Serija II. T. 6. Zagreb 1951. Broj 3 POSEBAN OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Dr. Vilko Niče, Zagreb

Plohe izotropnih izvodnica u kongruencijama 1. reda 3., 2. i 1. razreda

Zagreb 1951

Štamparski zavod „Ognjen Prica" · Zagreb, Savska cesta 31

PLOHE IZOTROPNIH IZVODNICA U KONGRUENCIJAMA 1. REDA 3., 2. i 1. RAZREDA

Dr. Vilko Niče, Zagreb

I. Odaberemo li u prostoru tri po volji postavljena, a međusobno projektivno pridružena pramena ravnina, tad je njihov proizvod prostorna krivulja 3. reda, t. j. po tri pridružene ravnine sijeku se u točkama, koje čine neku prostornu krivulju 3. reda. Označimo li te pramenove s (α), (β) i (γ), tad pramenovi (α), (β) daju jednu pravčastu plohu 2. reda, a pramenovi (α), (γ) drugu takvu plohu. Niz zajedničkih točaka ovih dviju ploha mora ležati na nekoj prostornoj krivulji 4. reda. U ovom se slučaju ona raspada na os pramena (α) i neku prostornu krivulju k 3. reda, a to je ta krivulja, koju smo naveli kao proizvod navedenih triju projektivnih pramenova. Parovi $(\alpha)(\beta)$, $(\alpha)(\gamma)$ i $(\beta)(\gamma)$ naših projektivno pridruženih pramenova daju nam tri pravčaste plohe 2. reda, koje sve tri prolaze našom prostornom krivuljom k. Budući da izvodnice jedne ove plohe probadaju ostale dvije takve plohe u dvije realne ili imaginarne točke, vidi se da su izvodnice jednog njihovog sistema bisekante naše prostorne krivulje k. Izvodnice drugog sistema sijeku uvijek zajednički pravac takvih dviju ploha, dakle su samo obične sekante krivulje k. Može se dogoditi, da neke izvodnice prvog sistema jedne od ovih pravčastih ploha 2. reda diraju ostale dvije takve plohe, t. j. oba realna probodišta padnu skupa. Ovakve izvodnice bit će prema tome tangente prostorne krivulje k. Na temelju ovoga odmah razabiremo, da svaka prostorna krivulja 3. reda ima tri vrste realnih bisekanata. To su: 1) one, koje ju dva puta sijeku realno, 2) one, koje ju dva puta sijeku imaginarno i 3) njene tangente. Bisekante pod 1) nazovimo pravim bisekantama, a one pod 2) nepravim bisekantama te krivulje.

Znade se, a i kazali smo već, da su izvodnice jednog sistema svake navedene plohe 2. reda bisekante, a izvodnice drugog sistema te plohe obične sekante naše prostorne krivulje k. Svaka izvodnica drugog sistema (t. j. obična sekanta) i krivulja k određuju prema tome tu pravčastu plohu 2. reda, jer u svakoj njenoj ravnini leži jedna bisekanta te krivulje kao izvodnica prvog sistema te plohe 2. reda. Što vrijedi za izvodnice drugog sistema naših triju pravčastih ploha 2. reda, vrijedi za svaku običnu sekantu krivulje k, jer sve bisekante, koje sijeku ovu sekantu, čine neku pravčastu plohu, koja svaku od naših triju pravčastih ploha 2. reda siječe u krivulji k i jednom pravcu. Ovaj pravac je ona bisekanta krivulje k, koja prolazi drugim probodištem te sekante sa svakom od tih triju ploha 2. reda. Ova pravčasta ploha siječe dakle svaku ovu plohu 2. reda u degeneriranoj prostornoj krivulji 4. reda, prema tome može ona biti samo 2. reda. Vidimo dakle, da su bisekante neke prostorne krivulje 3. reda izvodnice jednog sistema svih pravčastih ploha 2. reda, koje prolaze tom prostornom krivuljom.

Uzmimo sada, da os pramena (α) siječe osi pramenova (β) i (γ). Pramenovi (α), (β) daju jedan stožac 2. reda, a pramenovi (α), (γ) drugi takav stožac, dok im je os pramena (α) zajednička izvodnica. Preostali dio njihove prodorne krivulje je naša prostorna krivulja k 3. reda, koja je proizvod ovih triju projektivno pridruženih pramenova ravnina. Vidimo dakle, da unutar pravčastih ploha 2. reda, koje prolaze krivuljom k, ima i stožaca, kojih su izvodnice bisekante te krivulje.

Kazali smo, da svaka sekanta krivulje k određuje s njom jednu pravčastu plohu 2. reda. Neka dvije takve sekante dviju raznih točaka krivulje k padnu sada zajedno, t. j. prelaze u jednu bisekantu te krivulje. Njima pridružene pravčaste plohe 2. reda prelaze time u dva stošca, kojih su vrhovi sjecišta te bisekante. Budući da to vrijedi za svaku bisekantu, vidimo, da bisekante prostorne krivulje 3. reda, koje prolaze jednom njenom točkom, čine stožac 2. reda. Takvih bisekantnih stožaca 2. reda ima toliko, koliko i točaka na krivulji k, dakle ∞^1. Svih bisekanata, koje realno sijeku krivulju k, ima prema tome ∞^2. Svaka ravnina prostora siječe krivulju k uvijek u jednoj realnoj točki i još dvije, koje mogu biti realne, mogu biti imaginarne, a mogu pasti i skupa. Odavle direktno proizlazi, da u svakoj ravnini bilo koje točke krivulje k leži jedna njena bilo prava, bilo neprava bisekanta, koja može biti i tangenta te krivulje. Kako svakom bisekantom možemo postaviti ∞^1 ravnina, od kojih svaka ima po jednu točku zajedničku s krivuljom k osim onih dviju na toj bisekanti, to smo na taj način došli do svih ∞^2 ne samo pravih, nego i nepravih bisekanata. Vidimo dakle, da svih bisekanata prostorne krivulje k (uključivši ovamo i ∞^1 njenih tangenata) ima ∞^2. Geometrijsku tvorevinu, koju te bisekante čine, zovemo kongruencijom. Budući da svaka ravnina siječu krivulju k u tri točke, to se u njoj uvijek nalaze i tri njene bisekante, od kojih dvije mogu biti konjugirano imaginarne. Radi toga kažemo, da je ta kongruencija 3. razreda.

Povučemo li nekom točkom S u prostoru dvije obične sekante krivulje k, bit će njima i tom krivuljom određene dvije pravčaste plohe 2. reda. Ove se plohe prodiru u krivulji k i jednom pravcu točke S. Ovaj pravac pripada u onaj sistem izvodnica tih dviju ploha, koje sijeku odabrane sekante, dakle je on bisekanta krivulje k. Vidimo dakle, da svakom točkom prostora prolazi jedna bisekanta prostorne krivulje k. Mi prema tome kažemo, da je ova kongruencija 1. reda.

II. Nakon ovako kratkog izvođenja i razmatranja u toč. I. nekih poznatih činjenica u vezi s kongruencijom bisekanata neke prostorne krivulje 3. reda, zabavit ćemo se sada u vezi s tim istim razmatranjima ovim problemom:

U kongruenciji bisekanata neke prostorne krivulje 3. reda ima ∞^2 nepravih bisekanata. U svakoj ravnini prave bisekante nalazi se još jedan par realnih bisekanata, a u svakoj ravnini neprave bisekante nalazi se par konjugirano imaginarnih bisekanata, kojih se realno sjecište nalazi naravno na toj krivulji. Postavljamo sada pitanje: ima li unutar ovih imaginarnih bisekanata parova izotropnih bisekanata? Koliko ih ima i kakvo geometrijsko mjesto one čine, ako ih ima?

Znademo, da stožaca 2. reda ima dvije vrste. To su uspravni kružni i kosi kružni stošci. Ove posljednje zovemo i eliptičkima. Svaki eliptički stožac možemo sjeći s dva pramena paralelnih ravnina u kružnicama. One ravnine tih pramenova, koje prolaze vrhom tog stošca, sijeku ga u kružnicama, koje se raspadaju u par izotropnih pravaca. Sve ovo proizlazi odatle, što neizmjerno daleka krivulja eliptičkog stošca siječe apsolutnu kružnicu u dva para konjugirano imaginarnih točaka, koje leže na dva realna neizmjerno daleka pravca. Sve ravnine tih pravaca (paralelne) sijeku stožac prema tome u krivuljama 2. reda, koje prolaze njihovim zajedničkim apsolutnim točkama, dakle su ili kružnice ili par izotropnih pravaca. Kod uspravnog kružnog stošca neizmjerno daleka krivulja dira apsolutnu kružnicu u dvije točke, dakle oba pramena paralelnih ravnina, koje ga kružno sijeku, stežu se u jedan takav pramen. Mi znademo međutim, da uspravan kružni stožac možemo uistinu sjeći u kružnicama samo okomito na njegovu os, dakle jednim pramenom paralelnih ravnina.

Kazali smo, da sve bisekante prostorne krivulje k 3. reda, koje prolaze jednom njenom točkom, čine stožac 2. reda. Svaka ravnina vrha tog stošca siječe ga u paru realnih ili imaginarnih izvodnica, a dva između svih tih parova bit će, kao što smo malo prije spomenuli, izotropni. Vidimo dakle, da svakom točkom neke prostorne krivulje 3. reda prolaze dva para izotropnih bisekanata te krivulje, koji se mogu istegnuti u jedan takav par. Geometrijsko mjesto svih izotropnih bisekanata naše kongruencije 1. reda 3. razreda bit će sastavljeno iz onih bisekanata te kongruencije, koje sijeku apsolutnu kružnicu u neizmjerno dalekoj ravnini. Poznato je međutim, ako imamo neku kongruenciju bisekanata b-tog reda neke prostorne krivulje n-tog reda i neku krivulju p-tog reda, onda sve bisekante te kongruencije, koje sijeku ovu krivulju p-tog reda, određuju pravčastu plohu $p\left(b+\frac{n(n-1)}{2}\right)$-tog reda[1]). Budući da je naša kongruencija prvog reda, a njena temeljna krivulja trećeg reda, dok je apsolutna kružnica drugog reda, to će geometrijsko mjesto izotropnih zraka naše kongruencije bisekanata prostorne krivulje k biti pravčasta ploha 8. reda. Ova je ploha osmoga reda i zato, jer ju svaki stožac bisekanata krivulje k prodire četverostruko u toj krivulji i u četiri izotropna pravca, a to znači $(3 \cdot 4 + 4 = 16)$ u krivulji 16. reda. Kako je svaki taj stožac ploha 2. reda, mora ova ploha izotropnih izvodnica biti 8. reda.

Krivulja k je jedini realan elemenat te plohe u konačnosti. Krivulja k je četverostruka zato, jer se u svakoj njenoj točki sijeku po dva para izotropnih izvodnica te plohe. Ova

[1]) E. Müller — J. Krames: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III. (Leipzig-Wien 1931.), str. 43.

krivulja probada neizmjerno daleku ravninu apsolutne kružnice u tri realne, ili u jednoj realnoj i dvije imaginarne točke. U toj se ravnini nalaze dakle tri bisekante naše krivulje. Uzmemo li svaku ovu točku u neizmjernosti kao vrh stošca (valjka) bisekanata krivulje k, onda ti stošci sijeku apsolutnu kružnicu u onim točkama, u kojima ju sijeku baš te neizmjerno daleke bisekante krivulje k. Budući da svaka ova bisekanta siječe apsolutnu kružnicu dva puta, ona nužno postaje dvostruka izvodnica naše plohe 8. reda. Neizmjerno daleka ravnina siječe ovu plohu u ove tri dvostruke izvodnice i apsolutnoj kružnici, dakle u krivulji 8. reda, koja je degenerirala. Vidimo prema tome, da izotropne bisekante kongruencije bisekanata svake prostorne krivulje 3. reda čine takvu pravčastu plohu 8. reda, kojoj je ta krivulja četverostruka, a neizmjerno daleke bisekante su joj dvostruke izvodnice.

Ovakve plohe mogli bi razdijeliti u toliko vrsta, koliko vrsta ima tih neizmjerno dalekih bisekanata, t. j. koliko vrsta ima prostornih kubnih krivulja. U koliko još i kubnu kružnicu odijelimo od kubne elipse, dobit ćemo pet takvih vrsta. Te bi vrste imale ove bitne oznake:

1) k je kubna hiperbola. Tri realne neizmjerno daleke dvostruke izvodnice.

2) k je kubna elipsa. Jedna realna i dvije konjugirano imaginarne takve izvodnice.

3) k je kubna kružnica. Jedna realna i dvije izotropne neizmjerno daleke dvostruke izvodnice.

4) k je parabolična hiperbola. Dvije realne neizmjerno daleke dvostruke izvodnice.

5) k je kubna parabola. Jedna realna neizmjerno daleka dvostruka izvodnica.

Jedna neizmjerno daleka dvostruka izvodnica pod 4) i ona pod 5) nisu obične dvostruke izvodnice, nego torzalne, duž kojih neizmjerno daleka ravnina tu plohu tangira, odnosno oskulira.

III. Ako se prostorna krivulja k 3. reda raspadne u čunjosjek c i neki pravac p, koji se sijeku u jednoj točki, onda svi pravci, koji taj pravac i taj čunjosjek sijeku, čine kongruenciju 1. reda 2. razreda. Svakom točkom prostora prolazi naime samo jedan pravac, koji siječu pravac p i čunjosjek c, a u svakoj ravnini leže dva takva pravca, ne brojeći onaj u ravnini čunjosjeka c. Svakom točkom pravca p prolazi ∞^1 zraka te kongruencije, koje čine stožac 2. reda s vrhom u toj točki, a svakom točkom čunjosjeka c prolazi ∞^1 zraka ove kongruencije, koje čine jedan pramen. Budući da na svakom eliptičkom stošcu ima, kao što smo to već spomenuli, dva para izotropnih izvodnica, a u svakom pramenu pravaca jedan takav par, jer njegova ravnina siječe apsolutnu kružnicu u dvije točke, to će pravac p biti četverostruk, a čunjosjek c dvostruk na plohi izotropnih izvodnica, kojoj su te izvodnice i zrake ovakve kongruencije.

Poznata je činjenica, da je neka pravčasta ploha $2n_1n_2n_3$-tog reda onda, ako je određena s tri krivulje n_1-tog, n_2-tog i n_3-tog reda kao ravnalicama. Ako se krivulja redova n_1, n_2 sijeku u α točaka, krivulje redova n_1, n_3 u β točaka i krivulje redova n_2, n_3 u γ točaka, red takve pravčaste plohe bit će $2n_1n_2n_3 - (\alpha n_3 + \beta n_2 + \gamma n_1)$, jer svako takvo sjecište s preostalom krivuljom daje jedan stožac, koji također treba pribrojiti toj plohi[2]). U našem slučaju imamo jednu krivulju 1. reda i dvije krivulje 2. reda, gdje krivulja 1. reda siječe jednu krivulju drugog reda u jednoj točki. Dakle red pravčaste plohe izotropnih zraka kongruencije 1. reda 2. razreda jednak je $2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 6$. Da je ta ploha uistinu 6. reda može se zaključiti i analogno kao malo prije. T. j., sve zrake ove kongruencije, koje prolaze jednom točkom pravca p, čine, kao što smo rekli, neki stožac 2. reda. Ovaj stožac i naša ploha izotropnih izvodnica u ovoj kongruenciji prodiru se u četverostrukom pravcu p, dvostrukom čunjosjeku c i dva para izotropnih izvodnica navedenog stošca. Prema tome, ako sve elemente koji pripadaju ovoj prodornoj krivulji zbrojimo, onda je to degenerirana prostorna krivulja 12. reda. Kako je navedeni stožac 2. reda, mora nužno ta ploha biti 6. reda.

Uzmemo li neizmjerno daleku točku pravca p kao vrh stošca (valjka), koji prolazi čunjosjekom c, onda neizmjerno daleka ravnina siječe taj stožac ili u dvije realne, ili u dvije imaginarne izvodnice, koje mogu pasti i skupa. To ovisi o tome, da li je krivulja c hiperbola, elipsa ili parabola. Obje ove neizmjerno daleke izvodnice navedenog stošca (valjka) sijeku dva puta apsolutnu kružnicu, dakle su i one dvostruke izvodnice naše plohe 6. reda. Vidimo dakle, da izotropne zrake naše

---

[2]) Rohn — Papperitz: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. II., str. 258.

kongruencije 1. reda 2. razreda čine takvu pravčastu plohu 6. reda, kojoj je pravac *p* četverostruk, a čunjosjek *c* dvostruk realan elemenat u konačnosti, dok u neizmjerno dalekoj ravnini ima ta ploha jedan par dvostrukih izvodnica, koje mogu biti realne, mogu biti imaginarne, a mogu pasti i skupa. To ovisi, kao što smo vidjeli, o vrsti čunjosjeka *c*, a prema tome možemo razdijeliti i ovakve plohe u tri, odnosno četiri vrste, ako imaginarne dvostruke izvodnice u neizmjernosti odijelimo od izotropnih. Neizmjerno daleka ravnina siječe ovakve plohe u apsolutnoj kružnici i jednom paru dvostrukih izvodnica, dakle u degeneriranoj krivulji 6. reda.

IV. Kod kongruencija 1. reda najpoznatije su svakako one 1. razreda, t. j. linearne. Takve kongruencije čine svi oni pravci, koji sijeku 1) dva realna pravca, 2) dva realna pravca, koji padaju skupa i 3) dva imaginarna pravca druge vrste. Prva se od ovih kongruencija zove hiperbolična, druga parabolična, a treća eliptična. Evidentno je, da je ploha izotropnih zraka u hiperboličnoj kongruenciji 4. reda VII. vrste, jer se sastoji iz onih zraka, koje sijeku obje realne ravnalice te kongruencije i apsolutnu kružnicu[3]). Obje ravnalice su prema tome realni pravci te plohe i to dvostruki. Kod parabolične kongruencije je ta ploha 4. reda VIII. vrste, jer obje realne ravnalice padaju skupa. Budući da je kod parabolične kongruencije pramen ravnina njene ravnalice projektivan s nizom njenih točaka, to svakom točkom te ravnalice prolazi opet samo jedan pramen zraka te kongruencije, dakle i samo jedan par izotropnih zraka te kongruencije. Ova je ravnalica prema tome također realan dvostruki pravac pravčaste plohe izotropnih zraka parabolične kongruencije.

Poznato je, da svaka pravčasta ploha 4. reda VII. i VIII. vrste ima jednu dvostruku izvodnicu. Gdje se u našem slučaju nalazi ta dvostruka izvodnica? Hiperbolična i parabolična kongruencija ima u neizmjerno dalekoj ravnini apsolutne kružnice jednu realnu zraku, jer se takva nalazi u svakoj, pa i neizmjerno dalekoj ravnini. Ta neizmjerno daleka zraka siječe opet dva puta apsolutnu kružnicu, dakle je dvostruka izvodnica plohe izotropnih zraka hiperbolične i parabolične kongruencije. Kod ovakvih ploha realne su ne samo ravnalice, nego, kao što vidimo, i neizmjerno daleke zrake tih kongruencija kao dvo-

[3]) E. Müller — J. Krames: Cit. pod 1), str. 262.

struke izvodnice tih ploha. Isto vrijedi i za plohu izotropnih zraka parabolične kongruencije, samo što ovdje oba konačna realna dvostruka pravca padaju skupa, tako da ploha duž tog pravca sama sebe dira.

Eliptična kongruencija nema realnih ravnalica, dakle prema našim dosadanjim razmatranjima ploha njenih izotropnih zraka ne bi imala ni jedne realne točke. Kako se međutim par izotropnih zraka uvijek siječe u jednoj realnoj točki, vidimo da takva ploha u ovoj kongruenciji ne može postojati.

(Primljeno 15. I. 1951.)

LES SURFACES DES GENERATRICES ISOTROPES DANS LES CONGRUENCES DE DROITES DU 1er ORDRE DE LA 3e, 2e ET 1re CLASSE

Par Vilko Niče, Zagreb

Résumé

Les congruences du 1er ordre de la 3e classe sont formées par les bissécantes propres et impropres d'une courbe gauche k du 3e ordre. Les plans des bissécantes impropres contiennent des paires de bissécantes imaginaires conjuguées de la courbe gauche k. Si l'on choisit dans une telles congruence de droites les bissécantes passant par un point de la courbe fondamentale k, elles engendrent un cône du 2e ordre. Tout plan du sommet de ce cône contient une paire de génératrices réelles ou imaginaires conjuguées, donc aussi une bissécante propre ou impropre. Du fait qu'un cône du 2e ordre contient deux paires de génératrices isotropes on déduit que chaque point de la courbe k est l'intersection de deux paires de ses bissécantes isotropes. Les deux paires de génératrices du cône droit à base circulaire sont confondues en une telle paire. Toutes les droites isotropes de la congruence de bissécantes de la courbe fondamentale k forment donc une surface réglée contenant la courbe k comme courbe quadruple et contenant la conique absolue.

Si une congruence de droites de l'ordre b est la congruence des bissécantes d'une courbe gauche de l'ordre n, les droites de cette congruence passant par les points d'une courbe de l'ordre p forment une surface réglée de l'ordre $p\left(b+\frac{n(n-1)}{2}\right)$.

Comme notre congruence de bissécantes est du 1^{er} ordre, la courbe fondamentale k du 3^e ordre et la conique absolue du 2^e ordre, la surface réglée des génératrices isotropes dans la congruence d'une courbe gauche du 3^e ordre sera du 8^e ordre. Comme la congruence des bissécantes de la courbe k est de la 3^e classe, le plan à l'infini contient trois de ses droites. Dans le plan à l'infini se trouve aussi la conique absolue qui aura des points d'intersection avec les droites de la congruence se trouvant dans ce plan. La surface réglée contient dont trois génératrices doubles à l'infini. Une de ces génératrices doubles sera toujours réelle tandis que les deux autres dépendent de la nature de la courbe k. Elles seront donc 1° réelles, 2° imaginaires conjuguées, 3° isotropes, 4° confondues et 5° confondues avec la génératrice réelle. Il y a donc 5 espèces de surfaces réglées de bissécantes isotropes des courbes gauches du 3^e ordre.

Dans la congruence de droites du 1^{er} ordre de la 2^e classe la surface des paires de droites isotropes est du 6^e ordre. Car elle est déterminée par trois directrices dont deux sont du 2^e ordre et une du 1^{er} ordre, la directrice du 1^{er} ordre ayant un point commun avec une du 2^e ordre. On sait que la courbe fondamentale d'une telle congruence de droites se décompose en une conique et une droite qui ont un point commun. La droite de la courbe fondamentale devient une droite quadruple de la surface de droites isotropes, tandis que la conique est une courbe double de la surface. La conique double étant, selon le cas, une hyperbole, une ellipse ou une parabole, la surface réglée isotrope de cette congruence de droites aura deux génératrices doubles à l'infini qui seront 1° réelles, 2° imaginaires conjuguées ou 3° confondues. On pourra donc distinguer trois espèces de surfaces réglées isotropes de telles congruences de droites.

Dans une congruence de droites linéaire hyperbolique ou parabolique (du 1^{er} ordre de la 1^{er} classe) la surface des paires de droites isotropes sera du 4^e ordre de la VII^e ou VIII^e espèce (d'après R. Sturm), car elle est formée par les droites passant par les points de la conique absolue. Ici encore la droite à l'infini de nos congruences linéaires sera la génératrice double de cette surface réglée isotrope. La congruence de droites linéaire elliptique ne contient pas de surface réglée isotrope, car elle n'a pas de paires de droites isotropes.

ÜBER DIE ISOTROPEN STRAHLENPAARE 2. ART DER STRAHLENKONGRUENZEN 1. ORDNUNG 3., 2. UND 1. KLASSE

Vilko Niče, Zagreb

In meiner Abhandlung »Regelflächen mit lauter isotropen Erzeugenden in den Strahlenkongruenzen 1. Ordnung 3., 2. und 1. Klasse« habe ich in den fünf bekannten Strahlenkongruenzen 1. Ordnung isotrope Strahlenpaare untersucht, aber nur diejenigen 1. Art. In der Abhandlung war dies zwar nicht ausdrücklich betont, aber aus dem Inhalte leicht ersichtlich. Nicht achtend auf diese Tatsache wurde am Ende der Abhandlung versehentlich die Behauptung ausgesprochen, dass die elliptische lineare Strahlenkongruenz keine Regelfläche mit lauter isotropen Erzeugenden enthält. Da aber die Regelflächen isotroper Erzeugenden in den erwähnten Strahlenkongruenzen nicht nur ∞^1 isotrope Strahlenpaare 1. Art, sondern auch die ∞^2 isotrope Strahlenpaare 2. Art enthalten, stimmt offenbar die so ausgesprochene Behauptung nicht, worauf auch K. Strubecker am Ende seines Referates*) angewiesen hat. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden in einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz enthält zwar keine isotropen Strahlenpaare 1. Art, aber dafür ∞^2 isotrope Strahlenpaare 2. Art, die in der erwähnten Abhandlung nicht betrachtet wurden. Deshalb sollen nun die isotropen Strahlenpaare 2. Art in den fünf bekannten Strahlenkongruenzen 1. Ordnung kurz besprochen werden.

Bekanntlich können die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Fläche 2. Ordnung als Doppelpunkte der Involution konjugierter Pole auf dieser Geraden betrachtet werden. Sind zwei Geraden konjugiert bezüglich einer Regelfläche 2. Ordnung, bilden die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte ihrer Involutionen konjugierter Pole vier Erzeugenden dieser Regelfläche. Die Doppelpunkte dieser beiden Involutionen sind alle entweder reel, oder imaginär. Im Falle elliptischer Involution auf diesen konjugierten Geraden bilden die Verbindungsgeraden ihrer Doppelpunkte zwei Paare imaginärer Erzeugenden 2. Art dieser Regelfläche 2. Ordnung.

---

* Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete, B. 43 (1952), p. 362.

Die unendlich ferne Achse des Ebenenbüschels der parallelen Ebenen der Kreisschnitte eines einschaligen Hyperboloides und die Gerade der Mittelpunkte dieser Kreisschnitte sind zwei konjugierte Geraden bezüglich des einschaligen Hyperboloides. Die Involutionen konjugierter Pole dieser Geraden sind elliptisch. Die Doppelpunkte der Involution auf der unendlich fernen Achse sind deren Schnittpunkte mit dem apsoluten Kegelschnitte. Die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte dieser Involutionen bilden also zwei Paare isotroper Erzeugenden 2. Art des einschaligen Hyperboloides. Jede der beiden Erzeugendenscharen des Hyperboloides enthält eines dieser zwei Paare. Der zweite Ebenenbüschel paralleler Kreisschnitte bildet ebenso das zweite Doppelpaar isotroper Erzeugenden 2. Art des einschaligen Hyperboloides.

Die Kongruenzen 1. Ordnung 3. und 2. Klasse enthalten je eine Erzeugendenschar der ∞^2 Regelflächen 2. Ordnung (Hyperboloide) in diesen Kongruenzen. Zwei Paare isotroper Erzeugenden 2. Art jeder dieser Schar auf jeder dieser Regelfläche 2. Ordnung sind isotrope Strahlenpaare 2. Art dieser Kongruenzen. Diese ∞^2 isotropen Strahlenpaare jeder dieser Kongruenzen sind also ein Bestandteil ihrer von lauter isotroper Erzeugenden gebildeter Regelfläche.

Die lineare Strahlenkongruenzen enthalten je eine Erzeugendenschar der ∞^3 Regelflächen 2. Ordnung in diesen Kongruenzen, von denen ihrer ∞^1 dasselbe isotrope Strahlenpaar 2. Art enthalten. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenzen enthält also ebenfals ∞^2 isotroper Strahlenpaare 2. Art. Die ∞^1 isotropen Strahlenpaare 1. Art der linearen hyperbolischen und parabolischen Strahlenkongruenzen bilden bekanntlich eine Regelfläche 4. Ordnung und VII. b. z. w. VIII. Art, die zusammen mit den ∞^2 isotropen Strahlenpaaren 2. Art die Fläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenzen bilden. Die elliptische lineare Strahlenkongruenz enthält keine isotropen Strahlenpaare 1. Art, da sie keine reelle Leitgerade besitzt in deren reellen Punkten sich ihre isotropen Strahlenpaare 1. Art schneiden könnten. Die Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser linearen Strahlenkongruenz enthält deswegen nur die ∞^2 isotropen Strahlenpaare 2. Art.

Die Regelfläche isotroper Erzeugenden der rotatorischen linearen Strahlenkongruenzen (der elliptischen und der hyperbolischen) enthält das Paar isotroper Ebenen der Achse dieser rotatorischen Strahlenkongruenzen. Bei der hyperbolischen rotatorischen linearen Strahlenkongruenz gehören die isotropen Strahlenpaare 1. und 2. Art dieser isotroper Ebenen den Erzeugenden der Regelfläche isotroper Erzeugenden dieser Strahlenkongruenz an, während bei der elliptischen rotatorischen linearen Strahlenkongruenz nur die isotropen Strahlenpaare 2. Art dieser isotropen Ebenen die Erzeugenden der genannten Regelfläche bilden.

O IZOTROPNIM ZRAKAMA 2. VRSTE U KONGRUENCIJAMA 1. REDA 3., 2. I 1. RAZREDA

Vilko Niče, Zagreb

Sadržaj

U radnji »Plohe izotropnih izvodnica u kongruencijama 1. reda 3., 2. i 1. razreda« istražio sam u tim kongruencijama parove izotropnih zraka i to samo ∞^1 parova onih 1. vrste, a da to u tekstu nisam izričito istaknuo. Imajući na umu samo izotropne izvodnice 1. vrste, ustvrdio sam nepažnjom na kraju radnje, da u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji pravčasta ploha sa samim izotropnim izvodnicama. Ovo dakako ne odgovara istini, (na što je upozorio i K. Strubecker na kraju referata*) o toj radnji), ako se uzme u obzir, da na svakoj plohi izotropnih izvodnica u spomenutim kongruencijama, osim ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, postoji i ∞^2 izotropnih izvodnica 2. vrste. Na plohi izotropnih izvodnica u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji onih ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, ali dakako postoji onih ∞^2 parova izotropnih izvodnica 2. vrste. Pogledajmo sada tih ∞^2 parova izotropnih zraka 2. vrste.

Iz činjenice, da na jednoplošnom hiperboloidu postoje dva sistema usporednih kružnih presjeka proizlazi, da na svakom takvom hiperboloidu postoje 4 para izotropnih izvodnica 2. vrste, od kojih po dva para pripadaju svakom sistemu izvodnica. U kongruencijama 1. reda 3. i 2. razreda ima ∞^2 jednoplošnih hiperboloida, kojima su izvodnice jednog sistema zrake tih kongruencija. Po dva para izotropnih izvodnica 2. vrste svakog tog hiperboloida su prema tome također zrake tih kongruencija, a odavle izlazi da se i ovih ∞^2 parova izotropnih zraka 2. vrste nalaze na plohi izotropnih izvodnica tih kongruencija, osim onih poznatih ∞^1 takvih parova 1. vrste. U linearnim kongruencijama ima ∞^3 hiperboloida, ali ∞^1 od njih prolazi uvijek istim parom izotropnih izvodnica 2. vrste. Plohe izotropnih izvodnica u ovakvim kongruencijama imaju prema tome također ∞^2 izotropnih izvodnica 2. vrste. Dok ovakva ploha u hiperboličkoj i paraboličkoj linearnoj kongruenciji, koja je, kao što znamo, 4. reda, a VII. odnosno VIII. vrste, ima i ∞^1 parova izotropnih izvodnica 1. vrste, na takvoj plohi u eliptičkoj linearnoj kongruenciji ne postoji tih ∞^1 parova takvih izvodnica 1. vrste, nego samo onih ∞^2 parova izotropnih izvodnica 2. vrste. Eliptička linearna kongruencija nema naime realnih ravnalica, u čijim realnim točkama bi se parovi takvih izotropnih zraka 1. vrste mogli sjeći.

Kod rotacionih linearnih kongruencija su sastavni dio plohe izotropnih izvodnica tih kongruencija izotropne ravnine, koje se sijeku u osi tih kongruencija. U hiperboličkoj takvoj kongruenciji su svi izotropni pravci 1. i 2. vrste u tom paru izotropnih ravnina izvodnice njene plohe izotropnih izvodnica, dok su u eliptičkoj takvoj kongruenciji samo izotropni pravci 2. vrste u tom paru izotropnih ravnina izvodnice njene plohe izotropnih izvodnica.

(Primljeno 20. VI. 1953.)