В. НИЧЕ

СТРОФОИДАЛНЕ ПЛОХЕ ТРЕЋЕГ РЕДА

Из Зборника радова Математичког института САН
Књ. 2

БЕОГРАД
1952

СТРОФОИДАЛНЕ ПЛОХЕ ТРЕЋЕГ РЕДА

ВИЛКО НИЧЕ (Загреб)

Увод. Као што циркуларне кривуље неког реда и рода заузимљу особито мјесто међу свим кривуљама тога реда и рода, ради својих особитости по којима се разликују од оних осталих, тако се и плохе које пролазе апсолутном чуњосјечницом разликују од осталих плоха истога реда и истих сингуларитета. Код плоха 2. реда имамо куглу насупрот осталих плоха 2. реда, јер само она пролази апсолутном чуњосјечницом. Код опћих плоха 3. реда имамо неколико разних облика таквих плоха. Два од тих облика припадају у пету врсту по Schläfli-у (в. Klein F. [**2**; § 8 стр. 25—28][1]), јер имаду на себи само три реална правца. Ова два облика разликују се по томе, што су плохе једног облика једнодјелне, док су оне другог облика дводјелне. Има плоха ове врсте и таквих облика, који припадају у врсту оних с једном и двије двоструке точке. Овакве се плохе најједноставније добију као производ пројективног свеска равнина и прамена кугала[2], као и посвеопћеном квадратном инверзијом кугле на кугли, како је то учињено у радњи „Кривуље и плохе 3. и 4. реда настале помоћу квадратне инверзије". Могу се оне међутим добити и на друге начине, а један такав начин видјет ћемо и у овој радњи. Међу оваквим плохама, које пролазе апсолутном чуњосјечницом, постоји једна особита врста унутар споменутих облика, која се по својим особинама истиче између осталих, а управо том ћемо се позабавити у овој радњи. Ова особита врста има ту особину, да њене тангенцијалне равнине дуж апсолутне чуњосјечнице оматају имагинаран стожац 2. реда којег се реалан врх налази на самој површини те плохе. Разлику између ових и осталих плоха које пролазе апсолутном чуњосјечницом, могли би према томе успоредити с разликом између обичних циркуларних кривуља 3. реда

[1]) Први број у угластим заградама односи се на литературу на крају чланка.
[2]) Други Штајнеров начин извођења опћих плоха 3. реда.

рода првога и нултога, и строфоидале, односно обичне строфоиде. Видјет ћемо, да овакве плохе имају неке изразите особине кугле. Ради аналогије са строфоидалом и строфоидом у равнини, називат ћемо такве опће плохе 3. реда строфоидалним плохама.

1. Steiner [**6**], Grassmann [**5**; стр. 74], Majcen [**3**] и други показали су више разних начина, како се могу добити и истраживати опће плохе 3. реда. R. Sturm је показао, да се оне могу добити и као производ пројективно придруженог снопа зрака и свежња плоха 2. реда. За наше сврхе одабрат ћемо управо овај начин, само што нећемо свежањ плоха 2. реда задати као обично с осам асоцираних точака (в. Reye T. [**5**; стр. 48]), него с једном чуњосјечницом и двије точке. С ова три елемента задан је наиме један специјалан свежањ плоха 2. реда.

Задајмо по вољи у простору неку чуњосјечницу c и двије точке A, B. Пресијечемо ли једном равнином спојнице точака A, B чуњосјечницу c у двије точке K_1, K_2, тад је точкама A, B, K_1, K_2 у тој равнини дан прамен чуњосјечница, а свака ова чуњосјечница даје с чуњосјечницом c темељну кривуљу 4. реда (распаднуту у двије чуњосјечнице) неког прамена плоха 2. реда. Точкама A, B пролази ∞^1 равнина, а сваком точком простора пролази ∞^1 таквих плоха, дакле точкама A, B и чуњосјечницом c пролази свега ∞^2 плоха 2. реда. Поставимо ли наиме спојницом AB било коју равнину, тада је праменом чуњосјечница темељних точака. A, B, K_1, K_2 у тој равнини и чуњосјечницом c дано ∞^2 плоха 2 реда, али све те плохе сијеку сваку равнину спојнице AB у оном прамену чуњосјечница, који је одређен точкама A, B и сјецииштима K_1, K_2 те равнине с чуњосјечницом c.

Продужимо сада спојницу тачака A, B до њеног прободишта C с равнином чуњосјечнице c. Нађемо ли на овој спојници добивеном прободишту C хармонијски придружену точку C_1, тј. $(ABCC_1) = -1$, па овом точком C_1 и поларом t пола C, обзиром на чуњосјечницу c, поставимо равнину ρ, тад су ова равнина и точка C пол и поларна равнина свих ∞^2 плоха нашег свежња плоха 2. реда, а баш она ће нам згодно послужити.

Одаберимо надаље по вољи у простору неку точку S, која нека буде средиште неког снопа зрака (S). Прободиште сваке зраке овог снопа с равнином ρ нека буде пол поларне равнине чуњосјечнице c обзиром на једну плоху нашег свежња. Свакој зраци нашег снопа нека буде придружена баш оваква плоха нашег свежња плоха 2. реда. На тај смо начин те двије геометријске творевине пројективно придружили, јер ће четирима хармонијским зракама снопа (S) у некој равнини, бити придружене четири хармонијске плохе у једном прамену плоха унутар нашег свежња [**5**; стр. 48]. Четири плохе 2. реда, унутар неког прамена таквих плоха, зову се хармонијскима онда, ако њихове поларне равнине обзиром на исти пол, које увијек пролазе једним правцем, чине четири хармонијске равнине. Узмемо ли такву точку на темељној кривуљи прамена, онда четири поларне равнине прелазе у четири тангенцијалне равнине. Узмемо ли према томе точком S неку равнину и у њој четири хармонијске зраке нашег снопа, тад ће тим зракама бити придружене оне плохе нашег свежња, које ће дуж чуњосјечнице c тангирати оне стошце 2. реда, којима су врхови у прободиштима споменутих зрака с равнином ρ. Поставимо ли било којом тангентом чуњосјечнице c тангенцијалне равнине на споменуте четири плохе, односно њихове тангенцијалне стошце дуж чуњосјечнице c, онда су то сигурно четири хармонијске равнине, јер оне сијеку пресјечницу равнине ρ с равнином задатих четирију хармонијских зрака у четири хармонијске точке, будући да су ове сјецишта те пресјечнице са задане четири хармонијске зраке. Дакле, четирима хармонијским зракама точке S у истину су придружене четири хармонијске плохе нашег свежња. Да су ове четири плохе унутар једног прамена, видјет ћемо мало касније.

Производ нашег пројективно придруженог снопа (S) и свежња плоха 2. реда бит ће опћа плоха 3. реда, јер ју сваки правац простора сијече у три точке. Поставимо ли наиме таквим правцем p и точком S равнину, те њоме пресијечемо равнину ρ у правцу s, тад су точке правца s полови равнине чуњосјечнице c, обзиром на плохе једног прамена унутар нашег свежња плоха 2. реда. Доказати се то може овако: Равнина правца p и точке S сијече полару t чуњосјечнице c, обзиром на пол C, у једној точки, које ће полара на исту чуњосјечницу бити коњугирана полари t, а сјећи ће чуњосјечницу c у реалном или имагинарном пару точака D, E. Јер ова коњугирана полара полари t пролази полом C, који је на спојници AB, налазе се точке A, B, C, D и E у једној равнини. У точкама D, E имат ће плохе нашег свежња, придружене зракама точке S у равнини (pS), исте тангенцијалне равнине, које пролазе правцем s. Поставимо ли према томе точкама D, E и точкама A, B чуњосјечницу, која тангира те двије равнине (чим тангира у једној точки једну, онда у другој точки тангира и другу ову равнину), онда је ова чуњосјечница уз чуњосјечницу c саставни дио темељне кривуље прамена оних плоха 2. реда унутар нашег свежња, које су придружене зракама точке S у равнини (pS). Равнина (pS) сијече тај прамен плоха у прамену чуњосјечница, а сноп зрака (S) у прамену зрака. Ова су два прамена пројективно придружена, па им је производ кривуља 3. реда, која лежи на споменутој плохи 3. реда и сијече правац p у три точке.

Доказавши ово, доказали смо тиме и мало прије споменуту чињеницу, да четирима хармонијским зракама точке S у једној равнини, одговарају четири хармонијске плохе нашег свежња, које су у једном прамену тог свежња.

Точка S, точке A, B као и чуњосјечница c, налазе се на овако добивеној опћој плохи 3. реда, јер точком S сигурно пролази бар једна плоха нашег свежња, а зраке SA, SB пробадају себи придружене плохе нашег свежња управо у тим точкама. Спојимо ли точку S са сваком точком чуњосјечнице c, тад свака ова спојница има на чуњосјечници c по двије точке заједничке с добивеном плохом 3. реда, т. ј. она ју тангира, јер у тој точки тангира та зрака себи придружену плоху 2. реда унутар нашег свежња. Ово заправо произлази директно из дефиниције нашег свежња, јер свакој зраци точке S придружена је она плоха 2. реда, која пролази точкама A, B и чуњосјечницом c, дуж које ју дира онај стожац, којему се врх налази у прободишту те зраке с равнином ρ. Ако та зрака сијече чуњосјечницу c, онда је она одмах и изводница таквог стошца, дакле дира у том сјецишту себи придружену плоху, а према томе и насталу плоху 3. реда. Видимо дакле, да тангенцијалне равнине наше плохе 3. реда дуж чуњосјечнице c оматају стожац 2. реда, којег се врх налази у точки S на тој плохи.

Узмемо ли точке A, B као врхове стожаца, који пролазе чуњосјечницом c, тад се ти стошци сијеку у још једној чуњосјечници c_1, која лежи у равнини ρ. Ова чињеница произлази одавле: Имамо ли два стошца 2. реда, чији се продор распада у двије чуњосјечнице (оба стошца имају двије заједничке тангенцијалне равнине), па кроз оба врха поставимо било коју равнину, сјећи ће она те стошце у два пара изводница које чине један четверостран, а равнине продорних чуњосјечница у двије дијагонале тог четверострана. Трећа дијагонала тог четверострана је спојница врхова тих стожаца. Позната је чињеница, да сваку дијагоналу неког четверострана сијеку остале двије дијагонале у точкама, које с врховима тог четверострана на тој дијагонали стоје у хармонијском двоомјеру. Чуњосјечница c_1 мора према томе бити у равнини ρ, јер је она хармонијски придружена равнини чуњочјечнице c, обзиром на равнине (tA) и (tB) као темељне. Узмемо ли сада ову чуњосјечницу c_1 као базу, а точку S као врх, тад и овај стожац дира нашу плоху 3. реда дуж ове чуњосјечнице c_1, јер на свакој изводници овог стошца у точкама чуњосјечнице c_1 леже двије точке наше плохе. Ова чињеница произлази одатле, што свака точка чуњосјечнице c_1, спојена с точкама A, B, даје двије изводнице оне плохе 2. реда нашега свежња, која је придружена оној зраци точке S која пролази одабраном точком на чуњосјечници c_1. Будући да међутим прободишта M, N сваке зраке точке S с њој придруженом плохом 2. реда и њена прободишта Q, P с равнинама ρ и чуњосјечнице c чине хармонијски двоомјер $(QPMN) = -1$, морају точке M, N пасти скупа, ако једна од тих точака дође у тачку Q, као што се то десило у нашем случају. Дакле, споменуте зраке точке S и чуњосјечнице c_1 у истину дирају насталу плоху дуж те чуњосјечнице. Точке чуњосјечнице c_1 су наиме врхови свих стожаца унутар нашег специјалног свежња плоха 2. реда. Евидентно је, да се чуњосјечнице c, c_1 сијеку у двије точке правца t.

Поставимо точкама A, B и S равнину, па њоме пресијецимо чуњосјечницу c_1 у даље двије точке. С тих пет точака одређена је у тој равнини нека чуњосјечница b, а чуњосјечницама b, c, као темељном кривуљом, одређен је један прамен плоха 2. реда унутар нашег свежња. Будући да све плохе овог прамена пролазе точком S, морају се друга прободишта свих оних зрака точке S, које су на описани начин придружене плохама овог прамена, са себи придруженим плохама, налазити у оној равнини α, која пролази пресјечницом t равнине ρ и равнине β чуњосјечнице c, а која је хармонијски придружена равнини правца t и точке S (равнина γ), с обзиром на споменуте двије као темељне, т. ј. $(\rho\beta\gamma\alpha) = -1$. Будући да у сјециштима кружница b, c све плохе споменутог прамена имају сталне тангенцијалне равнине, то се врхови тангенцијалних стожаца плоха тога прамена дуж чуњосјечнице c, налазе на пресјечници n тих двију заједничких тангенцијалних равнина, која лежи као што знадемо, у равнини ρ. Све точке наше тражене плохе 3. реда, које се налазе на оним зракама точке S, које су придружене плохама 2. реда прамена темељне кривуље (bc), налазе се према томе у равнини точке S и правца n, као и у равнини α правца t, дакле на њиховој пресјечници l. Правац l налази се према томе на нашој плохи 3. реда. Евидентно је, да се на тој плохи налази и пресјечница t равнина ρ и β, јер све плохе (дегенериране) нашег свежња, које су придружене зракама точке S у равнини (tS), пролазе правцем t.

Узмимо точком S по вољи неку равнину τ. Ова равнина нека сијече равнине β и ρ рецимо у правцима p и q. У тој равнини узмимо точком S зраку k, која нека сијече правац q у точки Q. Правац q нека пробада зраци k придружену плоху у точкама M, N, а правац p у равнини β нека сијече у точки P. Спојимо ли једно probодиште K зраке k, с њој придруженом плохом, с точкама M, N, P, Q, онда те спојнице дају четири хармонијске зраке ради хармонијског двоомјера $(MNPQ) = -1$. Вртимо ли зраку k у равнини τ око точке S, остаје тај двоомјер хармонијски. Помакнемо ли зраку k тако, да она пролази сјециштем праваца p, q, т. ј. точком P, онда у ту точку прелазе точке K, Q и M или N, а спојнице KM, KN прелазе у правце p, q, док спојница KQ остаје у зраци $k = PS$. Спојница KP прелази у тангенту настале кривуље 3. реда у точки P, а ради хармонитета горњег двоомјера лежат ће увијек та тангента и у равнини α. Доказати се све ово може на овај начин: Равнина τ сијече зраци k придружену плоху 2. реда у некој кривуљи a 2. реда, којој ће тангенте у њеним сјециштима L_1, L_2 с чуњосјечницом c пролазити точком Q. Ово произлази из дефиниције нашег свежња. Узмимо надаље, да се точка M налази на луку $L_1 L_2$ те пресјечне кривуље a. Пустимо ли сада зраку k путовати према точки P, путоват ће у ту точку сигурно и точка Q. Будући да су точке M, K на луку $L_1 L_2$, дакле унутар кута $QL_1 L_2$, који постаје све мањи, то ће у ту точку отпутовати и точке K, M, када тај кут буде једнак нули. Ако тангента лука $L_1 L_2$ у точки M сијече правац p у точки A, онда знамо да вриједи $(L_1 L_2 PA) = -1$. За сваку зраку k точка A остаје константна. Означимо ли сјецište спојнице MK и правца p с B, онда полара те точке обзиром на чуњосјечницу a сијече правац p у некој точки C, за коју такођер вриједи $(L_1 L_2 BC) = -1$. Путује ли зрака k с точкама M, K према точки P, то ће према тој точки путовати и точка C на правцу p, а према томе и точка B према точки a, која је увијек константна. Видимо дакле, да спојница BMK, односно MK прелази у спојницу AP, т. ј. у правац p, када зрака k пролази точком P. Да зрака KQ прелази у спојницу PS, као и спојница KN у правац q, је евидентно. Ради сталности хармонијског двоомјера $(MNPQ) = -1$ мора спојница KP прећи у правац који лежи у равнини α ради $(\rho\beta\gamma\alpha) = -1$, будући да сви правци p леже у равнини β, сви правци q у равнини ρ, а све спојнице PS у равнини γ. Познато је, да гранични положај спојнице KP прелази у гранични положај тетиве KP пресјечне кривуље наше плохе с равнином τ, дакле у њену тангенту у точки P. Јер се ово збива у свакој равнини точке S, то одавле произлази, да равнина α праваца l, t тангира нашу плоху 3. реда дуж правца t. Видимо, дакле, да је правац t такав правац наше плохе, у који су се стегнула два њена обична правца.

У равнини правца l и точке S повуцимо оне зраке k, које сијеку чуњосјечницу c. Знадемо, да те зраке тангирају нашу плоху 3. реда у тим сјецииштима. На тој се плохи налази и точка S, као и сјецишта тих зрака с правцем l, јер је и он на тој плохи. Будући да те зраке имају с том плохом више од три точке заједничке, излази да се оне читаве налазе на тој плохи. Поставимо ли надаље такве равнине правца l и точкама A, B те њима пресијечемо чуњосјечницу c, тад свака трансверзала правца l и чуњосјечнице c, која пролази точком A или точком B, сијече, као што знадемо, и чуњосјечницу c_1 наше плохе 3. реда. И ове трансверзале имају према томе с том плохом више него три точке заједничке, дакле и оне се налазе читаве на тој плохи. Видимо према томе, да сваком од точака S, A и B пролазе по два правца наше плохе 3. реда, који сијеку чуњосјечницу c.

Показали смо, да је правац t такав правац наше плохе 3. реда, дуж којег ју тангира равнина $(tl) = \gamma$. Свака равнина тог правца сијече нашу плоху у још једној чуњосјечници. Све те чуњосјечнице (међу њима и c, c_1) морају сјећи тај правац у исте двије точке, јер само у два његова сјецишта с чуњосјечницом c (и с чуњосјечницом c_1) има та плоха тангенцијалне равнине, које се разликују од сталне такве равнине γ. Будући да на темељу изведеног сваки правац ових двају сјецишта пробада нашу плоху 3. реда још у само једној точки, то су наведена два сјецишта двоструке точке наше плохе, а правац t је њен четверозначни правац.

Позната је чињеница, да сваком двоструком точком неке опће плохе 3. реда с двије такве точке пролазе осим оног правца, који је четверозначан, још четири правца, који су двозначни. По два између њих, из сваке двоструке точке по један, се сијеку, а могу бити коњугирано комплексни прве или друге врсте. У нашем случају открит ћемо те правце на овај начин: Равнина точака S, A, B сијече нашу плоху у кривуљи 3. реда, на којој се налази и сјециште правца t с том равнином. Свака равнина правца t сијече ту кривуљу 3. реда у још даљње двије точке, којима пролази пресјечна чуњосјечница те равнине с нашом плохом. Вртимо ли ту равнину око правца t, доћи ћемо четири пута у положај, гдје ће оне двије точке на кривуљи 3. реда у равнини (SAB) пасти скупа, т. ј. у тој се равнини пресјечна чуњосјечница претвара у два реална или имагинарна правца, јер добива једну двоструку точку. То излази из чињенице, да на кривуљи 3. реда можемо из једне њене точке повући највише четири тангенте. Код наше плохе 3. реда то значи, да се у четири равнине праваца t налазе парови правца те плохе, т. ј. правцем t можемо поставити на ту плоху четири тангенцијалне равнине. Видјели смо, да се у тим тангенцијалним равнинама пресјечна чуњосјечница распада у два правца, ради настале двоструке точке. Разумије се само по себи, да овакве тангенцијалне равнине, као и двоструке точке плохе, могу бити или реалне, или имагинарне, а у том случају добивамо имагинарне правце прве, односно друге врсте.

На тај смо начин заправо открили свих 27 праваца наше опће плохе 3. реда, јер је правац t четворозначан, њега сијеку четири пара двозначних праваца, док су правац l и парови праваца који пролазе точкама S, A и B једнозначни. Дакле,

$$4+4\cdot 2\cdot 2+7=27.$$

Одабирањем разних положаја за точке S, A и B, као и положаја и облика чуњосјечнице c, која може бити и имагинарна, добили би разне варијанте опћих плоха 3. реда с двије или више двоструких точака, од којих двије могу бити реалне или имагинарне. Ове ће двоструке точке бити заправо такве, у каквима правац t сијече чуњосјечницу c.

Даље нећемо овако добивене плохе разматрати посве опћено, него ћемо се ограничити само на један њихов дио, и то онај који смо споменули у уводу.

2. Узмимо, да су точке A, B и S опет по вољи смјештене у простору, али намјесто реалне коначне чуњосјечнице c узмимо сада неизмјерно далеку апсолутну чуњосјечницу простора. Наш досадањи свежањ плоха 2. реда прешао је тиме у свежањ кугала, одређен у коначности точкама A, B. Равнина ρ бит ће симетрална равнина дужине AB, а њена сјецишта са зракама снопа точке S бит ће полови неизмјерно далеке поларне равнине обзиром на плохе 2. реда, које пролазе апсолутном чуњосјечницом. Имамо дакле кугле и њихова средишта. Видимо према томе, ако имамо свежањ кугала одређен двјема точкама A, B, па средиште сваке ове кугле спојимо с истом точком S у простору и том спојницом прободемо, ту куглу, тад сва таква прободишта чине неку опћу плоху 3. реда, која пролази апсолутном чуњосјечницом. Осим тога знадемо, на темељу разматрања у точ. **1.**, да су точке A, B и S на тој плохи, као и то, да је точка S врх тангенцијалног стошца 2. реда ове плохе дуж апсолутне чуњосјечнице на тој плохи. Ова занимива особина такве плохе каже нам другим ријечима, да ће сваки њен равнински пресјек кроз точку S бити не само циркуларан, него ће имати у тој точки и свој четвороструки фокус. У тој се наиме точки сијеку имагинарне тангенте тих пресјечних кривуља постављене у њиховим апсолутним точкама. Означимо овако добивену плоху 3. реда с **P**. Сви равнински пресјеци плохе **P** кроз точку S бити ће према томе или строфоидале, или обичне строфоиде, а с овом точком као четвероструким фокусом.

Узмимо точком S једну такву равнину и пресјецимо њом симетралну равнину ρ точака A, B у правцу s. Кугле нашег свежња, којима су средишта на правцу s, чине прамен кугала, које пролазе оном кружницом точака A, B, којој је средиште на правцу s, док јој је равнина на тај правац окомита. Равнина (Ss) сијече тај прамен кугала у прамену кружница, чија су средишта на правцу s. Зраке точке S, које пролазе овим средиштем на правцу s, сијеку придружене кружнице наведеног прамена у точкама строфоидале [**4**]. То вриједи за сваку равнину точке S, а према томе одавле излази, да се плоха **P** састоји из два дијела. Точка S налази се на овалном дијелу плохе, који је читав у коначности.

Одаберимо сада у нашем свежњу онај прамен кугала, које пролазе точкама A, B и S. Средишта тих кугала налазе се на оном правцу равнине ρ, који је окомит на равнини точака A, B, S и пролази средиштем кружнице ових точака. Равнина овог правца и точке S сијече припадни прамен кугала у прамену кружница, које пролазе точком S. Производ овог прамена кружница и придруженог прамена зрака точке S, које пролазе средиштима тих кружница, распада се овдје у правац l и точку S, односно у правац l и пар изотропних праваца, који се сијеку у точки S, као што се то може закључити на темељу наших разматрања у точ. **1**. То је наиме онај пар праваца плохе **P**, који пролазе точком S, а сијеку апсолутну чуњосјечницу. Видимо, дакле, да је точка S кружна точка наше особите плохе **P**. Правац l налази се испод равнине ρ, удаљен од ње исто толико колико и точка S изнад те равнине. Будући да су наши и сноп зрака (S) и свежањ кугала, као и њихова пројективна придруженост, симетрични обзиром на равнину точака A, B, S, то мора и наша строфоидална плоха **P** бити симетрична на ту равнину. Ова симетрална равнина (A, B, S) сијече плоху **P** у строфоидали, коју ћемо звати симетралном строфоидалом те плохе. Сјециштем L правца l с овом симетралном строфоидалом пролази асимптота a ове строфоидале [**7**; стр. 38]. Правцем l можемо према томе поставити још три тангенцијалне равнине наше строфоидалне плохе, осим оне у тачки S. Двије од тих равнина тангират ће плоху **P** у тачкама A, B, а трећа у неизмјерности.[1] Будући да су сви равнински пресјеци плохе **P** циркуларни,

[1] Јер точком L пролази асимптота симетралне строфоидале.

сијеку равнине правца l ову плоху у кружницама. У равнинама (lA) и (lB) распада се та кружница у пар изотропних праваца, који се сијеку у точкама A, B, а према томе су и те точке кружне точке наше строфоидалне плохе **P**. Видјели смо у точ. **1.**, да се пресјечне чуњосјечнице с равнинама правца l у три његове равнине, и то (lA), (lB) и (lS), распадају у два правца, док у четвртој (lt) таква два правца падају скупа у правац t. У нашем специјалном случају су до сада три споменута изотропна пара праваца она три пара, у мало прије наведене прве три равнине.

Позната је чињеница, да је код строфоидале асимптота једнако удаљена од симетрале прамена кружница из којег та кривуља настаје, као и то, да се њен четвороструки фокус налази на њој. Одавле директно излази да је равнина α правца l и асимптота a асимптотска равнина наше плохе **P**. Другим ријечима то значи, да равнина α дира дуж неизмјерно далеког правца строфоидалну плоху **P**. Неизмјерно далеки правац t плохе **P** је према томе њен четверозначан правац, а то смо већ открили за правац t у коначности на плохама у точ. **1.** Овим смо надаље открили и сва три могућа реална правца на тој плохи. Ова чињеница, да строфоидална плоха **P** има у неизмјерности четверозначан правац, дуж којег ју тангира само равнина α, казује нам надаље то, да су сви равнински пресјеци плохе **P**, који су успоредни с асимптотском равнином α, такођер кружнице. Све овакве кружнице су чуњосјечнице, које пролазе сјецииштима апсолутне чуњосјечнице и неизмјерно далеког четверозначног правца, као што смо у осталом и то већ видјели на реалним и коначним дијеловима аналогних плоха у точ. **1.** Ова су два сјецишта на апсолутној чуњосјечници, као што знадемо, имагинарне неизмјерно далеке двоструке точке наше строфоидалне плохе **P**. Будући да постоје четири тангенцијалне равнине плохе **P**, које су успоредне с асимптотском равнином α, а које ради симетрије тангирају ту плоху на симетралној строфоидали, излази, да плоха **P** има даљње четири кружне точке у својој симетралној равнини. Ова су четири пара изотропних праваца наше строфоидалне плохе њени познати двозначни правци, који пролазе њеним имагинарним двоструким точкама, на њеном неизмјерно далеком четверозначном правцу.

Све резултате наших досадашњих разматрања обухватит ћемо сада оваквим ставком:

а) *Строфоидалне плохе 3. реда, које настају као производ свежња кугала двију точака A, B и снопа зрака неке точке S, које пролазе средиштима тих кугала, симетрична је обзиром на равнину (A, B, S), има асимптотску равнину и пролази апсолутном чуњо-*

сјечницом, дуж које ју тангира стожац с врхом у точки S. У симетралној равнини има та плоха седам кружних точака, у које се убрајају и точке A, B, S.

Видјели смо сприједа, да све равнине точке S сијеку плоху **P** у строфоидалама, којима је точка S четвероструки фокус. Свака равнина точке S сијече неизмјерно далеку равнину апсолутне чуњосјечнице у једном правцу, а њу само у двије точке. Све равнине овог неизмјерно далеког правца чине у коначности свезак успоредних равнина. Пресјечне кривуље наше плохе с равнима оваквог свеска имат ће своје четвероструке фокусе на једној заједничкој окомици, јер само таква пролази полом оног неизмјерно далеког правца обзиром на апсолутну чуњосјечницу, а пресјечница је имагинарног пара тангенцијалних равнина плохе **P** у тим сјециштима на апсолутној чуњосјечници. Будући да у сваком оваквом свеску успоредних равнина једна пролази и точком S, а та точка је већ у том случају четвероструки фокус, то за нашу плоху вриједи и овај ставак:

b) *Четвероструки фокус сваког равнинског пресјека строфоидалне плохе P налази се у окомитој пројекцији точке S на ту равнину.*

Из овога ставка одмах произлазе и ови даљњи ставци:

c) *Сијечемо ли строфоидалну плоху* **P** *равнинама неког правца, тад се четвероструки фокуси ових пресјечних кривуља налазе на кружници, која пролази точком S и сијече окомито тај правац у дијаметралној точки S.*

d) *Све равнине снопа равнина неке по вољи одабране точке сијеку строфоидалну плоху* **P** *у кривуљама, којих се четвероструки фокуси налазе на кугли, која пролази врхом тог снопа и точком S тако, да су те двије точке дијаметралне на тој кугли.*

Наведени ставци изричу нам очиту аналогију строфоидалне плохе **P** с куглом. На темељу ових досадањих ставака можемо о нашим строфоидалним плохама изрећи још и ове ставке:

e) *Међу пресјечним кривуљама строфоидалне плохе* **P** *с равнинама неког свеска паралелних равнина налазе се, осим оне кроз точку S, још двије строфоидале. Међу равнима неког коначног правца налазе се строфоидале у три или једној таквој равнини, осим оне која пролази точком S.*

f) *Међу равнинама неке по вољи одабране точке налази их се* ∞^1*, које строфоидалну плоху* **P** *сијеку у строфоидалама, којих се четвероструки фокуси налазе на некој просторној циклики 4. реда на тој плохи.*

Последња два ставка произлазе директно одатле, што сваки правац точке S сијече ту плоху у још двије точке, а свака кружница, која пролази точком S, сијече ју у још даљње три точке. Надаље свака кугла продире овакву плоху 3. реда у просторној кривуљи 4. реда, јер обје већ имају заједничку апсолутну чуњосјечницу.

Чуњосјечница c_1 врхова свих стожаца унутар нашег свежња кугала је имагинарна кружница у симетралној равнини точака A, B. Будући да су пресјеци строфоидалне плохе P, с равнинама успоредним с њеном асимптотском равнином, кружнице, може се на темељу ставка b) врло лако запазити, да ће сви пресјеци равнина спојница AB бити строфоидале, којих ће се четвероструки фокуси налазити на кружници плохе P која пролази точком S, а равнина јој је окомита на тој спојници.

Свака опћа дводјелна плоха 3. реда има три реална правца а осим равнине ових трију реалних праваца има она још дванаест реалних равнина које пролазе тим правцима (сваким по четири), а које дирају ту плоху (Cremona L. [**1**; стр. 214]). Ових дванаест равнина већ је пронађено код наших строфоидалних плоха ако се узме на знање, да два реална правца у неизмјерности падају скупа, а према томе и двије тангенцијалне равнине које њима пролазе. Другим ријечима, све четири тангенцијалне равнине плохе **P**, успоредне с асимптотском равнином, су двозначне. Видимо према томе, да је наша строфоидална плоха **P** опћа плоха 3. реда V. врсте [**2**; § 2 стр. 17].

Поставимо ли неку куглу тако, да јој се средиште налази у точки S, онда та кугла дира нашу плоху **P** дуж апсолутне чуњосјечнице, јер дуж ње оба та тијела имају заједнички тангецијалан стожац. Продор ове кугле с нашом плохом састоји се дакле из двоструке апсолутне чуњосјечнице и још једне реалне или имагинарне кружнице. Свака кугла средишта S продире нашу плоху у једној кружници, које равнина сијече ту плоху у још једном правцу. Будући да у коначности има та плоха само један реалан правац, и то l, то је он ос тога прамена равнина. Видимо, дакле, да наша плоха може настати и као производ прамена равнина и прамена концентричних кугала.

Одаберемо ли врх S снопа зрака негдје на спојници точака A, B, строфоидална плоха **P** постат ће ротациона. Правац l отићи ће у овом случају такођер у неизмјерност, дакле ће плоха **P** имати неизмјерно далеки инфлексиони правац, а сви пресјеци кроз точку S бит ће усправне строфоиде.

3. Претпоставимо сада, да точке A, B падну скупа у неку точку D. Производ оваквог свежња кугала са снопом зрака неке точке S, пројективно придружени на сприједа описани начин, бит ће строфоидална плоха с двоструком точком у точки D. Равнина ρ пролази сада том точком, разумије се окомито на заједничку тангенту o свих кугала нашег свежња (o = ос свежња), а кружница c_1 овакве плохе у тој равнини распада се у пар изотропних праваца точке D.

Осим већ сприједа споменутих особина, имат ће строфоидална плоха **P** оваквог облика још и неке друге, јер равнине свеска спојнице SD, као и равнине оси o свежња кугала, сијеку ту плоху у строфоидама.

Знадемо из разматрања из точ. **2.**, да се четвероструки фокуси свих равнинских пресјека строфоидалних плоха налазе на окомитој пројекцији точке S на равнине тих пресјека. Одавле међутим излази, да ће точком S пролазити свезак равнина, које овакву плоху сијеку у строфоидама, т. ј. равнине спојнице SD, јер све равнине двоструке точке сијеку овакву строфоидалну плоху у циркуларним кривуљама рода нултога. Из сприједа изведеног излази, да ће четвероструки фокуси свих оваквих пресјека бити на некој кугли, којој је дужина SD промјер. Поставимо ли правцем l и двоструком точком D равнину, тад је та равнина окомита на спојници SD, а сијече наша плоху у правцу l и пару изотропних праваца. Наша, мало прије споменута, кугла дира ову равнину, дакле сијече плоху **P** у кривуљи која се састоји из овога пара изотропних праваца, из апсолутне чуњосјечнице и још једне кружнице. Све равнине заједничке тангенте o свих кугала нашег свежња можемо сматрати оним куглама тог свежња, које имају бесконачно дуги полумјер. Све точке плохе **P**, које су на овим „куглама“, леже на неизмјерно далеком правцу и некој кружници, која према ономе од прије пролази точком S и сијече заједничку тангенту свежња окомито у дијаметралној точки точке S. Ово у осталом вриједи за сва три облика плоха **P**. На темељу досадањих разматрања можемо особине строфоидалних плоха оваквог облика скупити у овакву ставку:

Четвероструки фокуси равнинских пресјека строфоидалне плохе 3. реда с двоструком точком, којих равнине пролазе том точком, леже на кугли, којој је промјер удаљеност двоструке точке D до врха S имагинарног тангенцијалног стошца те плохе дуж апсолутне чуњосјечнице. Унутар ових ∞^2 циркуларних кривуља 3. реда рода нултога постоји ∞^1 строфоида, које леже у равнинама спојнице SD и у равнинама оси o свежња кугала из којих та плоха настаје. Пресјеци равнинама првог свеска имају своје четвероструке фокусе у точки S, а пресјеци равнинама другога свеска имају те фокусе *на кружници која пролази точком S, а коју ос свежња кугала сијече окомито у дијаметралној точки точке S.*

Позната је чињеница, да је свака уникурзална циркуларна кривуља 3. реда ножишна кривуља параболе [**7**; стр. 25]. Строфоида је ножишна кривуља параболе, којој је фокус на спојници четвероструког фокуса и двоструке точке тако, да четвероструки фокус располавља удаљеност између фокуса те параболе и двоструке точке строфоиде. Равналица ове параболе је успоредница с асимптотом строфоиде повучена њеном двоструком точком.

Казали смо мало прије, да су пресјеци наше строфидалне плохе с равнинама оси o свежња кугала саме строфоиде, којих се четвероструки фокуси на кружници, која иде точком S и сијече ос o свежња кугала окомито у дијаметралној точки точке S. Поставимо сада точку F на спојници DS тако, да точка S располавља дужину FD. Точком F поставимо сада другу кружницу, која споменуту ос o свежња кугала сијече исто као прва кружница, која иде точком S. Свака равнина оси o сијече нашу строфоидалну плоху у строфоиди, којој је сјециште с првом описаном кружницом њен четвероструки фокус, док је сјециште с другом кружницом фокус параболе, којој је пресјечна строфоида ножишна кривуља, за двоструку точку D као пол. Равналице тих парабола налазе се у равнини ρ двоструке точке D. Замислимо сада на свакој равнини оваквог пресјека кроз ос o постављене окомите равнине, које тангирају оне параболе у тим равнинама, којих су ножишне кривуље њихови пресјеци с плохом **P**. Све равнине овако постављене тангентама такве параболе чине неки параболичан ваљак, који ће бити једнак свим осталим таквим ваљцима јер су посве једнаке параболе из којих они настају. Те су параболе једнаке зато, што им је свима фокус од равналице једнако далеко. Јер сви ови усправни ваљци тангирају дуж својих тјемених изводница исту равнину, а те тјемене изводнице пролазе једном точком окомито испод точке F (окомито обзиром на равнину ρ), то сви ови параболични ваљци оматају ротациони параболоид. Ос тога параболоида пролази точком F окомито на равнину ρ. У равнини ρ налазе се све равналице, а у точки F фокуси свих осних пресјека овог параболоида. На темељу ових разматрања можемо овакву строфоидалну плоху 3. реда дефинирати и на овај начин:

Строфоидална плоха 3. реда с двоструком точком је ножишна плоха ротационог параболоида, ако пол лежи у равнини равналица осних пресјека тога параболоида.

На оваквој строфоидалној плохи 3. реда с двоструком точком постоје само три кружне точке, опет у њеној симетралној равнини.

4. Узмимо сада, да су точке A, B на оси o нашег свежња кугала имагинарне. Производ овог свежња кугала и снопа зрака точке S, пројективно придружених на сприједа описани начин, бит ће у овоме случају једнодјелна опћа плоха 3. реда. Ову плоху можемо замислити да је настала раздвајањем оне с двоструком точком, ако се она раскинула у двострукој точки у смислу једноплошног хиперболоида [**2**; § 2]. Будући да из точке L, и неизмјерно далеке точке, можемо на симетралну кривуљу ове плохе поставити четири реалне тангенте, међу којима се налази и асимптота те кривуље, видимо да ће оваква строфоидална плоха 3. реда имати само три кружне точке, у које се убраја и точка S. Тангенцијалне равнине ове плохе, које пролазе точком S, оматају познати имагинаран тангенцијални стожац дуж апсолутне чуњосјечнице и реалан тангенцијални стожац дуж кружнице c_1 ове плохе у равнини ρ.

Знадемо, да све равнине точке S сијеку ову плоху у строфоидалама, односно строфоидама. Поставимо ли точком S равнине, које тангирају кружницу c_1 у равнини ρ, тад ове равнине не само тангирају ову плоху, него је и сијеку у строфоидама, јер ти пресјеци имају двоструку точку. Одавле излази ставак:

Точком S једнодјелне строфоидалне плохе 3. реда пролази ∞^1 равнина, које оматају стожац 2. реда, а сијеку ову плоху у строфоидама с четвероструким фокусом у тој точки, док су им двоструке точке на једној кружници.

Повучемо ли код ове плохе аналогију с нашим разматрањима у точ. **1.**, видимо одмах, да њене двије тангенцијалне равнине правца l постају имагинарне, ради имагинарности точака A, B. Правци плохе у тим равнинама су према томе имагинарни правци друге врсте. Исто су тако имагинарне и двије тангенцијалне двозначне равнине неизмјерно далеког четверозначног правца, у којима се налазе даљњи имагинарни правци друге врсте на нашој плохи, и то двозначни. Видимо, дакле, да је ова плоха у истини опћа плоха 3. реда с три реална правца, и то IV. врсте, т. ј. једнодјелна.

Строфоидална плоха овог облика, као и оне до сада споменуте, бит ће ротациона, ако точку S одаберемо на реалној спојници имагинарних точака A, B.

5. На крају ћемо обновити још једну чињеницу, изведену у овој радњи, која је у вези с разноликошћу облика опћих плоха 3. реда. Код извођења свих облика таквих плоха полази F. Klein од познате опће плохе 3. реда с четири двоструке точке. Раздвајањем тих плоха у двостуким точкама у смислу једноплошног и двоплошног хиперболоида, добива он свих пет врста опћих плоха 3. реда без сингуларитета, које се у главном разликују у броју и врсти њихових имагинарних праваца. Четврта и пета врста тих плоха има само три реална правца, док су остали имагинарни прве или друге врсте. Плохе четврте врсте су једнодјелне, а оне пете врсте су дводјелне. Видјели смо, да унутар ових двију врста има наших строфоидалних плоха. Ове наше плохе имају међутим двије имагинарне двоструке точке у неизмјерности, гдје им се налазе или два, или сва три реална правца, који су стегнути у један. Чињеница, коју смо овдје жељели истаћи је та, да међу опћим плохама 3. реда IV. и V. врсте има таквих, које имају пар имагинарних двоструких точака, јер се то на темељу Klein-ових, а и осталих разматрања о опћим плохама 3. реда, не може директно закључити.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Cremona L. — Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung, Berlin 1870.

[2] Klein F. — Über Flächen dritter Ordnung, *Gesamm. math. Abhandlungen*, Bd. II, S. 11—44, Berlin 1922.

[3] Majcen J. — Eine neue Erzeugungsart für verschiedene typische Formen der Flächen 3. Ordnung. *Jahresb. d. deutsch. math. Verein.* **14**, 1905.

[4] Niče V. — О строфоидали и просторној кривуљи 4. реда на кугли. *Рад Југословенске академије* **276**, стр. 109—116, 1949.

[5] Reye T. — Die Geometrie der Lage, Leipzig 1910.

[6] Steiner J. — *Gesamm. Werke*, Bd. II, S. 651—659, Berlin 1882.

[7] Wieleitner H. — Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908.

LES SURFACES STROPHOÏDALES DU 3e ORDRE

Par Vilko Niče

L'auteur a étudié et trouvé un certain nombre de propriétées d'une espèce de surfaces du 3e ordre, qu'il appelle, à cause d'une certaine analogie avec la strophoïde, surfaces strophoïdales du 3e ordre. Les surfaces strophoïdales du 2e ordre seraient des sphères. Les surfaces strophoïdales du troisième ordre sont de surfaces du troisième ordre, passant par la section conique absolue, telles que leurs plans tangents le long de la section conique absolue enveloppent un cône imaginaire du second ordre.

V. NIČE

LES SURFACES STROPHOÏDALES DU 3e ORDRE

EXTRAIT
DES
PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
DE L'ACADÉMIE SERBE DES SCIENCES

TOME IV

BELGRADE
1952

LES SURFACES STROPHOÏDALES DU 3^e ORDRE

par

V. NIČE

Tout comme les courbes circulaires d'un certain ordre et genre se distinguent entre les autres courbes de cet ordre et genre, de même les surfaces contenant la conique absolue sont distinguées entre les autres surfaces du même ordre et ayant les mêmes singularités. Entre les quadriques il n'y a que la sphère qui passe par la conique absolue. Les surfaces générales du 3^e ordre embrassent plusieurs différentes formes de surfaces passant par la conique absolue. Entre elles il y a une espèce particulière de telles surfaces qui se distinguent par leurs propriétés spéciales. C'est précisément cette espèce qui fait l'objet de ce travail.

Les plans tangents des surfaces de cette espèce le long de la conique absolue enveloppent un cône imaginaire du 2^e ordre dont le sommet réel se trouve sur la surface même. Nous allons voir que ces surfaces possèdent quelques propriétés caractéristiques de la sphère. La différence entre ces surfaces et les autres qui passent par la conique absolue pourrait donc être comparée avec la différence entre les courbes circulaires ordinaires du 3^e ordre et la strophoïdale respectivement la strophoïde ordinaire. A cause de cette analogie avec la strophoïde et la strophoïdale plane ces surfaces serront appelées surfaces strophoïdales du 3^e ordre.

I. Steiner, Grassmann, Majcen et d'autres géomètres ont donné plusieurs procédés pour obtenir les surfaces générales du 3^e ordre. R. Sturm a montré qu'elles peuvent être obtenues comme produit d'une gerbe de rayons et d'une gerbe de surfaces du 2^e ordre en correspondence homographique. Nous choisissons ce même procédé en définissant la gerbe de quadriques à l'aide d'une conique et de deux points au lieu de 8 points associés. Ces trois éléments définissent une gerbe spéciale de quadriques.

Soit donnés dans l'espace une conique c et deux points A, B. Coupons cette conique par un plan passant par les points A, B. Les points d'intersection K_1, K_2 et les points A, B définissent dans ce plan un faisceau de coniques dont chacune forme avec la conique c la courbe fondamentale du 4^e ordre (dégénérée en deux coniques) d'un faisceau de surfaces du 2^e ordre. Donc il y a ∞^2 de quadriques passant par les points A, B, K_1, K_2 et la conique c. Il est évident que chaque plan passant par les points A, B donnera de cette manière les mêmes ∞^2 quadriques. Cela veut dire que la conique c et les points A, B définissent une gerbe de surfaces du 2^e ordre.

Prolongeons la droite AB jusqu'au point d'intersection C avec le plan de la conique c. Déterminons sur la droite AB le point C_1 de sorte que nous ayons $(A\,B\,C\,C_1) = -1$. Désignons par t la polaire du point C par rapport à la conique c. Le point C et le plan ρ du point C_1 et de la polaire t sont pôle et plan polaire des ∞^2 quadriques de la gerbe. C'est une propriété de cette gerbe seulement qui nous sera utile dans ce qu'il suit.

Choisissons dans l'espace un point arbitraire S comme support d'une gerbe de droites. Le point d'intersection de chacune de ces droites soit le pôle du plan de la conique c comme plan polaire par rapport à une des quadriques de notre gerbe. Nous associons à chaque droite de la gerbe (S) la quadrique ainsi obtenue. De cette manière nous avons établi une correspondence homographique entre la gerbe de droites et la gerbe de quadriques, car il est clair qu'à chaque faisceau de 4 droites harmoniques de la gerbe (S) dans un plan correspondent 4 surfaces harmoniques d'un faisceau de surfaces dans la gerbe des quadriques (Reye).

Le produit de ces deux gerbes est une surface du 3^e ordre, car une droite p quelconque la coupe en trois points. Soit la droite s l'intersection du plan ρ et du plan passant par le point S et la droite p. Les points de cette droite seront les pôles du plan de la contique c par rapport aux surfaces d'un faisceau dans notre gerbe de quadriques. Le plan (pS) coupe ce faisceau de surfaces en un faisceau de coniques et la gerbe de droites (S) en un faisceau de droites. Le produit de ces faisceaux est une courbe du 3^e ordre qui coupe la droite p en trois points.

Les points S, A, B et la conique c se trouvent sur cette surface générale du 3^e ordre. Chaque droite de jonction du point S et d'un point de la conique c a sur cette conique deux points en commun avec la surface du 3^e ordre, car dans ce point cette droite touche la surface de la gerbe qui lui est associée. Il s'ensuit que les plans tangents de la surface du 3^e ordre le long de la conique c enveloppent un cône du 2^e ordre dont le sommet se trouve sur cette surface.

Les deux cônes passant par la conique c et ayant les points A, B comme sommets se coupent dans une autre conique c_1 qui se trouve dans le plan ρ. Le cône passant par la conique c_1 et ayant comme sommet le point S touche aussi la surface du 3e ordre le long de cette conique c_1, car au point de la conique chacune des génératrices du cône a deux points en commun avec la surface du 3e ordre. En effet, les points de la conique c_1 sont les sommets de tous les cônes dans notre faisceau spécial de la gerbe de quadriques.

Par une argumentation simple nous obtenons les 27 droites réelles ou imaginaires des surfaces du 3e ordre et aussi la paire de points doubles, réels ou imaginaires, sur la conique c. Dans la suite nous nous bornons à considérer le cas spécial de ces surfaces mentionné dans l'introduction.

II. Soit, comme auparavant, A, B, S des points arbitraires. La conique réelle c soit remplacée par la conique absolue. Notre gerbe du quadriques devient alors une gerbe de sphères définie par les points A, B. Le plan ρ sera le plan de symétrie du segment AB; les points d'intersection de ce plan et des droites de la gerbe (S) seront les pôles du plan polaire infiniment éloigné par rapport aux surfaces du 2e ordre passant par la conique absolue. Ce sont donc des sphères et leurs centres. On en conclut: une gerbe de sphères étant définie par deux points A, B, les points d'intersection de chaque sphère et de la droite passant par un point donné S et le centre de la sphère se trouvent sur une surface du 3e ordre passant par la conique absolue. Selon les résultats du § I. les points A, B, S se trouvent sur cette surface et le point S est le sommet d'un cône tangent du 2e ordre de la surface le long de conique absolue. Cette propriété de la surface nous indique non seulement que chaque section plane passant par S sera circulaire, mais aussi que le point S sera son foyer quadruple. Toutes les sections planes de notre surface strophoïdale passant par le point S seront donc des strophoïdales ou strophoïdes dont S est le foyer quadruple.

Soit la droite s l'intersection d'un tel plan passant par S et du plan de symétrie ρ des points A, B. Les sphères de la gerbe dont les centres se trouvent sur la droite s forment un faisceau de sphères. Ces sphères contiennent le cercle passant par A, B dont le centre se trouve sur s. Le plan de se cercle est perpendiculaire à la droite s. Le plan (Ss) coupe ce faisceau de sphères en un faisceau de cercles dont les centres se trouvent sur s. Les droites passant par S et par ces centres coupent les cercles associés dans les points d'une strophoïdale, c'est-à-dire d'une courbe bipartite du 3e ordre. Cela est vrai pour chaque plan du point S, donc la surface strophoïdale a deux nappes. Le point S se trouve sur la partie ovale qui n'a pas de points à l'infini.

Considérons le faisceau de sphères de notre gerbe passant par les points A, B, S. Les centres de ces sphères se trouvent sur la droite du plan ρ qui est perpendiculaire au plan (A, B, S) et passe par le centre du cercle de ces trois points. Le plan de cette droite et du point S coupe le faisceau de sphères associé en un faisceau de cercles passant par S. Le produit de ce faisceau de cercles et du faisceau de droites associé du point S dégénère donc en une droite l et le point S, respectivemment la droite l et une paire de droites isotropes passant par S. Le point S et donc un ombilic de la surface strophoïdale. La droite l se trouve d'un côté du plan ρ et le point S de l'autre côté. Leurs distances du plan ρ sont égales. Le plan (A, B, S) est le plan de symétrie de la surface strophoïdale car il est un plan de symétrie de la gerbe de droites et de la gerbe de sphères. Ce plan coupe la surface en une strophoïdale que nous appelons la strophoïdale de symétrie de la surface. L'asymptote a de cette strophoïdale passe par le point d'intersection L de la droite l et de la strophoïdale. Il y a donc encore trois plans tangents passant par la droite l outre celui qui touche la surface au point S. Deux de ces plans touchent la surface aux points A, B et le troisième à l'infini. Comme toutes les sections de la surface sont circulaires, les plans de la droite l coupent la surface en cercles. Dans les plans (lA) et (lB) ce cercle dégénère en deux droites isotropes se coupant dans A respectivement dans B. Ces deux points sont donc aussi des ombilics.

On sait que l'asymptote de la stroptoïdale et le foyer quadruple sont à distances égales de la droite de symétrie du faisceau de cercles (générant la courbe avec un faisceau de droites). Il s'ensuit immédiatement que le plan α de la droite l et de l'asymptote a est un plan asymptotique de la surface strophoïdale. On conclut en outre que sur la droite infiniment éloignée de la surface se trouvent deux droites infiniment voisines de la surface qui se coupent. De cette manière nous avons obtenu toutes les trois droites réelles possibles de cette surface. Tous les plans parallèles au plan α coupent la surface en cercles, car se sont des coniques passant par les points d'intersection de la conique absolue et de la droite infiniment eloignée de la surface. Comme il existe quatre plans tangents parallèles au plan asymptotique α, la surface possède encore quatre ombilics dans son plan de symétrie. Il y a donc sept ombilics qui sont tous dans le plan de symétrie.

Nous avons vu que chaque plan du point S coupe la surface strophoïdale en une strophoïdale dont le point S est le foyer quadruple. Les foyers quadruples des sections de la surface strophoïdale avec les plans d'une droite quelconque à l'infini se trouvent sur une perpendiculaire commune de ces plans, car celle-ci passe par le pôle de cette droite à l'infini par rapport à la conique absolue. Cette perpendiculaire est la section d'une paire de plan tangents imaginaires de la surface strophoïdale dans les points d'intersection de la droite à l'infini avec la conique absolue. Comme dans chaque faisceau de plans parallèles il y en a un qui passe par le point S et celui-ci est le foyer quadruple de la section, nous pouvons énoncer les théorèmes suivants pour la surface strophoïdale:

a) Le foyer quadruple de chaque section plane de la surface strophoïdale est la projection normale du point S sur ce plan.

Il s'ensuit aussi:

b) Les foyers quadruples des sections de la surface strophoïdale avec les plans d'une droite quelconque se trouvent sur un cercle passant par le point S et coupant cette droite dans le point diamétral.

c) Les foyers quadruples des sections de la sufrace strophoïdale avec les plans d'un point quelconque se trouvent sur une sphère. Ce point et le point S sont des points diamétraux de la sphère.

Ces trois théorèmes mettent en relief l'analogie entre la surface strophoïdale et la sphère. Les résultats obtenus nous permettent d'ajouter les théorèmes suivante:

d) Entre les sections de la surface strophoïdale avec des plans parallèles il y en a, outre celle qui passe par S, encore deux qui sont des strophoïdales. Entre les plans d'une droite quelconque il y en a, outre celui qui passe par S, encore un ou trois qui coupent la surface strophoïdale en strophoïdales.

e) Entre les plans d'un point quelconque il y en a ∞^1 qui coupent la surface strophoïdale en strophoïdales. Les foyers quadruples de ces sections strophoïdales se trouvent sur une courbe sphérique du 4e ordre sur la surface strophoïdale.

La conique c_1 des sommets de tous les cônes dans notre gerbe de sphères est un cercle imaginaire dans le plan de symétrie des points A, B. Nous avons vu que les sections de la surface strophoïdale parallèles au plan asimptotique sont des cercles. A l'aide de ce fait et du théorème a) on conclut que toutes les sections des plans passant par les points A, B sont des strophoïdales dont les foyers quadruples se trouvent sur un cercle de la surface. Ce cercle passe par S et son plan est perpendiculaire à la droite AB.

Toute surface bipartite du 3[e] ordre possède, outre le plan tangent de ses trois droites réelles, encore 12 plans tangents contenant des paires de droites imaginaires de la surface. Chacune des trois droites réelles se trouve dans quatre de ces 12 plans (Cremona). On trouve facilement ces 12 plans en tenant compte du fait que deux droites réelles à l'infini de la surface coïncident. Les quatre plans passant par cette droite à l'infini doivent donc être comptés deux fois.

Si le point S se trouve sur la droite AB, la surface strophoïdale sera un surface de rotation. Toutes les droites réelles seront à l'infini et la surface de rotation aura une droite d'inflexion à l'infini. Toutes les sections planes menées par le point S seront des strophoïdes symétriques.

III. Supposons maintenant que les points A, B coïncident avec un seul point D. Le produit d'une telle gerbe de sphères et de la gerbe de droites (S) sera un surface strophoïdale avec le point double D. Dans ce cas le plan ρ passe par le point D et le cercle c_1 dégénère dans ce plan en une paire de droites isotropes du point D.

Outre les propriétés déjà exposées la surface en aura d'autres, car les plans de la droite SD et les plans de l'axe de la gerbe de sphères coupent la surfaces en strophoïdes.

Selon II. les foyers quadruples des sections planes de la surface sont les projections orthogonales du point S sur le plan de la section. Il s'ensuit que les plans de la droite SD coupent la surface en strophoïdes. Les foyers quadruples des sections planes (du genre zéro) du point D se trouvent sur une sphère dont SD est un diamètre. Le plan mené par la droite réelle finie et le point D est perpendiculaire à la droite SD et coupe la surface encore en une paire de droites isotropes. La sphère dont nous venons de parler touche ce plan au point de ces droites isotropes, donc elle coupe la surface en une courbe composée de la paire de droites isotropes, de la conique absolue et d'un cercle. Tous les plans de l'axe de la gerbe de sphères peuvent être considérés comme des sphères à diamètre infini. Les points de la surface se trouvant sur de telles sphères sont sur la droite à l'infini et sur un cercle passant par le point S et coupant l'axe de la gerbe au point diamétral. Ce fait est en vigueur pour toutes les trois formes de surfaces strophoïdales.

On sait que toute courbe unicursale circulaire du 3[e] ordre est la courbe pédale d'une parabole. La strophoïde est la courbe pédale d'une parabole dont le foyer se trouve sur la droite joignant le foyer quadruple et le point double de la strophoïde. Le foyer quadruple est au centre du foyer de la parabole et du point double de la strophoïde. La directrice de la parabole est parallèle à l'asymptote de la strophoïde et passe par son point double.

Nous avons dit que les sections de la surface strophoïdale et des plans de l'axe de la gerbe de sphères sont des strophoïdes dont les foyers quadruples forment un cercle qui passe par le point S et coupe l'axe orthogonalement au point diamétral à S. Choisissons sur la droite SD le point F de sorte que S bissecte le segment FD. Menons par le point F un cercle coupant orthogonalement l'axe au point diamétral à F. Les plans de l'axe coupent la surface strophoïdale en strophoïdes dont les foyers quadruples se trouvent sur le cercle passant par S; les points d'intersection des plans avec le cercle passant par F sont les foyers des paraboles dont les strophoïdes sont les courbes pédales par rapport au point D comme pôle. Les directrices de ces paraboles sont dans le plan ρ du point D. Considérons les plans orthogonaux au plan d'une telle parabole et enveloppant cette parabole. Ces plans enveloppent un cylindre parabolique qui est congruent à tous les autres cylindres obtenus de cette manière, car toutes les paraboles en question sont congruentes. Comme tous ces cylindres touchent un même plan le long de leurs génératrices de sommet et passent par un même point de ce plan, ils enveloppent un paraboloïde de rotation. Ce point se trouve sur une droite perpendiculaire au plan ρ et cette droite est l'axe du paraboloïde. Dans le plan ρ se trouvent toutes les directrices des sections axiales du paraboloïde et le point F est leur foyer commun. On en conclut que toute surface strophoïdale du 3^e ordre à un point double est la surface pédale d'un paraboloïde de rotation si le pôle se trouve dans le plan des directrices des sections axiales du paraboloïde.

Sur une telle surface strophoïdale il n'y a que trois ombilics dans son plan de symétrie.

IV. Soient maintenant les points A, B sur l'axe de la gerbe de sphères des points imaginaires. Le produit de la gerbe de sphères et de la gerbe de droites (S) sera une surface unipartite du 3^e ordre. On peut imaginer cette surface comme formée à partir d'une surface à point double, ce point s'étant decomposé au sens d'un hyperboloïde à une nappe (F. Klein). Par une droite (à l'infini ou non) on ne peut mener que quatre plans tangents, le plan asymptotique inclus. Donc ces surfaces strophoïdales n'auront que trois ombilics (le point S inclus). Les plans tangents réels de la surface passant par le point S enveloppent un cône tangent le long du cercle c_1 de cette surface dans le plan ρ.

Nous savons que tous les plans du points S coupent la surface en strophoïdales ou strophoïdes dont S est le foyer quadruple. Les plans du point S touchant le cercle c_1 touchent la surface et coupent cette surface en strophoïdes, car les sections possèdent un point double. On voit donc qu'il y a ∞^1 de plans passant par le point S et coupant la surface unipartite strophoïdale en strophoïdes dont S est le foyer quadruple. Ces plans enveloppent un cône du 2^e ordre et les points doubles des strophoïdes se trouvent sur un cercle de la surface.