realne kugle K ova je kružnica uvijek realna, jer se jedan dio kugle K_1 nalazi uvijek u kugli K.

II. *Autopolarni tetraedri kugle K upisani u kuglu* K_1. Odaberimo na kugli K_1 po volji točku P_1, a njenu polarnu ravninu, obzirom na kuglu K, označimo s Π_1. Ova ravnina neka siječe kuglu K_1 u kružnici c_1, na kojoj po volji odaberimo točku P_2. Polarna ravnina Π_2 ove točke, obzirom na kuglu K, prolazi točkom P_1, siječe kuglu K_1 u kružnici c_2, a ravninu Π_1 u pravcu p, koji je konjugiran spojnici P_1P_2 obzirom na kuglu K. Znademo, da su ova dva pravca jedan na drugom okomiti. Pravac p siječe kuglu K_1 i kružnice c_1, c_2 u njihovim zajedničkim točkama P_3, P_4, jer te kružnice leže na kugli K_1. Polarna ravnina Π_3 točke P_3, obzirom na kuglu K, siječe pravac p u nekoj točki $\overline{P}_4$, koja će biti četvrti vrh autopolarnog tetraedra $P_1P_2P_3\overline{P}_4$ obzirom na kuglu K, jer se u toj točki sijeku polarne ravnine Π_1, Π_2, Π_3, a parovi točaka (P_1, P_2), (P_1, P_3) i (P_2, P_3) na spojnicama P_1P_2, P_1P_3 i P_2P_3 su konjugirani polovi kugle K. Spojnice točke O s vrhovima P_1, P_2, P_3 su okomice ravnina Π_1, Π_2, Π_3, a nožišta tih okomica u tim ravninama nalaze se na kugli K_2, jer su točke P_1, P_2, P_3 na kugli K_1. Nakon što smo točku P_1 odabrali po volji na kugli K_1, točku P_2 po volji na kružnici c_1 i točku P_3 po volji kao jednu između točaka P_3, P_4 na pravcu p, točka je $\overline{P}_4$ potpuno i jednoznačno određena. Opišemo li tetraedru $P_1P_2P_3\overline{P}_4$ kuglu $\overline{K}_1$, onda kugle K_1 i $\overline{K}_1$ imaju zajedničku kružnicu opisanu trokutu $P_1P_2P_3$, dakle im se središta $O_1, \overline{O}_1$ nalaze na okomici postavljenoj u središtu te kružnice na njenu ravninu. Nožišta svih četiriju visina tetraedra $P_1P_2P_3\overline{P}_4$ nalaze se, kao što znademo, na kugli $\overline{K}_2$, koja je inverzna kugli $\overline{K}_1$, obzirom na kuglu K. Ova su nožišta inverzne točke točkama P_1, P_2, P_3, $\overline{P}_4$, obzirom na istu kuglu, dakle su tri od tih nožišta na kugli K_2. Središta $O_2, \overline{O}_2$ kugala $K_2, \overline{K}_2$ nalaze se prema tome na okomici postavljenoj u središtu opisane kružnice nožištima visina vrhova P_1, P_2 i P_3 okomito na njenu ravninu. Znamo također, da točke O, O_1, O_2 i O, $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ moraju ležati na jednom pravcu. Budući da točkom O možemo na spomenute dvije okomice postaviti samo jednu transverzalu, izlazi, da točke $O_1, \overline{O}_1$ i $O_2, \overline{O}_2$ padaju skupa, t. j. $K_1 = \overline{K}_1$ i $K_2 = \overline{K}_2$. Odavle dalje izlazi, da je točka $\overline{P}_4$ na kugli K_1, a jer je ona međutim i na pravcu p, to je i $P_4 = \overline{P}_4$. Iz svega prema tome proizlazi, da u kuglu K_1 možemo upisati neizmjerno mnogo autopolarnih tetraedara kugle K.

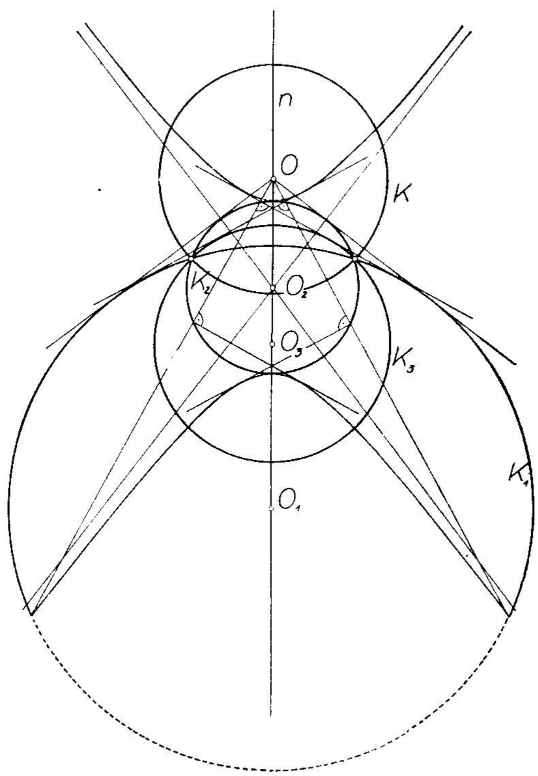
Točaka P_1 na površini kugle K_1 ima ∞^2, a svakoj toj točki pripada presječna kružnica te kugle s ravninom Π_1, na kojoj leže preostale točke tetraedra P_2, P_3, P_4. Odaberemo li na toj kružnici točku P_2 po volji, a takvih ima ∞^1, tada će točke P_3, P_4 biti time potpuno i jednoznačno određene. Odavde zaključujemo, da autopolarnih tetraedara kugle K, upisanih u kuglu K_1, ima ∞^3. Budući da svi ovakvi tetraedri imaju zajedničku opisanu kuglu K_1 sa središtem O_1 i zajednički ortocentar O i kuglu K, to im je zajednički i pravac $n=OO_1$. Svi ovi tetraedri imaju zajedničku i kuglu K_2 sa središtem O_2, a prema tome im mora biti zajednička i točka O_3, budući da su točke O, O_1, O_2 i O_3 na spojnici n raspoređene u posve određenim razmacima ($OO_2=1/3\, OO_1$, $OO_3=O_3O_1$).

Uzmemo li točku P_1 kugle K_1 na zajedničkoj kružnici kugala K, K_1, K_2, onda u tu točku pada cio autopolarni tetraedar $P_1P_2P_3P_4$, dakle i ortocentri i težišta pobočaka, kao i polovišta bridova i nožišta visina pobočaka. Odatle proizlazi, da tom kružnicom prolaze ne samo kugle K, K_1 i K_2, nego i kugla K_3. Vidimo dakle, da neizmjerno mnogo autopolarnih tetraedara kugle K, upisanih u kuglu K_1, imaju zajedničko težište, koje je središte kugle K_3, na kojoj leže Feuerbachove kružnice pobočnih trokuta svih tih tetraedara. Svi ti tetraedri imaju dakle zajedničku H. Vogtovu kuglu dvanaest točaka ortocentričkog tetraedra. Težišta i ortocentri pobočnih trokuta svih tih autopolarnih tetraedara leže na daljnjoj kugli K_2, kojoj je polumjer jednak $1/3$ polumjera kugle K_1, a središte O_2 nalazi joj se u prvoj trećini dužine OO_1 do točke O. Svi ti tetraedri imaju dakle zajedničku i Jacobijevu kuglu dvanaest točaka ortocentričkog tetraedra. Zajedničko težište O_3 svih tih tetraedara leži u polovištu dužine OO_1.

Mi smo u našim razmatranjima šutke pretpostavili, da polarna ravnina Π_1 svake točke P_1 na kugli K_1 siječe ovu kuglu. Svaka ovakva ravnina siječe u istinu ovu kuglu, ali ne i svaka realno. Na jednom dijelu površine kugle K_1 nalaze se takve točke P_1, koje ne će biti vrhovi realnih autopolarnih tetraedara kugle K_1.

III. *Kongruencija Eulerovih pravaca pobočnih trokuta autopolarnih tetraedara kugle K upisanih u kuglu* K_1. Odabravši na kugli K_1 točku P_1 po volji, određena je njome jednoznačno i ravnina Π_1 trokuta $P_2P_3P_4$. Nakon što smo u toj ravnini odabrali po volji točku P_2 na kružnici c_1, bile su time točke P_3, P_4 na toj kružnici također potpuno i jednoznačno određene. Svakoj točki P_2 na kružnici c_1 jednoznačno je prema tome pridružen par točaka P_3, P_4 tako, da je svaki tako nastali tetraedar $P_1P_2P_3P_4$ autopolaran za kuglu K. Za stalni vrh P_1 postoji dakle ∞^1 takvih autopolarnih tetraedara, kojima su nasuprotne pobočke stalnog vrha P_1 upisane kružnici c_1. Budući da svi trokuti $P_2P_3P_4$ unutar kružnice c_1 imaju zajedničku opisanu kružnicu, Feuerbachovu kružnicu i ortocentar na spojnici P_1O, to im je i Eulerov pravac zajednički. Svakoj točki P_1 na kugli K_1 pridružen je prema tome jedan ovakav zajednički Eulerov pravac nasuprotnih pobočaka ovoj točki svih autopolarnih tetraedara kugle K, upisanih u kuglu K_1, sa stalnim vrhom P_1. Svih točaka na kugli K_1 ima ∞^2, dakle isto toliko ima i spomenutih Eulerovih pravaca. Svi oni čine prema tome neku kongruenciju. Ti Eulerovi pravci sijeku pravac $n=OO_1$, budući da leže u istoj ravnini s točkama P_1, O_1, O_3, koje okomito projicirane na ravninu Π_1 daju točke na Eulerovom pravcu te ravnine.

Uzimamo li točku P_1 na onoj kružnici kugle K_1, kojoj je ravnina okomita na pravcu n, imat će pridruženi Eulerovi pravci tim točkama zajedničku točku na pravcu n i činit će rotacioni stožac 2. reda. Odaberemo li točke P_1 na kružnici kugle K_1, koje ravnina prolazi pravcem n, ležat će u toj ravnini i svi Eulerovi pravci pridruženi toj točki, a omatat će hiperbolu, kojoj je pravac n os, a točka O fokus. (Sl. 1.). Sve te Eulerove pravce u ravnini $(P_1 n)$ dobit ćemo tako, da spojnicama $P_1 O$ u toj ravnini siječemo presječnu kružnicu kugle K_2 s ravninom $(P_1 n)$ u parovima točaka, u kojima postavljamo okomice u toj ravnini na pripadnu spojnicu $P_1 O$. Ove su okomice Eulerovi pravci zato, jer leže u polarnoj ravnini Π_1 točke P_1, prolaze probodištem spojnica $P_1 O$ s tom ravninom, dakle ortocentrom svih trokuta $P_2 P_3 P_4$, i središtem kružnice c_1, koja je opisana svim trokutima $P_2 P_3 P_4$ u ravnini Π_1. Na svakoj spojnici $P_1 O$ nalaze se dvije točke kugle K_1, dakle su i dva Eulerova pravca u ravnini $(P_1 n)$ okomita na spojnicu $P_1 O$. Da je envelopa tih Eulerovih pravaca hiperbola proizlazi odatle, što je nožišna krivulja krivulje 2. reda kružnica, ako je pol u njenom fokusu. Obrnemo li postupak, pa pođemo od kružnice i pola, prirodno je, da će dobiveni pravci omatati krivulju 2. reda.



Sl. 1.

Ako je pol izvan kružnice, kao što je to u našem slučaju, onda je ta kružnica nožišna krivulja hiperbole, budući da u ravnini postoje dva smjera, s kojima usporedno možemo na traženu krivulju 2. reda povući samo jednu tangentu. Ova kružnica dira hiperbolu u njenim realnim tjemenima. Rotacijom presjeka kugle K_1 s ravninom $(P_1 n)$ oko pravca n, dobit ćemo opet tu kuglu K_1. Hiperbole u svim ravninama $(P_1 n)$ dobit ćemo na isti način rotacijom one prve oko pravca n. Sve ove hiperbole dirat će kuglu K_2 u njenim probodištima s pravcem n, a učinit će rotacioni dvoplošni hiperboloid, koji nastaje rotacijom hiperbole oko njene realne osi. Vidimo dakle, da u geometriji tetraedra postoji i ovakav stavak:

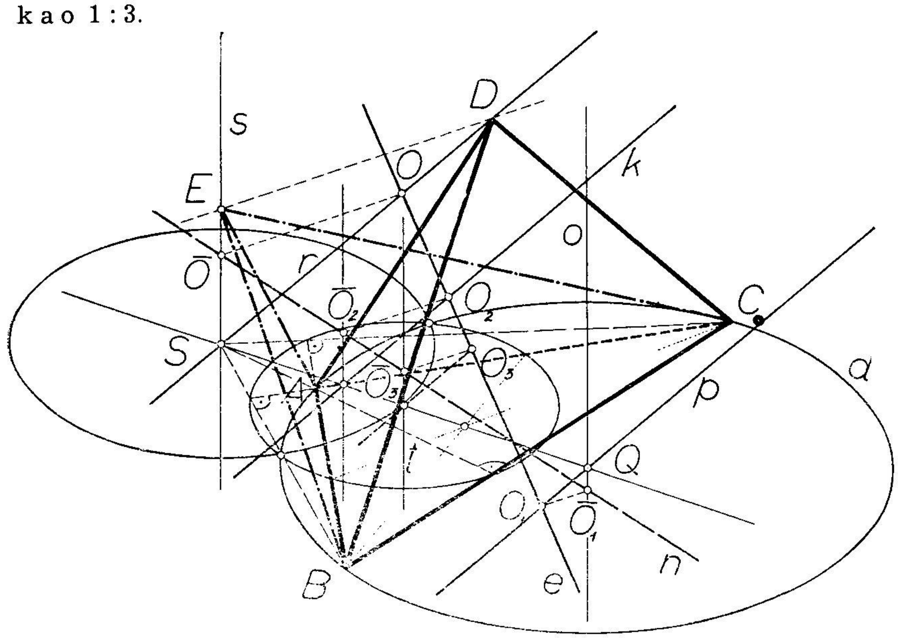
Opišemo li autopolarnom tetraedru neke kugle K kuglu K_1, onda se u kuglu K_1 može upisati ∞^3 autopolarnih tetraedara kugle K, kod kojih postoji ∞^2 takvih grupa po ∞^1 tetraedara, koji imaju jedan zajednički vrh, a sve nasuprotne pobočke tom vrhu imaju zajednički Eulerov pravac. Ovakvih ∞^2 Eulerovih pravaca pobočaka svih upisanih autopolarnih tetraedara kugle K u kugli K_1, čine kongruenciju tangenata dvoplošnog rotacionog hiperboloida, koje sijeku njegovu os. Inverzna kugla K_2 kugle K_1, obzirom na kuglu K, dira taj hiperboloid u njegovim tjemenima. Središte kugle je jedan fokus osnih presjeka tog dvoplošnog rotacionog hiperboloida. Evidentno je, da je ta kongruencija 2. reda i 2. razreda, dakle 2. stepena.

Budući da je ravnina svakog Eulerovog pravca i pravca n okomita na pridruženu ravninu Π, a u toj ravnini se nalazi i zajednički ortocentar svih pobočaka u ravnini Π, koji je i nožište vertikale spuštene na tu ravninu iz točke O, to je kugla K_2 nožišna ploha rotacionog dvoplošnog hiperboloida, koji omataju polarne ravnine točaka kugle K_1, za točku O kao pol. Ova je točka fokus osnih presjeka tog rotacionog dvoplošnog hiperboloida.

Na ovom se mjestu treba opet sjetiti onih točaka P_1 na kugli K_1, koje nisu vrhovi realnih autopolarnih tetraedara upisanih u tu kuglu. Eulerovi pravci pridruženi takvim točkama kugle K_1, su realni sastavni dio opisane kongruencije, a odijeljeni su od ostalih zraka te kongruencije zajedničkim tangencijalnim kružnim stošcem kugle K_1 i opisanog dvoplošnog rotacionog hiperboloida.

Ako su tetraedri upisani u kuglu K_1 autopolarni tetraedri neke imaginarne kugle K sa središtem u O, onda se ovo središte nalazi i unutar kugala K_1 i K_2. Odavle direktno proizlazi, da će opisanu kongruenciju Eulerovih pravaca činiti tangente rotacionog elipsoida, koje sijeku njegovu os, t. j. pravac n.

IV. *O autopolarnom tetraedru elipsoida.* Pretvorimo li afinom transformacijom sve opisane kugle u elipsoide, ostat će polovišta i težišta u toj transformaciji polovišta i težišta, a svi polarni odnosi prelaze i na nastale elipsoide. Isto se naravski događa, ako afinom transformacijom pretvaramo elipsoide u kugle. Budući da svaki elipsoid zgodnom afinom transformacijom možemo pretvoriti u kuglu, to vidimo da vrijedi ovaj stavak: Opišemo li autopolarnom tetraedru nekog elipsoida ovom elipsoidu sličan i slično položen elipsoid, tad postoji ∞^3 autopolarnih tetraedara prvog elipsoida, upisanih u onaj drugi, a svi oni imaju zajedničko težište. Ovo je težište središte novog sličnog i slično položenog elipsoida sa prva dva, koji raspolavlja bridove svih tih upisanih tetraedara, a nalazi se u sredini spojnice središta prvih dvaju elipsoida. Težišta svih pobočaka tih upisanih tetraedara nalaze se na četvrtom sličnom i slično položenom elipsoidu, kojeg se središte također nalazi na spojnici središta prvih dvaju elipsoida i to u prvoj trećini te spojnice do središta prvog elipsoida. Duljine pridruženih osi ovog i opisanog elipsoida svim tetraedrima odnose se kao 1 : 3.



Sl. 2.

U vezi s rezultatima daljnjih razmatranja o autopolarnim tetraedrima kugle, mogli bi upravo izrečeni stavak nadopuniti i ovim: Siječemo li ravninama pobočaka tih autopolarnih tetraedara prvi i drugi elipsoid, tad se u svakoj takvoj ravnini nalazi ∞^1 pobočaka od ∞^1 tih tetraedara unutar drugog elipsoida, a sve su one upisane presječnoj elipsi drugog elipsoida s tom ravninom. Budući da se u svakoj takvoj ravnini nalazi ∞^1 pobočaka, ima tih ravnina ∞^2. Svih ∞^2 spojnica središta presječnih elipsi ovakvih ravnina s prvim i drugim elipsoidom, čini kongruenciju tangenata dvoplošnog hiperboloida, koje sijeku njegov promjer na spojnici središta obaju elipsoida. Inverzan elipsoid drugom elipsoidu obzirom na prvi elipsoid, ako je središte inverzije u središtu prvog elipsoida, je gore spomenuti četvrti elipsoid, a on će dirati opisani dvoplošni hiperboloid u krajnjim točkama onog njegovog promjera, koji leži u spojnici središta prvih dvaju elipsoida.

V. *O afinoj transformaciji običnog tetraedra u ortocentrički i njenim posljedicama.* Neka je $ABCD$ neki sasma po volji sastavljeni tetraedar. Ortocentar pobočke ABC tog tetraedra označimo sa S, opisanu kružnicu trokutu ABC s d, a njeno središte sa Q. Okomicu postavljenu na ravninu tog trokuta u točki S označimo sa s, a isto takvu okomicu u točki Q označimo s o. Odaberimo sada na okomici s po volji neku točku E, koja spojena s točkama A, B, C daje novi tetraedar $ABCE$. (Sl. 2.) Poznata je činjenica: Ako je ortogonalna projekcija nekog pravca na neku ravninu okomita na neki pravac ove ravnine, onda su ta dva pravca u prostoru jedan na drugom okomiti. Projiciramo li bridove AE, BE i CE tetraedra $ABCE$ okomito (u smjeru pravca s) na ravninu pobočke ABC, podudaraju se te projekcije sa spojnicama AS, BS i CS, koje se nalaze u visinama trokuta ABC. Budući da je $AS \perp BC$, $BS \perp AC$ i $CS \perp AB$, vidimo, da su parovi nasuprotnih bridova (AE, BC), (BE, AC) i (CE, AB) tetraedra $ABCE$ međusobno okomiti, a prema tome je taj tetraedar ortocentrički.

Tetraedrima $ABCD$ i $ABCE$ određena su dva perspektivno afina prostora, u kojima ravnina trokuta ABC i sve što se u njoj nalazi ostaje pridruženo samo sebi (invarijantno). Točke E, D su afino pridruženi par točaka u tim prostorima, a spojnica ED je zraka afiniteta. Ortocentar $\overline{O}$ tetraedra $ABCE$ nalazi se na pravcu s, jer je ES jedna visina tog tetraedra, dok se središte $\overline{O}_1$ opisane kugle $\overline{K}_1$ tom tetraedru nalazi na pravcu o. Sve ovo vrijedi za svaki tetraedar $ABCE$, ako mu se vrh E nalazi na pravcu s. Budući da se težište ortocentričkog tetraedra nalazi uvijek u polovištu spojnice njegova ortocentra sa središtem njemu opisane kugle, to će se težišta svih ortocentričkih tetraedara $ABCE$, za bilo koji E na pravcu s, nalaziti na pravcu t, koji je usporedan s pravcima s, o, a prolazi središtem Feuerbachove kružnice trokuta ABC, jer se ovo nalazi u polovištu spojnice ortocentra i središta opisane kružnice tom trokutu. Opisanoj kugli $\overline{K}_1$ tetraedra $ABCE$ afino je pridružen elipsoid K_1, koji prolazi vrhom D, a ravnina trokuta ABC siječe ga u kružnici d, koja je opisana tom trokutu. Središte O_1 tog elipsoida dobit ćemo tako, da središtem $\overline{O}_1$ povučemo usporednicu sa spojnicom ED, pa na njoj odredimo točku O_1 tako, da trokuti SED i $Q\overline{O}_1O_1$ budu slični, a pridružene stranice su im usporedne. Ovo proizlazi iz perspektivno afinog odnosa dvaju prostora određenih tetraedrima $ABCD$ i $ABCE$. Budući da su stranice QO_1 i SD kod svakog para pridruženih trokuta za svaki tetraedar $ABCE$, kojemu je vrh E na pravcu s, međusobno usporedne, a spojnica SD, kao i točka Q su čvrsti, to će središte O_1 svih elipsoida K_1 ležati na pravcu p, koji prolazi središtem Q kružnice d usporedno sa spojnicom SD. Svaka točka O_1 na pravcu p određuje kao središte jedan takav elipsoid. Svi ovakvi elipsoidi čine pramen elipsoida, kojemu se temeljna krivulja 4. reda raspala u kružnicu d i kružnicu usporednu s kružnicom d, koja prolazi vrhom D, a središte joj je na pravcu p.

U vezi s našim razmatranjima o ortocentričkim tetraedrima znamo, da kugla $\overline{K}_1$ svakog ortocentričkog tetraedra $ABCE$ ima uz sebe povezane kugle $\overline{K}$, $\overline{K}_2$ i $\overline{K}_3$, koje će se pripadnom afinom transformacijom, određenom tetraedrima $ABCE$ i $ABCD$, pretvoriti u elipsoide K, K_2 i K_3, slične i slično položene s elipsoidom K_1. Zna se, naime, da dva slična i slično položena tijela perspektivno-afinom transformacijom prelaze opet u slična i slično položena, jer dva slična i slično položena tijela imaju zajedničku krivulju u neizmjerno dalekoj ravnini, koja će perspektivno-afino transformirana ostati neizmjerno daleka krivulja, a koja je u ovakvoj transformaciji nastala iz one prve neizmjerno daleke krivulje. Budući da se polarni odnosi (osim okomitosti), kao i svojstva inverzije na kugli (harmonitet), perspektivno-afinom transformacijom ne mijenjaju, a isto tako u toj transformaciji polovišta dužina, težišta trokuta i težišta tetraedara ostaju polovišta i težišta i u transformiranim takvim tvorevinama, to vidimo na temelju ranijih razmatranja, da u svaki elipsoid K_1 možemo upisati ∞^3 autopolarnih tetraedara elipsoida K, koji s tetraedrom $ABCD$ imaju zajedničko težište. Ovo je težište središte elipsoida K_3, na kojega površini leže polovišta bridova svih ∞^3 spomenutih autopolarnih tetraedara upisanih u elipsoid K_1, a težišta pobočaka svih tih tetraedara leže na elipsoidu K_2. Središta svih četiriju sličnih i slično položenih elipsoida K, K_1, K_2 i K_3 nalaze se na jednom pravcu e, koji, kao što smo vidjeli, prolazi težištem tetraedra $ABCD$. Svaka točka E na okomici s daje novi tetraedar $ABCE$, a ovaj novu kuglu $\overline{K}_1$. Ova daje novi elipsoid K_1, koji uza se povezuje nove slične i slično povezane elipsoide K, K_2 i K_3 sa središtima na novom pravcu e. Budući da svaki pravac e prolazi središtem elipsoida K_3, t. j. težištem tetraedra $ABCD$, kao i središtem elipsoida K_1, a središta svih elipsoida nalaze se na pravcu p, to svi pravci e čine pramen pravaca s vrhom u težištu zadanog tetraedra $ABCD$.

Svakom ortocentričkom tetraedru $ABCE$, odnosno svakoj točki E na pravcu s, pridružene su na opisani način po četiri kugle $\overline{K}$, $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ i $\overline{K}_3$, koje opisanom perspektivno-afinom transformacijom pridružuju tetraedru $ABCD$ na prikazani način grupu od četiri slična i slično položena elipsoida K, K_1, K_2 i K_3. Elipsoidi K_1 svih tetraedara $ABCE$ čine pramen elipsoida $K^n{}_1$, koji prolaze trokutu ABC opisanom kružnicom d, nadalje kružnicom točke D, kao što smo to već spomenuli, koja je usporedna s kružnicom d, a središte joj je na pravcu p, na kojemu su središta i svih ostalih elipsoida

K_1. Elipsoidi K_3 u toj grupi, imaju svoje središte u težištu tetraedra $ABCD$, te čine pramen koncentričnih elipsoida $K^n{}_3$, koji prolaze Feuerbachovom kružnicom trokuta ABC, te kružnicom polovišta bridova AD, BD i CD. Elipsoidi K imaju svoja središta na pravcu $r = SD \parallel p$, jer su središta kugala K na pravcu s, a sijeku ravninu trokuta ABC u zajedničkoj realnoj ili imaginarnoj kružnici k, sa središtem u točki S, obzirom na koju je trokut ABC autopolaran. Znamo naime, da je svaki trokut autopolaran za neku realnu ili imaginarnu kružnicu, sa središtem u njegovom ortocentru. Znamo nadalje, da je tetraedar $ABCD$ autopolaran obzirom na elipsoid K. Odavle međutim izlazi, da se elipsoid K i njegov tangencijalan stožac s vrhom D diraju duž kružnice k, koja ostaje invarijantna na kugli $\overline{K}$ te elipsoidu K, jer su D i ravnina (ABC) pol i polarna ravnina tog elipsoida. Budući da su kružnica k i točka D isti za svaki elipsoid K, za bilo koju točku E, to svi elipsoidi K čine pramen K^n elipsoida, koji se diraju duž kružnice k, a središta su im na pravcu $r = SD$.

Budući da je središte elipsoida K_2 na pravcu e uvijek u prvoj trećini dužine OO_1 do točke O, koju određuju središta O, O_1 elipsoida K, K_1 na tom pravcu, to će i središta tih elipsoida ležati na nekom pravcu k usporednom s pravcima r, p. Širine pruga, što ih omeđuju pravci kr i kp, odnosit će se kao $1:2$.

Svaka kugla $\overline{K}_2$ prolazi ortocentrom S, jer je on inverzno pridružen točki E u inverziji kugala $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ obzirom na kuglu $\overline{K}$. Kugla $\overline{K}_2$ prolazi i težištem trokuta ABC, a dužina omeđena tim točkama je promjer presječne kružnice k_2 kugle K_2 s ravninom tog trokuta, jer leži u zajedničkoj simetralnoj ravnini kugala $\overline{K}$, $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ i $\overline{K}_3$. Prema tome ovom kružnicom moraju prolaziti i svi elipsoidi K_2, budući da ravnina ABC i sve što se u njoj nalazi, ostaje u svim opisanim perspektivno-afinim transformacijama invarijantno. Svi elipsoidi K_2 prolaze međutim i težištima preostalih triju pobočaka, koja su u istoj visini iznad ravnine pobočke ABC. Ravnina tih težišta usporedna je dakle s ravninom ABC, a prema tome će svi ti elipsoidi K_2 prolaziti kružnicom tih triju težišta. Oni dakle čine pramen $K^n{}_2$, određen s te dvije usporedne kružnice kao temeljnom, ali degeneriranom krivuljom 4. reda.

Znamo, da je ortocentrički tetraedar autopolaran obzirom na imaginarnu kuglu onda, ako je njegov ortocentar unutar tog tetraedra. Ortocentar O tetraedra $ABCE$ bit će uvijek izvan tog tetraedra onda, kada se ortocentar S trokuta ABC nalazi izvan tog trokuta, jer je tada izvan tog tetraedra čitava spojnica ES, na kojoj taj ortocentar leži. Ako je ortocentar S unutar trokuta ABC, onda će neke kugle K biti realne, a neke imaginarne. U dva granična slučaja reduciraju se te kugle na točku, i to kada su bridovi AE, BE, CE jedan na drugom okomiti. Pridružene kugle $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ i $\overline{K}_3$ ostaju međutim uvijek realne, jer svaka od njih prolazi nekim realnim točkama na tetraedru $ABCE$. Ako su kugle $\overline{K}$ imaginarne, onda su imaginarni i elipsoidi K, a svaki od njih je sličan i slično položen s trojkom sebi pridruženih realnih elipsoida K_1, K_2, K_3, jer sva četiri zajedno prolaze istom imaginarnom neizmjerno dalekom krivuljom 2. reda.

Sva naša razmatranja na tetraedru $ABCD$, koja smo izvršili uzevši u obzir pobočku ABC i nasuprotni vrh D, mogli bi ponoviti za svaku njegovu pobočku i njoj nasuprotni vrh, pa bi došli do analognih rezultata. Za bilo kakav tetraedar možemo prema tome izreći ovakav stavak: Postavimo li Feuerbachovom kružnicom jedne pobočke nekog tetraedra jedan između ∞^1 elipsoida K_3, kojima je središte u težištu tog tetraedra, a koji u tom slučaju raspolavlja i tri brida izvan te pobočke, pa tom tetraedru opišemo sličan i slično položeni elipsoid K_1 sa središtem na pravcu, koji prolazi središtem opisane kružnice toj pobočki usporedno sa spojnicom ortocentra te pobočke i četvrtim vrhom tog tetraedra, onda se u elipsoid K_1 može upisati ∞^3 tetraedara, koji su zajedno sa zadanim tetraedrom autopolarni obzirom na isti realni ili imaginarni elipsoid K, koji je s elipsoidima K_1, K_3 sličan i slično položen. T. j., on prolazi zajedno s njima istom imaginarnom neizmjerno dalekom krivuljom 2. reda. Svi ti upisani autopolarni tetraedri imaju zajedničko težište u težištu zadanog tetraedra. Polovišta svih bridova tih ∞^3 tetraedara, upisanih elipsoidu K_1, leže na površini elipsoida K_3, a težišta njihovih pobočaka leže na novom elipsoidu K_2, koji je s elipsoidima K, K_1, K_3 također sličan i slično položen. Središta O, O_1, O_2 i O_3 elipsoida K, K_1, K_2 i K_3 leže na jednom pravcu, a raspoređena su na tom pravcu harmonijskim dvoomjerom $(O\,O_3\,O_2O_1) = -1$ tako, da je točka O_3 uvijek u polovištu dužine OO_1, a točka O_2 u prvoj trećini te dužine do točke O.

Svi elipsoidi K_3 za istu pobočku čine pramen koncentričnih elipsoida $K^n{}_3$, koji je određen Feuerbachovom kružnicom te pobočke i težištem tetraedra kao zajedničkim središtem. Svi elipsoidi K_1 čine pramen elipsoida $K^n{}_1$, sa središtima na opisanom pravcu, a koji prolaze opisanom kružnicom odabrane pobočke i četvrtim vrhom tetraedra iznad te pobočke. Svi elipsoidi K_2 čine pramen elipsoida $K^n{}_2$, koji prolaze težištima pobočaka zadanog tetraedra i kružnicom, kojoj je težište i ortocentar odabrane pobočke promjer. Središta svih tih elipsoida nalaze se na pravcu usporednom sa spojnicom ortocentra odabrane pobočke i vrha tetraedra izvan nje. Temeljna krivulja 4. reda svih triju pramenova $K^n{}_1$, $K^n{}_2$ i

K^n_3 raspada se u dvije usporedne kružnice. Elipsoidi K čine također pramen realnih ili imaginarnih elipsoida K^n, kojih se središta nalaze na spominjanoj spojnici ortocentra odabrane pobočke i četvrtog vrha, a prolaze realnom, odnosno imaginarnom kružnicom, obzirom na koju je trokut odabrane pobočke autopolaran. Središte je te kružnice, kao što je poznato, u ortocentru tog trokuta. Duž te kružnice diraju svi elipsoidi pramena K^n stožac, kojemu je vrh onaj četvrti vrh zadanog tetraedra izvan odabrane pobočke.

Što vrijedi za jednu pobočku nekog tetraedra, vrijedi i za preostale tri. Vidimo dakle, da za svaki tetraedar postoje četiri grupe sa četiri pramena malo prije opisanih elipsoida K, K_1, K_2, K_3.

(Primljeno 28. V. 1952.)

CONTRIBUTION A LA GÉOMETRIE DU TÉTRAÈDRE

Vilko Niče, Zagreb

Résumé

1. Tout tétraèdre orthocentrique est autopolaire par rapport à une sphère K dont le rayon est égal à la racine carrée du produit constant des distances de l'orthocentre à un sommet et à la face vis-à-vis du sommet (C. F. A. Jacobi, Chr. J. Neuberg), et son centre O est l'orthocentre. Si l'orthocentre se trouve en dehors du tétraèdre, la sphère est réelle, tandis qu'elle est imaginaire au cas où l'orthocentre est en dedans du tétraèdre. Comme chaque sommet de ce tétraèdre et le pied de sa hauteur abaissée à la face vis-à-vis sont des points inverses par rapport à la sphère K, la sphère K_2, déterminée par ces quatre pieds, est la sphère inverse à la sphère K_1 circonscrite au tétraèdre orthocentrique. Il s'ensuit que les centres O, O_1 et O_2 des sphères K, K_1 et K_2 se trouvent sur une droite n. La sphère K_2 passe aussi par les centres de gravité des faces du tétraèdre orthocentrique (la »sphère de 12 points« de Jacobi). Le rapport des rayons des sphères K_1, K_2 est 3 : 1 et on en déduit $OO_2 = 1/2\, O_2O_1$ pour les distances se trouvant sur la droite n.

Les pieds des hauteurs des faces et les points de bissection des arêtes du tétraèdre orthocentrique se trouvent sur une autre sphère K_3 (H. Vogt) qui passe par les cercles de Feuerbach des faces et dont le centre O_3 est le centre de gravité du tétraèdre orthocentrique. Comme les orthocentres des faces triangulaires sont les pieds des hauteurs du tétraèdre orthocentrique et les centres des cercles de Feuerbach des faces bissectent les segments entre l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit de chaque face, et ce dernier centre est la projection orthogonale du point O_1 sur le plan

de la face, le centre de gravité O_3 doit bissecter le segment OO_1 sur la droite n. L'orthocentre, le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle de Feuerbach et le centre de gravité d'une face triangulaire du tétraèdre se trouvent toujours sur la droite d'Euler de ce triangle. A l'aide du fait susmentionné que l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à une face sont les projections orthogonales des points O, O_1 sur le plan de cette face, on en déduit que les droites d'Euler des faces coupent la droite n.

2. Choisissons un point P_1 sur la sphère K_1. Le plan polaire Π_1 de ce point par rapport à la sphère K coupe la sphère K_1 en un cercle c_1. Le plan polaire Π_2 d'un point quelconque P_2 sur ce cercle passe par le point P_1 et coupe le cercle c_1 en les points P_3, P_4. Les droites de jonction P_1P_2 et P_3P_4 sont deux droites perpendiculaires l'une à l'autre et conjuguées par rapport à la sphère K. Le plan Π_4 des points P_1, P_2, P_3 est le plan polaire d'un pôle $\overline{P}_4$ qui doit se trouver sur la droite P_3P_4. Soit $\overline{K}_1$ la sphère circonscrite au tétraèdre autopolaire $(P_1P_2P_3\overline{P}_4)$ et $\overline{K}_2$ la sphère inverse par rapport à la sphère K; les centres $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ de ces sphères sont avec le centre O sur une même droite $\overline{n}$. Les points P_1, P_2, P_3 sont communs aux sphères K_1 et $\overline{K}_1$ et leurs points inverses par rapport à la sphère K sont communs aux sphères K_2 et $\overline{K}_2$. Le cercle passant par les points P_1, P_2, P_3 sera commun aux sphères K_1 et K_1, donc les centres O_1, $\overline{O}_1$ de ces sphères se trouvent sur la droite perpendiculaire au plan de ce cercle et menée par son centre. De même les centres O_2, $\overline{O}_2$ des sphères K_2, $\overline{K}_2$ se trouvent sur une perpendiculaire analogue menée par le centre du cercle commun à ces deux sphères, ce cercle passant par les points inverses des points P_1, P_2, P_3. Les droites $n=(OO_1O_2)$ et $\overline{n}=(O\overline{O}_1\overline{O}_2)$ ayant le point commun O, on conclurait qu'il fût possible mener deux transversales coupant deux droites qui ne sont pas situées dans un même plan. Mais puisque c'est impossible, il s'ensuit que les droites $\overline{n}$ et n sont identiques. Par conséquent les sphères $\overline{K}_1$ et K_1 sont identiques et aussi les sphères $\overline{K}_2$ et K_2 tandis que le point $\overline{P}_4$ coïncide avec le point P_4. Comme il y a ∞^2 points P_1 sur la sphère K_1 et ∞^1 points P_2 sur le cercle correspondant c_1, on voit qu'il existe ∞^3 tétraèdres autopolaires inscrits à la sphère K. Les points P_1, P_2 étant choisis arbitrairement, les points P_3, P_4 sont complètement déterminés. A tous ces tétraèdres sont communes non seulement les sphères K et K_1 mais aussi la sphère K_2 qui est complètement déterminée par ces dernières.

Le point P_2 était choisi arbitrairement sur le cercle c_1 ce qui suffisait pour déterminer les points P_3, P_4. On voit donc qu'on peut inscrire au cercle c_1 les faces de ∞^1 tétraèdres autopolaires de la sphère K ayant le sommet P_1 en commun. Toutes ces faces possèdent le même orthocentre et le même centre du cercle circonscrit et, par conséquent, la même droite d'Euler. Il est évident qu'elles ont aussi le même centre de gravité et le même centre du cercle de Feuerbach. Compte tenu des rapports sur la droite on en déduit que tous les tétraèdres autopolaires de la sphère K inscrits à la sphère K_1 ont le même centre de gravité O_3. Si l'on choisit le point P_1 sur le cercle d'intersection des sphères K et K_1 qui se trouve aussi sur la sphère K_2, le tétraèdre autopolaire de ce point se réduit à un point, ce qui veut dire que la sphère K_3 passe aussi par ce cercle commun aux sphères K, K_1, K_2. On voit donc que tous les ∞^3 tétraèdres autopolaires inscrits à la sphère K_1 possèdent les mêmes sphères K, K_1, K_2 et K_3.

3. Par le procédé ainsi décrit, à tout point P_1 sur la sphère K_1 correspond une droite d'Euler commune aux faces vis-à-vis du point P_1 de tous les tétraèdres autopolaires de la sphère K, circonscrits à la sphère K_1 et ayant ce point comme sommet commun. Il y a ∞^2 de poits P_1, donc il y a aussi ∞^2 de droites d'Euler qui forment une congruence. Dans un plan de la droite n les droites d'Euler envelopperont une courbe et elles correspondront aux points du cercle d'intersection de ce plan et de la sphère K_1. Ce plan coupe aussi la sphère K_2 en un cercle et les droites de jonction du point O et des points d'intersection de ce cercle et des droites d'Euler sont toujours perpendiculaires aux droites d'Euler, car ces points d'intersection sont les orthocentres des faces associés aux droites d'Euler respectives. On voit donc que la courbe pédale, par rapport au pôle O, de la courbe enveloppée par les droites d'Euler dans ce plan est le cercle d'intersection de la sphère K_2 et de ce plan. Le point O étant toujours en dehors de ce cercle, les droites d'Euler dans ce plan de la droite n enveloppent une hyperbole dont la droite n est l'axe réel et le point O est un foyer. En tournant ce plan autour de la droite n, on obtient tous les points de la sphère K_1 et toutes les droites d'Euler qui leur sont associées. Ces droites sont des tangentes à un hyperboloïde de révolution à deux nappes et coupent son axe de révolution. Les points d'intersection de la droite n et de la sphère K_2 sont les sommets de l'hyperboloïde tandis que le point O est l'un des foyers de ses sections méridiennes.

4. On sait, que le rapport de deux segments d'une même droite est invariant par rapport à des transformations affines. Les points de bissection se transforment en points de bissection, donc les centres de gravité des triangles et des tétraèdres deviennent les centres de gravités des triangles et tétraèdres transformés. Un tétraèdre autopolaire d'un ellipsoïde, soit à trois axes différents, soit de révolution, peut toujours être considéré comme obtenu d'un tétraèdre autopolaire par rapport à une sphère à moyen d'une transformation affine. Comme les transformations affines reproduisent les relations de pôle et polaire et toutes les sphères devienent des ellipsoïdes homothétiques nous pouvons généraliser les résultats obtenus comme il suit: Si l'on circonscrit à un tétraèdre autopolaire

d'un ellipsoïde K un ellipsoïde K_1 homothétique au premier, on peut inscrire à l'ellipsoïde K_1 ∞^3 tétraèdres autopolaires de l'ellipsoïde K. Tous ces tétraèdres ont un centre de gravité commun qui est le centre d'un nouvel ellipsoïde K_3, homothétique aux premiers, bissectant toutes les arêtes de ces ∞^3 tétraèdres. Les centres de gravité des faces de ces ∞^3 tétraèdres sont situés sur un autre ellipsoïde homothétique K_2 dont le centre se trouve sur une même droite avec les centres des ellipsoïdes K, K_1, K_3. Comme le rapport de volumes est aussi invariant par rapport aux transformations affines, le rapport $27:1$ des volumes des sphères K_1 et K_2 restera en vigueur pour les ellipsoïdes K_1 et K_2. Ce rapport est la conséquence du rapport $3:1$ des rayons des sphères K_1 et K_2.

5. Soit donné un tétraèdre quelconque $ABCD$. L'orthocentre de sa face ABC soit désigné par S et le centre de son cercle circonscrit d par Q. Menons par les points S et Q les droites s et o perpendiculaires au plan du triangle ABC. Un point E sur la perpendiculaire s étant choisi arbitrairement, le tétraèdre $ABCE$ sera en correspondence affine au tétraèdre $ABCD$, telle que les points E, D sont une paire associée et tous les points du plan du triangle ABC sont associés à eux mêmes (invariants). Le point S étant la projection orthogonale du sommet E sur le plan du triangle ABC et compte tenu de ce qu'on a, dans ce plan, $AS \perp BC$, $BS \perp AC$ et $CS \perp AB$, les arêtes sans sommet commun du tétraèdre $ABCE$ sont perpendiculaires entre elles, c. à. d. ce tétraèdre est orthocentrique. Le tétraèdre $ABCE$ est donc autopolaire par rapport à une sphère réelle ou imaginaire. On voit qu'on peut considérer le tétraèdre $A\,B\,C\,D$ comme obtenu du tétraèdre orthocentrique $A\,B\,C\,E$ par une transformation affine. Les sphères $\overline{K}$, $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$ associées au tétraèdre $A\,B\,C\,E$ par le procédé discuté deviennent par cette transformation des ellipsoïdes homothétiques K, K_1, K_2, K_3 associés au tétraèdre $A\,B\,C\,D$ en conservant les propriétés du tétraèdre orthocentrique qui sont invariants par rapport aux transformations affines. Tout point E de la droite s nous donne un tel tétraèdre orthocentrique $ABCE$ déterminant avec le tétraèdre $ABCD$ une nouvelle transformation affine perspective. Chacun de ces nouveaux tétraèdres possède un nouveau quadruple de sphères $\overline{K}$, $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$ et $\overline{K}_3$ et associe au tétraèdre $ABCD$ un nouveau quadruple d'ellipsoïdes homothétiques K, K_1, K_2 et K_3. On voit aisément que les centres de tous les ellipsoïdes K sont situés sur le droite $SD = r$, ceux des ellipsoïdes K_1 sur la droite $p \parallel r$ passant par le centre Q du cercle d, et ceux des ellipsoïdes K_2 sur la droite $k \parallel p \parallel r$ de sorte que les largeurs des bandes kr et rp sont en rapport $1:2$. Tous les ellipsoïdes K_3 sont concentriques et leur centre est le centre de gravité du tétraèdre $ABCD$. Il est évident que le plan ABC, ainsi que tous les plans parallèles à celui-ci, coupent tous les ellipsoïdes en cercles. Les ellipsoïdes K de tous les points E, c. à. d. de tous les quadruples forment un

faisceau d'ellipsoïdes K^n qui sont tangents entre eux le long du cercle dans le plan du triangle ABC par rapport auquel (cercle) ce triangle est autopolaire et dont le centre est l'orthocentre S du triangle. Le long de ce cercle le cône au sommet D est tangent à tous ces ellipsoïdes. Les ellipsoïdes K_1 de tous les quadruples forment un faisceau $K^n{}_1$ dont la courbe fondamentale du 4me ordre est dégénérée en le cercle d et un cercle passant par le point D et ayant son centre sur la droite p. Le plan de ce dernier cercle est parallèle au plan du cercle d. Les ellipsoïdes K_2 de tous les quadruples forment un faisceau $K^n{}_2$ dont la courbe fondamentale est dégénérée en le cercle des centres de gravités des faces ABD, BCD et ACD et un cercle dans le plan de la face ABC dont le diamètre est le segment formé par l'orthocentre et le centre de gravité de ce triangle. Les ellipsoïdes K_3 forment un faisceau $K^n{}_3$ d'ellipsoïdes concentriques passant par le cercle de Feuerbach du triangle ABC et par le cercle des points de bissection des arêtes AD, BD, CD, leur centre commun étant le centre de gravité du tétraèdre $ABCD$. Les droites des centres de tous les quadruples d'ellipsoïdes décrits forment un faisceau de droites dans le plan de la droite s et du centre de gravité du tétraèdre $ABCD$ qui est le support de ce faisceau.

Notre raisonnement ayant comme point de départ la face ABC et le sommet D du tétraèdre $ABCD$, pourrait être répété par rapport à une autre face et on peut, par conséquent, énoncer le théorème suivant: Envisageons un des ∞^1 ellipsoïdes K_3 passant par le cercle de Feuerbach d'une face d'un tétraèdre et ayant son centre au centre de gravité du tétraèdre. Cet ellipsoïde bissecte aussi les trois arêtes en dehors de cette face. Circonscrivons à ce tétraèdre un ellipsoïde homothétique K_1 dont le centre est sur la droite passant par le centre du cercle circonscrit à la face choisie, cette droite étant parallèle à la droite de jonction de l'orthocentre de cette face et du 4me sommet du tétraèdre. On peut alors inscrire à l'ellipsoïde K_1 ∞^3 tétraèdres qui sont tous, le tétraèdre donné y étant inclus, autopolaires par rapport à un ellipsoïde K réel ou imaginaire, homothétique aux ellipsoïdes K_3 et K_1. Tous ces tétraèdres autopolaires inscrits ont leur centre de gravité commun avec le centre de gravité du tétraèdre donné. Les points de bissection des arêtes de ces ∞^3 tétraèdres inscrits à l'ellipsoide K_1 se trouvent sur l'ellipsoïde K_3 et les centres de gravité de leurs faces sont situés sur un nouvel ellipsoïde K_2, homothétique aux ellipsoïdes K, K_1 et K_3. Les centres O, O_1, O_2 et O_3 des ellipsoïdes K, K_1, K_2 et K_3 se trouvent sur une droite et sont distribués de façon que leur rapport anharmonique $(OO_3O_2O_1) = -1$, et que le point O_3 se trouve toujours au milieu du segment OO_1 et le point O_2 au premier tiers de ce segment en partant du point O.

Toutes ces propriétés sont valables pour chaque ellipsoïde K_3 et on peut aussi répéter le même énoncé pour chaque face du tétraèdre $ABCD$. On voit donc que pour tout tétraèdre il y a quatre groupes à quatre faisceaux d'ellipsoïdes K, K_1, K_2, K_3.