EXTRAIT 25/22

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R. P. DE SERBIE

ВЕСНИК

ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА НАРОДНЕ РЕПУБЛИКЕ СРБИЈЕ

II

3-4

БЕОГРАД 1950

KONSTRUKCIJA KUBNE ČUNJOSJEČNICE IZ KONJUGIRANO IMAGINARNIH TOČAKA

VILKO NIČE, Zagreb

Uvod: Prostorna kubna krivulja, koju zovemo i kubnom čunjosječnicom, definirana je prema Chaslesu kao proizvod triju projektivnih pramenova ravnina. Po tri pridružene ravnine, iz svakog pramena po jedna, sijeku se uvijek u jednoj točki kubne čunjosječnice. Od ova tri pramena prvi i drugi daju jednu pravčastu plohu 2. reda, a prvi i treći drugu takvu plohu. Ovim dvjema pravčastim plohama 2. reda zajednička je os prvog pramena, dok im je geometrisko mesto ostalih zajedničkih točaka naša kubna čunjosječnica. Kubnu čunosječnicu možemo prema tome definirati i kao presječnu krivulju dviju pravčastih ploha 2. reda, ako imaju jednu izvodnicu zajedničku. Ako se os prvog i drugog, ili prvog i drugog i prvog i trećeg pramena sijeku, onda jedna, odnosno obje pravčaste plohe 2. reda prelaze u stošče, koji imaju zajedničku os prvog pramena. Presječna krivulja tih stožaca, bez zajedničke izvodnice, je opet proizvod tih triju projektivno pridruženih pramenova ravnina. Budući da sve bisekante neke kubne čunjosječnice, koje prolaze jednom njenom točkom, čine stožac 2. reda, to svaku kubnu čunjosječnicu možemo smatrati presječnom krivuljom dvaju stožaca 2. reda, ako imaju jednu zajedničku izvodnicu. Ova činjenica nam vrlo zgodno služi za konstrukciju takvih krivulja, ako ih zadamo sa šest realnih točaka. Pomoću ovakvih stožaca provediva je ta konstrukcija i onda ako su jedan ili dva para zadanih šest točaka konjugirano imaginarna, na što ćemo se osvrnuti u toč. 1. Ako su međutim sva tri para točaka od zadanih šest konjugirano imaginarna, onda ovakva konstrukcija tako zadane kubne čunjosjednice zakazuje. U toč. 2. pokazat ćemo drugi način izvođenja kubne čunjosječnice, kojim ćemo se moći služiti kod konstrukcije te krivulje bez obzira, da li je ona zadana sa šest realnih točaka, ili tako da su među njima jedan, dva ili sva tri para konjugirano imaginarna.

1. Zadamo li kubnu čunjosječnicu sa šest točaka (realnih), tada se ona može konstruktivno izvesti kao presjek dvaju stožaca 2. reda s jednom zajedničkom izvodnicom ovako: Zadane točke označimo s A, B, C, D, E, i F. Spojnice AB, AC, AD, AE i AF neka su izvodnice jednog stošca 2. reda koji je njima i određen, a spojnice BA, BC, BD, BE i BF neka su izvodnice drugog takvog stošča. Presjek ovih dvaju stožaca sastoji se iz njihove zajedničke izvodnice AB (točke A, B su vrhovi tih stožaca) i kubne čunjosječnice, koja prolazi tim točkama. Presiječemo li oba stošca s nekom ravninom α, a obje dobivene čunjosječnice u toj ravnini uzmemo kao baze tih stožaca, tad je svaka ta baza određena s pet točaka. Kako se mogu te čunjosječnice nadopunjivati znademo [1], a prema tome znademo metodama nacrtne geometrije odrediti i presječnu kubnu čunjosječnicu tih stožaca.

Pretpostavimo sada, da je par točaka E, F konjugirano imaginaran. Učinimo li sve isto kao malo prije, bit će svaki od spomenutih stožaca određen s tri realne i jednim konjugirano imaginarnim parom izvodnica. Baze tih stožaca u ravnini α bit će čunjosječnice određene s tri realne i dvije konjugirano imaginarne točke. Kako se nadopunjuju ovako zadane čunjosječnice također znademo[1], a prema tome ćemo znati odrediti i presječnu kubnu čunjosječnicu tih stožaca, koja je određena s četiri realne i dvije konjugirano imaginarne točke.

Od zadanih sest točaka neka budu sada konjugirano imaginarni parovi E, F i C, D. Baze spomenutih stožaca u ravnini α bit će sada određene svaka s jednom realnom točkom i dva para konjugirano imaginarnih točaka. Svaki ovaj par konjugirano imaginarnih točaka, od obiju čunjosječnica, određen je kao dvostruke točke neke eliptičke involucije. Ove eliptičke involucije jedne baze u ravnini α neka se nalaze na pravcima m, n. Jedina realna točka te baze neka bude P, a sjecište pravaca m, n označimo s S. Spojnica s točaka pridruženih točki S u involucijama na pravcima m, n bit će polara točke S obzirom na traženu čunjosječnicu, jer su te točke u tim involucijama konjugirane točki S obzirom na tu čunjosječnicu. Spojimo li sada točku P, sa svim točkama involucije na pravcu m i sa svim točkama involucije na pravcu n, tada će ovako nastala dva kolokalna involutorna pramena imati dvije realne zrake zajedničke, koje će polaru s sjeći u dvije realne točke tražene čunjosječnice [2]. Kad bi naime našu gotovu i nacrtanu čunosječnicu presjekli s ta dva kolokalna involutorna pramena u dvije involucije na njoj, tad bi se spojnice pridruženih parova točaka obiju involucija na toj čunjosječnici sjekle za svaku involuciju u jednoj točki (centar involucije) na polari s. U sjecištima naše čunjosječnice s tom polarom nalazit će se prema tome par točaka, koje su međusobno pridružene u jednoj i drugoj involuciji, dakle njima prolazi zajednički par obaju kolokalnih involutornih pramenova vrha P. Konstrukcija ovakvog zajedničkog para konjugiranih zraka dvaju kolokalnih involutornih pramenova izvodi se vrlo jednostavno pomoću jedne kružnice, koja prolazi zajedničkim vrhom tih pramenova[1], a zamjenjuje zapravo naču gore spomenutu čunjosječnicu pri određivanju tih zajedničkih zraka. Odredivši par zajedničkih konjugiranih zraka u kolokalnim involutornim pramenovima vrha P, a na taj način i par daljnih realnih točaka i tangenata tražene čunjosječnice u ravnini α, znati ćemo tu čunjosječnicu daje nadopunjivati realnim točkama pomoću metode spomenute sprijeda. Na isti način nadopunjivat ćemo i drugu čunjosječnicu u ravnini α kao bazu drugog stošca, a prema tome ćemo isto kao malo prije izvesti i kubni presjek tih dvaju stožaca. Na taj smo način pokazali, kako se može konstruirati kubna čunjosječnica iz dvije realne i dva para konjugirano imaginarnih točaka.

Pretpostavimo li sada, da je osim parova točaka E, F i C, D konjugirano imaginaran i par A, B, tad nam iščezavaju oba realna vrha, a time i mogućnost konstruiranja naše kubne čunjosječnice kao presječne krivulje dvaju stožaca.

2. Parovi točaka AB, CD i EF na pravcima a, b, c neka budu sada bilo realni bilo konjugirano imaginarni. Točkama C, D, E, F postavimo pravce, koji neka budu usporedni s pravcem a. Od tih 5 pravaca uvijek

---

[1] Vidi Cit. pod [1]. str. 80.

[2] Vidi Cit. pod [2] str. 47—50,

je jedan (a) realan, jer prolazi točkama A, B, dok ostala dva para mogu biti realna ili konjugirano imaginarna. S ovih pet pravaca kao izvodnicama određen je neki valjak 2. reda, kojeg ostale izvodnice bi znali odrediti na temelju razmatranja u toč. 1. Nazovimo taj valjak (AB). Presjek njegov s nekom ravninom α bit će naime krivulja 2. reda određena s jednom realnom i dva bilo realna, bilo jedan ili oba konjugirano imaginarna para točaka. Postavimo li sada isto takav valjak kroz tih šest točaka, kojeg će izvodnice biti paralelne s pravcem b dakle valjak (CD), onda se ta dva valjka sijeku u jednoj prostornoj krivulji 4. reda I. vrste, koja sadržava svih šest zadanih točaka, tj. pravci a, b, c su joj bisekante. Postavimo konačno ovim točkama i valjak (EF) 2. reda, kojemu su izvodnice paralelne s pravcem c. Ovaj valjak siječe valjak (AB) također u jednoj prostornoj krivulji 4. reda I. vrste, koja također prolazi kroz svih šest zadanih točaka. Osim ovih šest točaka imaju obje prostorne krivulje 4. reda I. vrste na valjku (AB) još dalnje dvije zajedničke točke G, H, jer prva prostorna krivulja 4. reda I. vrste na valjku (AB) probija valjak (EF) u osam točaka. Ovih osam točaka A, B, C, D, E, F, G i H je prema tome osam asociiranih temeljnih točaka jednog svežnja ploha 2. reda[5], koji je određen valjcima (AB), (CD) i (EF). Valjci (CD), (EF) sijeku se također u jednoj prostornoj krivulji 4. reda I. vrste, koja sadržava svih osam asociiranih točaka. Spojnica GH je prema tome bisekanta svih triju prostornih krivulja 4. reda I. vrste. Siječemo li ravninama jedne bisekante neke prostorne krivulje 4. reda I. vrste ovu krivulju u daljnje dvije točke, onda spojnice takvih dviju točaka daju još jednu bisekantu te krivulje u svakoj takvoj ravnini. Sve ovakve bisekante neke prostorne krivulje 4. reda I. vrste, koje sijeku jednu njenu bisekantu izvan njenih točaka na toj krivulji (osim u tangencijalnim ravninama te krivulje položenih tom bisekantom), čine jednu pravčastu plohu 2. reda[1]. Bisekanta GH određuje takvu jednu pravčastu plohu 2. reda sa svakom od spomenute tri prostorne krivulje 4. reda I. vrste. Svaka ova ploha prolazi pravcem GH, kao i točkama A, B, C, D, E i F. Po dvije od navedene tri ovakve pravčaste plohe 2. reda sjeći će se prema tome u pravcu GH i nekoj prostornoj krivulji 3. reda, koja prolazi točkama A, B, C, D, E i F. Budući da je tima točkama određena samo jedna prostorna krivulja 3. reda, to ćemo dobiti uvijek istu prostornu krivulju 3. reda, bez obzira koje dvije uzeli između spomenutih triju pravčastih ploha 2. reda, koje prolaze pravcem GH. U našim razmatranjima nismo uzimali u obzir jesu li točke A, B, C, D, E i F realne, ili u parovima konjugirano imaginarne. Vidimo dakle, da ovakvim postupkom možemo riješiti sve četiri moguće varijante konstruiranja prostorne kubne čunjosječnice obzirom na realnost ili imaginarnost zadanih šest točaka.

LITERATURA

[1] Vesnik društva mat. i fiz. N.R. Srbije br. 3—4. Str. 76.

[2] *K. Doehlemann*: Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung (1924), Bd. II., str. 56 (Sammlung Göschen, 876).

[3] *Th. Reye*: Die Geometrie der Lage (1910), Th. III, str. 136.

---

[1] Cit. pod. [3], str. 35.

CONSTRUCTION D'UNE CUBIQUE GAUCHE À L'AIDE DES POINTS IMAGINAIRES CONJUGUÉS

Par V. NICE, Zagreb.

RÉSUMÉ

Une cubique gauche étant donnée par six points A, B, C, D, E, F on peut la construire comme l'intersection de deux cônes du 2e ordre. Les, génératrices sont EA. EB, EC, ED, EF et FA, FB, FC, FD, FE. La construction peut être effectuée si la paire de points E, F au moins est réelle. Comme la droite EF est une génératrice des deux cônes, l'intersection sera une cubique gauche. Un plan quelconque α coupe ces cônes en coniques nous considérons comme bases des cônes. Si le génératrices sont réelles, les coniques sont données par cinq points rèels et la construction des coniques et aussi de la cubique gauche peut être effectuée.

Si deux des points sont imaginaires conjugués, les coniques sont données par trois points réels et deux points imaginaires. Si deux paires des points sont imaginaires conjuguées, les coniques sont données par un point réel et deux paires de points imaginaires conjugués. Ici encore on connait la construction des bases et la construction de la cubique d'intersection est possible. Au cas òu toutes les trois paires de points sont imaginaires conjuguées ce procédé est en défaut, car il n'y a aucun point réel qu'on puisse prendre comme sommet de cône.

Soit a la droite de jonction AB, b la droite CD, c la droite EF. Les paires de points AB, CD, EF peuvent être réelles ou imaginaires conjugées. Soit (AB) le cylindre du 2e ordre passant par la droite a et les points C, D, E, F, De meme (CD) sera le cylindre passant par b et les points A, B, C, D, E, F et (EF) le cylindre passant par c et A, B, C, D. Ces trois cylindres ont en commun huit points associés qui sont les points fondamentaux d'un buisson de quadriques contenant ces trois cylindres. Ce sont les points A, B, C, D, E, F et, de plus, une paire de points G, H. Les cylindres (AB), (CD) se coupent en une courbe gauche du 4e ordre de la Ire espéce, et les cylindres (AB), (EF) en une autre courbe du même ordre et de la même espece. Ces deux courbes passent par les huit points associés. Étant donnée une bissécante d'une courbe gauche du 4e ordre de la Ire espèce on peut considérer les deux points d'intersection d'un plan quelconque de cette bissécante avec la courbe donnée. Le droite de jonction de toutes les paires de points ainsi obtenue forment, comme on sait, une surface réglée du 2e ordre. Soit GH cette bissécante donnée, la courbe d'intersection des cylindres (AB), (CD) fournit une surface réglée et la courbe d'intersection des cylindres (AB), (EF) en fournit une autre. Ces deux surfaces réglées du 2e ordre passent par les points A, B, C, D, E, F. et elles contiennent la droite GH. La courbe d'intersection de ces deux surfaces sera donc la droite GH et une cubique gauche passant par les points A, B, C, D, E, F. Ce résultat est indenpendant de la réalité des points G, H peuvent être obtenus comme intersection des trois cylindres (AB), (CD), (EF).