Serija II. T. 5. Zagreb 1950. Broj 1 **POSEBAN OTISAK**

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Dr. Vilko Niče, Zagreb

O NOŽIŠNIM PLOHAMA ROTACIONOG PARABOLOIDA

Zagreb 1950

Štamparski zavod „Ognjen Prica" • Zagreb, Savska cesta 31

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Serija II. | Zagreb 1950 | T. 5 / No. 1

O NOŽIŠNIM PLOHAMA ROTACIONOG PARABOLOIDA

Dr. Vilko Niče, Zagreb

Svakim pravcem u prostoru možemo na neku plohu 2. reda postaviti dvije tangencijalne ravnine. Uzmimo po volji neku plohu 2. reda i postavimo na nju tangencijalne ravnine svakim pravcem neizmjerno daleke ravnine: dakle parove tangencijalnih paralelnih ravnina u konačnosti. Odaberemo li osim toga po volji negdje u konačnosti neku točku P, pa ovom postavimo okomice na parove tih tangencijalnih ravnina te ih njima probodemo, tad će sva tako nastala probodišta sačinjavati poznatu nožišnu plohu 4. reda, koja dva puta prolazi apsolutnom čunjosječnicom (ciklida). Okomitost zraka točke P i parova paralelnih tangencijalnih ravnina naše plohe 2. reda, definira u neizmjerno dalekoj ravnini polaran odnos obzirom na apsolutnu čunjosječnicu. Budući da na svakoj zraci točke P imamo, osim nje, još dvije točke nožišne plohe, to će takav par na izotropnim pravcima točke P pasti uvijek u jednu točku, i to duž apsolutne čunjosječnice, jer izotropni pravci točke P spajaju ovu s točkama te apsolutne čunjosječnice. Vidimo dakle, da je apsolutna čunjosječnica uistinu dvostruka na našoj nožišnoj plohi.

Odaberemo li sada paraboloid kao plohu 2. reda, onda će se nožišna ploha 4. reda ovakve plohe 2. reda raspasti u neizmjerno daleku ravninu i neku opću plohu 3. reda, jer svakim neizmjerno dalekim pravcem možemo na taj paraboloid postaviti jednu konačnu i neizmjerno daleku tangencijalnu ravninu. Ova neizmjerno daleka ravnina prolazi apsolutnom čunjosječnicom, dakle njome jedamput prolazi i spomenuta opća ploha 3. reda, jer je ta čunjosječnica dvostruka za kompletnu nožišnu plohu. Pol P bit će naravski i ovdje dvostruka točka ovakve plohe.

U ovoj radnji zabavit ćemo se jednom vrstom ovakvih ploha, i to onih koje nastaju iz rotacionog paraboloida, za bilo koji pol P u konačnosti.

Uzmimo sada takav rotacioni paraboloid i neku točku P kao pol. Nožišnu plohu tog pola dobit ćemo, kao što je poznato, tako, da iz točke P postavimo okomice na svaku tangencijalnu ravninu toga paraboloida, te ju njome probodemo. Sva ovako dobivena probodišta ležat će na nekoj općoj plohi 3. reda, koja prolazi apsolutnom čunjosječnicom, a kojoj je točka P dvostruka točka.

Zamislimo sada na naš rotacioni paraboloid postavljen jedan tangencijalan valjak. Ravnina parabole, duž koje taj valjak tangira naš rotacioni paraboloid, bit će paralelna s osi toga paraboloida. Sve tangencijalne ravnine ovog valjka su istovremeno i tangencijalne ravnine našeg paraboloida. Okomice spuštene iz točke P na ove ravnine nalazit će se u okomitoj ravnini na tom valjku, dakle će nožišta tih okomica ležati na ravninskoj nožišnoj krivulji presječne parabole tog tangencijalnog valjka. Za ovakve nožišne krivulje u ravnini znademo, da su cirkularne krivulje 3. reda s polom P kao dvostrukom točkom. Osim toga znademo za ovakve nožišne cirkularne krivulje parabole, da im se četverostruki fokus nalazi u polovištu spojnice dvostruke točke s fokusom parabole, kojoj je ta krivulja nožišna.

Kad bi na naš rotacioni paraboloid postavili sve tangencijalne valjke, i na svakom odredili spomenutu ravninsku nožišnu krivulju, tad bi sve takve krivulje sačinjavale našu opću plohu 3. reda.

Siječemo li naš rotacioni paraboloid meridijanskim ravninama, tada su svi tako nastali meridijani jednake parabole sa zajedničkom osi i zajedničkim tjemenom. Sve će takve meridijanske parabole imati prema tome zajednički fokus E, kao i ravninu α okomitu na os toga paraboloida, u kojoj se nalazi pramen ravnalica tih meridijanskih parabola. Odaberemo li točku E kao vrh tangencijalnog stošca našeg rotacionog paraboloida, onda će taj stožac dirati naš paraboloid duž imaginarne kružnice u kojoj ga siječe ravnina α, jer je ona polarna ravnina tog paraboloida za točku E kao pol. Sve izvodnice tog stošca su izotropni pravci, dakle taj stožac prolazi i apsolutnom čunjosječnicom u neizmjernosti.

Odaberimo ponovno jedan tangencijalan valjak našeg rotacionog paraboloida, a točkom E povucimo pravac e paralelan s izvodnicama tog valjka. Povučemo li neizmjerno dalekom točkom ovog pravca tangente na apsolutnu čunjosječnicu, tad je tim tangentama i pravcem e dan par imaginarnih ravnina. Ove ravnine tangiraju naš imaginaran tangencijalan stožac vrha E, a prema tome i naš rotacioni paraboloid. Jer je njihova realna presječnica paralelna s našim tangencijalnim valjkom, dirat će te imaginarne ravnine i taj valjak. Sve ravnine postavljene realnom neizmjerno dalekom polarom neizmjerno daleke točke pravca e kao pola obzirom na apsolutnu čunjosječnicu, sjeći će ovaj par imaginarnih tangencijalnih ravnina u paru izotropnih pravaca. Sve te ravnine (okomite na taj valjak) imaju zajedničke apsolutne točke, dakle sve te izotropne presječnice, koje tangiraju presječne parabole spomenutog tangencijalnog valjka, imaju svoja realna sjecišta na pravcu e. Ta su sjecišta prema tome fokusi E' tih presječnih parabola. Budući da je polarni odnos obzirom na apsolutnu čunjosječnicu definiran u konačnosti okomitošću, vidimo, da se fokus E' okomite projekcije rotacionog paraboloida na bilo kakvu ravninu podudara s projekcijom zajedničkog fokusa svih osnih presjeka toga paraboloida.

Na temelju naših razmatranja znademo, da svaki ravninski presjek nožišne plohe nekog rotacionog paraboloida, koji prolazi njenom dvostrukom točkom, možemo smatrati nožišnom krivuljom presječne krivulje jednog tangencijalnog valjka tog paraboloida za tu dvostruku točku kao pol, ako je ravnina presjeka okomita na taj valjak. Osim toga smo sprijeda spomenuli, da se četverostruki fokus nožišne krivulje neke parabole nalazi u polovištu spojnice dvostruke točke s fokusom te parabole. Za fokus takve presječne parabole pokazali smo nadalje, da se nalazi u okomitoj projekciji E' na tu ravninu zajedničkog fokusa E svih osnih presjeka tog rotacionog paraboloida. Vidimo dakle, ako pol P spojimo s točkom E, i polovište F te dužine okomito projiciramo na svaku ravninu točke P u točku F', onda će ta točka uvijek pasti u polovište spojnice PE', dakle će ona biti četverostruki fokus presječne krivulje naše nožišne plohe s tom ravninom.

Učinimo li sada obrnuto, t. j. postavimo li u četverostrukom fokusu F' svakog ravninskog presjeka naše nožišne plohe, s ravninom dvostruke točke P, okomicu l, tad će sve takve okomice prolaziti gore spomenutom točkom F. Odaberimo sada po volji jedan takav ravninski presjek kroz točku P, i u njegovom četverostrukom fokusu F' postavimo okomicu l na ravninu tog presjeka. Za točku F' znademo, da je realno sjecište izotropnih tangenata te presječne krivulje u apsolutnim točkama, kojima ona prolazi. Pravac l i ove tangente određuju par imaginarnih ravnina, koje tangiraju apsolutnu čunjosječnicu, jer je pravac l okomit na ravnini presjeka, a prolaze točkom F, jer tom točkom prolazi okomica l. Budući da ovo vrijedi za svaki ravninski presjek dvostruke točke P, a svi pravci l prolaze točkom F, to vidimo, da svi ovakvi parovi imaginarnih ravnina omataju imaginaran stožac s realnim vrhom F, koji prolazi apsolutnom čunjosječnicom i duž nje tangira našu nožišnu plohu. Postavimo li naime točkom F ravninu okomitu na pravac l, bit će točka F četverostruki fokus presječne krivulje nožišne plohe s tom ravninom, jer ova ravnina ima iste apsolutne točke u neizmjernosti kao i ona paralelna s njom u točki P. Dakle su izotropne tangente ravninskog presjeka kroz točku F presječnice s istim parom imaginarnih tangencijalnih ravnina pravca l, a prema tome su to izvodnice onog imaginarnog tangencijalnog stošca vrha F. Na temelju dosadanjih razmatranja možemo prema tome izreći ovaj stavak:

Nožišna ploha rotacionog paraboloida, za bilo koji pol P, *prolazi apsolutnom čunjosječnicom tako, da imaginarne tangencijalne ravnine te nožišne plohe duž apsolutne čunjosječnice, omataju stožac 2. reda s realnim vrhom* F, *koji se nalazi u polovištu spojnice pola* P *i zajedničkog fokusa svih meridijanskih parabola toga paraboloida.*

Evidentno je, da će se točka F nalaziti na površini nožišne plohe onda, ako se pol P odabere u ravnini α, u kojoj se nalaze ravnalice svih meridijanskih parabola. Ako se pol P odabere na osi tog rotacionog paraboloida, onda će i nožišna ploha biti rotaciona.

Kod ploha 2. reda je kugla takva ploha, koja prolazi apsolutnom čunjosječnicom, a središte F joj je vrh imaginarnog tangencijalnog stošca duž te čunjosječnice. Nisu nam potrebna opširna razmatranja, pa da se zapazi potpuno analogne osobine naše nožišne plohe i kugle, ako uočimo činjenicu, da je središte svake kružnice njen četverostruki fokus. Na pr.:

1) Četverostruki fokus svakog ravninskog presjeka nožišne plohe rotacionog paraboloida, nalazi se u okomitoj projekciji točke F na tu ravninu.

U vezi s ovim, dobivamo odmah i ovo:

2) Četverostruki fokusi ravninskih presjeka s ravninama nekog pravca nalaze se na kružnici, koja prolazi točkom F i okomito dijametralno siječe taj pravac.

3) Četverostruki fokusi ravninskih presjeka s ravninama neke točke leže na kugli, kojoj ta točka i točka F određuju jedan promjer.

Prodor svake kugle s ovakvom nožišnom plohom daje prostornu krivulju 4. reda, jer obje plohe prolaze apsolutnom čunjosječnicom. Sve kugle središta F prodiru našu nožišnu plohu samo u jednoj kružnici, jer duž apsolutne čunjosječnice tangiraju tu plohu.

Postavimo li na naš rotacioni paraboloid tangencijalan valjak paralelan sa spojnicom točaka E, P, onda će nožišna krivulja u okomitoj ravnini točke P na taj valjak degenerirati u pravac. Točka će E' naime pasti u točku P, a nožišna krivulja parabole za njen fokus kao pol je, kao što znademo, tjemena tangenta te parabole. Vidimo dakle, da naša nožišna ploha ima u konačnosti jedan realan pravac, i to samo jedan, jer samo u spomenutoj ravnini može nastupiti opisani slučaj. Paralelni presjeci s ovakvom ravninom imat će naravski svoj četverostruki fokus na spojnici EP. Budući da ravnine kružnica, u kojima kugle središta F prodiru našu nožišnu plohu, sijeku našu plohu još i u jednom pravcu, a takav postoji u konačnosti samo jedan, to mogu one prolaziti samo tim pravcem, jer nisu paralelne da bi mogle prolaziti neizmjerno dalekim. Radi apsolutne čunjosječnice u neizmjerno dalekoj ravnini, ima ta ploha u toj ravnini još i jedan realan pravac. Vidimo dakle, da spomenute kružnice naše plohe leže u ravninama jednog sveska, kojega je os jedini realni pravac u konačnosti na toj plohi. Budući da su sve tangencijalne ravnine našeg rotacionog paraboloida, koje su paralelne s njegovom osi, nalaze u neizmjernosti, to će i pripadna nožišta u tim ravninama, kao točke naše nožišne plohe, ležati na neizmjerno dalekom pravcu ravnine okomito postavljene točkom P na os našeg paraboloida. Neizmjerno daleki pravac naše nožišne plohe je prema tome okomit na osi našeg rotacionog paraboloida. Ovo uostalom proizlazi i iz simetrije naše nožišne plohe. Konačan realan pravac ove naše plohe je također okomit na spomenutu os, dakle njime i neizmjerno dalekim možemo postaviti ravninu. Poznata je međutim činjenica, da se na svakoj općoj plohi 3. reda nalaze barem tri realna pravca, od kojih dva mogu pasti i skupa. Budući da u spomenutoj ravnini konačnog i neizmjerno dalekog pravca nema u konačnosti trećeg pravca, to se taj treći poklapa s onim u neizmjernosti, dakle je taj neizmjerno daleki pravac dvoznačan. Osim toga odavle proizlazi, da je ravnina tih pravaca asimptotska ravnina naše nožišne plohe, jer ona tu plohu tangira duž čitavog neizmjerno dalekog pravca.

Siječemo li našu nožišnu plohu i sa svim ostalim ravninama tog neizmjerno dalekog pravca, morat će dobivene čunjosječnice biti kružnice, jer one prolaze sjecištima tog neizmjerno dalekog pravca s apsolutnom čunjosječnicom. Vidimo prema tome, da su ova sjecišta imaginarne dvostruke točke naše nožišne plohe. Osim toga vidimo, da smo dobili još jedan svezak ravnina (paralelnih), u kojima se nalaze kružnice naše plohe.

Znademo, da svaka kugla prodire našu nožišnu plohu u prostornoj krivulji 4. reda. Ova se prodorna krivulja može međutim raspasti i u dvije kružnice. Ako naime kružnicom naše plohe, koja pripada jednom svesku ravnina, postavimo bilo kakvu kuglu, onda će ona prodirati našu plohu u još jednoj kružnici, koja će ležati u jednoj ravnini drugog sveska.

Budući da je naša nožišna ploha simetrična, možemo njenim realnim pravcima postaviti na nju četiri tangencijalne ravnine, kojih će se dirališta nalaziti u simetralnoj ravnini te plohe. Simetralna ravnina siječe naime tu plohu u krivulji 3. reda roda nultoga, a svakom točkom takve krivulje možemo na nju povući dvije tangente, ako se ta točka ne nalazi na njenoj vitici (zatvoren konačan dio iznad dvostruke točke), što u našem slučaju ne postoji. U ovim diralištima raspada se presječna kružnica u dva izotropna pravca, dakle na ovakvim nožišnim plohama nalaze se uvijek četiri kružne točke. Dvije od tih pasti će u šiljak te plohe, ako ga ona ima. Naše nožišne plohe mogu naime imati običnu dvostruku točku, izoliranu dvostruku točku, ili šiljak, prema tome, da li se pol P nalazi izvan, unutar ili na paraboloidu.

Znademo, da je strofoida, odnosno strofoidala, takva cirkularna krivulja 3. reda roda nultoga, odnosno prvoga, kojoj se četverostruki fokus nalazi na njoj samoj. Na temelju nabrojenih osobina naše nožišne plohe, koje su zajedničke s kuglom, mogu se vrlo lako dobiti i one osobine takve plohe, koje se odnose na njene strofoidalne ravninske presjeke. Na pr. svaka kružnica probada našu nožišnu plohu najviše u četiri točke, jer se preostale dvije nalaze na apsolutnoj čunjosječnici u neizmjernosti. Odavle direktno proizlazi ovo: *Siječemo li nožišnu plohu rotacionog paraboloida ravninama jednog sveska, tada će u tom svesku biti najviše četiri ravnine, koje će tu plohu sjeći u strofoidalama.*

Spomenuli smo već, da svaka kugla prodire našu plohu u nekoj prostornoj krivulji 4. reda, a četverostruki fokusi svih ravninskih presjeka s ravninama jedne točke nalaze se na poznatoj kugli. Kod strofoidalnih presjeka s ravninama jedne točke nalaze se ti fokusi i na kugli i na plohi, dakle dobivamo ovo: *Siječemo li nožišnu plohu rotacionog paraboloida s ravninama jedne točke, onda će ∞^1 tih ravnina sjeći tu plohu u strofoidalama tako, da će se četverostruki fokusi tih strofoidala nalaziti na nekoj prostornoj krivulji 4. reda (cikliki) na toj nožišnoj plohi.*

ÜBER DIE FUSSPUNKTSFLÄCHEN DES ROTATIONSPARABOLOIDS

Von Dr. Vilko Niče, Zagreb

Zusammenfassung

Die Fusspunktsflächen der Flächen 2. Ordnung sind die bekannten Zykliden, d. h. Flächen vierter Ordnung, die den absoluten Kegelschnitt zweimal enthalten (Darboux). Die Fusspunktsflächen des Paraboloids zerfallen in die unendlichferne Ebene und eine allgemeine Fläche 3. Ordnung, und jeder dieser Teile geht durch den absoluten Kegelschnitt. In dieser Arbeit behandeln wir näher die Fusspunktsflächen des Rotationsparaboloids.

Zu jedem Rotationsparaboloid gehört der auf der Achse befindliche gemeinsame Brennpunkt der Achsenschnitte, sowie die Polarebene α dieses Brennpunktes, die den Büschel der Leitgeraden der Achsenschnitte enthält. Dieser gemeinsame

Brennpunkt E ist die Spitze des imaginären Berührungskegels des Paraboloids längs seines imaginären Schnittes mit der Ebene α. Dieser imaginäre Kegel enthält auch den absoluten Kegelschnitt, da seine Erzeugenden isotrope Gerade sind.

Ziehen wir durch den Punkt E eine Parallele e mit einem Berührungszylinder des Paraboloids. Das durch die Gerade e gehende Paar imaginärer Berührungsebenen des erwähnten imaginären Kegels berührt das Paraboloid und seinen Berührungszylinder. Die Fusspunktskurve dieses Berührungszylinders bezüglich eines Pols P ist der Schnitt der Fusspunktsfläche des Rotationsparaboloids mit der auf dem Zylinder senkrecht stehenden Ebene durch den Punkt P. Wegen dieses Senkrechtstehens schneidet diese Ebene den absoluten Kegelschnitt in jenen zwei Punkten, durch welche das Paar isotroper Erzeugenden des imaginären Kegels geht, in denen die zwei durch die Gerade e gehenden Berührungsebenen diesen Kegel berühren. Nicht nur die erwähnte Ebene durch den Pol P, sondern auch alle übrigen auf der Geraden e senkrechten Ebenen gehen durch dasselbe Punktepaar des absoluten Kegelschnittes. Sie werden daher den Berührungszylinder in Parabeln schneiden, deren Brennpunkte auf der Geraden e liegen. In diesen Punkten schneiden sich nämlich die Paare isotroper Tangenten dieser Schnittparabeln. Es ist daher ersichtlich, das der Brennpunkt jeder senkrechten Projektion des Paraboloids auf irgendeine Ebene mit der Normalprojektion E' des Punktes E auf diese Ebene identisch ist. Es ist ferner bekannt, dass sich der vierfache Brennpunkt jeder Fusspunktskurve einer Parabel im Hälftungspunkt der Entfernung des Pols P und des Brennpunkts dieser Parabel befindet. Verbinden wir daher unseren Pol P mit dem Punkt E, so wird sich der Hälftungspunkt F der Strecke EP senkrecht zu jeder Ebene des Punktes P in den vierfachen Brennpunkt der Schnittkurve dieser Ebene mit unserer Fusspunktsfläche projizieren. Schneiden wir weiter die Fusspunktsfläche mit einer Ebene des Punktes P und legen durch die Verbindungsgerade des vierfachen Brennpunktes des Schnittes und des Punktes F ein Paar imaginärer Ebenen so zwar, dass diese durch das Paar isotroper Tangenten dieser Schnittkurve gehen, so berühren diese Ebenen die Fusspunktsfläche in den absoluten Punkten der Schnittebene. Da dies für jede Ebene des Punktes P gilt, also auch für jede Gerade des

Punktes F, ist der Punkt F die reelle Spitze des imaginären Berührungskegels unserer Fläche längs des absoluten Kegelschnitts. Hieraus folgt unmittelbar, dass sich der vierfache Brennpunkt jedes ebenen Schnittes der Fusspunktsfläche des Rotationsparaboloids in der Normalprojektion des Punktes F auf die Schnittebene befindet, ebenso, wie das bei der Kugel der Fall ist. Hieraus folgt noch eine Reihe weiterer Analogien mit der Kugel.

In der auf der Verbindungsgeraden PF senkrechten Ebene des Punktes P wird sich die einzige reelle eigentliche Gerade der Fusspunktsfläche befinden. Die unendlichferne auf der Achse des Rotationsparaboloids senkrechte Gerade ist die zweideutige Gerade der Fusspunktsfläche, längs welcher diese von der durch die eigentliche Gerade gehende Ebene berührt wird.

Auf Grund dieser mit der Kugel in Analogie stehenden Eigenschaft der Fläche lassen sich weitere Eigenschaften der Fläche bezüglich ihrer strophoidalen Schnitte mit den Ebenen einer Geraden oder eines Punktes ableiten. Z. B. in jedem Ebenenbüschel gibt es vier Ebenen, die unsere Fläche in Strophoidalen oder Strophoiden schneiden. Ferner: alle Ebenen (∞^1) eines Ebenenbündels, die die Fläche in Strophoidalen oder Strophoiden schneiden, haben ihre vierfachen Brennpunkte auf einer sphärischen Raumkurve 4. Ordnung. Wählen wir den Pol P in der Ebene α, so befindet sich die Spitze F auf der Fusspunktsfläche. Es lässt sich leicht schliessen, dass eine solche allgemeine Fläche 3. Ordnung vier Nabelpunkte in ihrer Symmetralebene hat. Zwei davon fallen in die Spitze der Fläche, falls diese eine solche besitzt.