Serija II. · T. 4. · Zagreb 1949. · No. 4 POSEBAN OTISAK

GLASNIK matematičko-fizički i astronomski · PERIODICUM mathematico-physicum et astronomicum

Dr. Vilko Niče, Zagreb

JEDAN DOKAZ I NADOPUNA P. APPELOVA STAVKA O PLÜCKEROVU KONOIDU

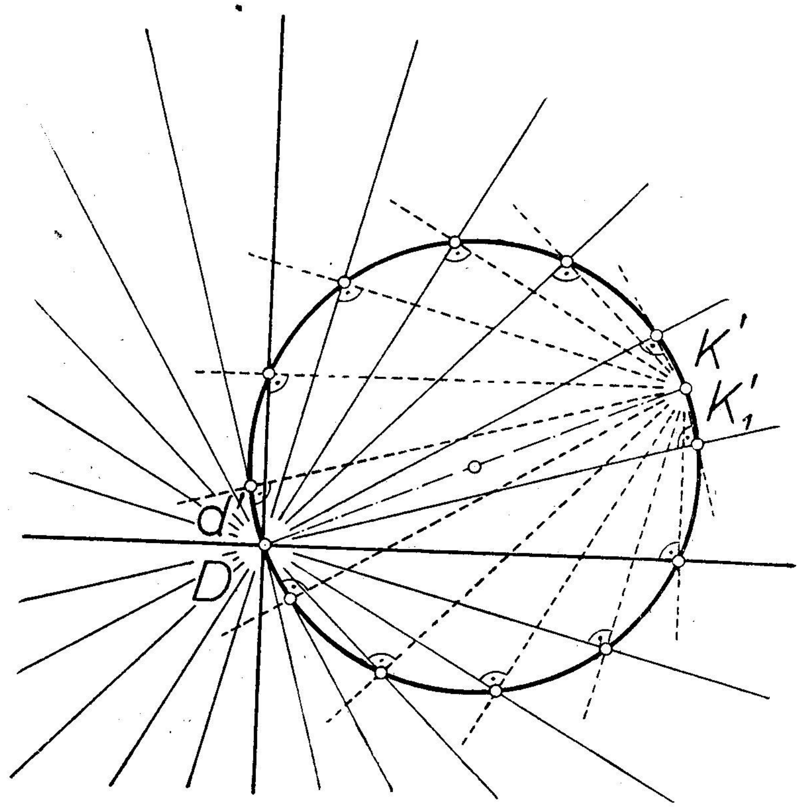
U svojoj radnji »Propriété caractéristique du cylindroïde«[1]) dokazao je P. Appell, da je Plückerov konoid jedina pravčasta ploha (ne ravninska ili valjkasta), kojoj su sve nožišne krivulje ravninske. Da su ove ravninske krivulje na takvom konoidu sve njegove elipse, izvodi se vrlo jednostavno[2]), a time se ujedno dobiva i poznata 5. definicija toga konoida. Svakoj točki u prostoru kao polu odgovara jedna nožišna krivulja na tom konoidu, t. j. jedna njegova elipsa. Budući da taj konoid ima ∞^1 izvodnica, a svakom izvodnicom možemo položiti ∞^1 ravnina, koje taj konoid (3. reda) sijeku u elipsama, vidimo da na njemu ima ∞^2 elipsi. Svaka ova elipsa može prema tome biti nožišna krivulja ne za jedan, nego za ∞^1 polova u prostoru, jer svih točaka (polova) u prostoru ima ∞^3. Dokazujući sintetično geometrijskim putem Appellov stavak, proširit ćemo ga tako, da potražimo geometrijsko mjesto svih polova, koji imaju zajedničku nožišnu elipsu.

Uzmemo li u prostoru neki pravac d i jednu elipsu koja ga siječe tako, da ta elipsa i taj pravac d leže na jednom uspravnom kružnom valjku, onda svi pravci, koji sijeku tu elipsu i taj pravac, ali pravac okomito, čine izvodnice Plückerova konoida. Projiciramo li sve te izvodnice u smjeru pravca d, koji je dvostruk na tom konoidu, na jednu na njemu okomitu ravninu α, dobit ćemo u njoj pramen pravaca, kojeg će zrake biti paralelne s tim izvodnicama u prostoru. Torzalni pravci (u kojima dvije izvodnice padaju skupa) imat će međusobno okomite projekcije, jer su oni i u prostoru međusobno okomiti. Parovi izvodnica koje se sijeku, imat će projekcije simetrično smještene prema projekcijama torzalnih pravaca. Na našoj slici

[1]) Izašla u Bull. societ. mathem. France, 28 (1900).

[2]) Vidi dr. E. Müller: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III. (Konstruktive Behandlung der Regelflächen, bearb. von dr. J. L. Krames, 1931.), str. 221.

prikazana je takva projekcija Plückerova konoida, uzevši da se ravnina α poklapa s ravninom slike.



Neka je bilo gdje u prostoru zadana neka točka K. Postavimo li njome okomite ravnine na sve izvodnice našeg Plückerova konoida, onda sva tako nastala sjecišta čine nožišnu krivulju pola K. Sve ovakve ravnine okomite su na ravninu slike, jer su izvodnice konoida paralelne s tom ravninom, a prema tome čine one jedan pramen ravnina. Te će ravnine biti predočene na ravnini slike pravcima, koji prolaze projekcijom K' točke K okomito na projekcije izvodnica. Označimo li projekciju d' pravca d s D, onda će projekcija nožišne krivulje pola K, u smjeru pravca d na ravninu slike, biti kružnica, kojoj je dužina DK' promjer. Sama nožišna krivulja u prostoru bit će prema tome prodorna krivulja našeg konoida s uspravnim kružnim valjkom, kojemu je ta kružnica baza. Ta krivulja bit će općeno 6. reda, jer je Plückerov konoid 3. reda. Naš spomenuti prodorni valjak prolazi međutim dvostrukim pravcem d konoida, dakle ta krivulja ne može biti viša od 4. reda. Poznata je činjenica, da Plückerov konoid ima u neizmjernosti par izotropnih izvodnica, koje se sijeku u neizmjerno dalekoj točki dvostrukog pravca d. Naš prodoran uspravan kružni valjak ima također u neizmjernosti par izotropnih izvodnica, koje se sijeku u istoj neizmjerno dalekoj točki (dvostruki pravac d je izvodnica tog valjka). Ovaj izotropni par izvodnica je prema tome zajednički par izvodnica i konoida i valjka, a prema tome i sastavni dio naše prodorne, odnosno nožišne krivulje pola K. Vidimo dakle, da se je ova nožišna krivulja reducirala na krivulju 2. reda, dakle ravninsku krivulju. Jer se ta krivulja nalazi na Plückerovu konoidu, može ona biti samo elipsa, a time je dokazan Appellov stavak.

Uzmimo sada neki novi pol K_1 točno iznad ili ispod prvog pola K tako, da se njegova projekcija K_1' poklapa s projekcijom K'. Odmah se vidi, da se na našoj slici, kao i u prostoru, ništa ne mijenja, budući da je pramen okomitih ravnina točke K identičan s takvim pramenom točke K_1, t. j. pol K_1 ima istu nožišnu krivulju kao i pol K, bez obzira gdje se on nalazi na vertikali paralelnoj s pravcem d, položenoj polom K. Direktno odavle proizlazi nagoviješteno proširenje Appellova stavka:

Geometrijsko mjesto ∞^1 polova, koji imaju zajedničku nožišnu elipsu na Plückerovu konoidu, nalazi se na pravcu, koji je paralelan s njegovim dvostrukim pravcem, a prolazi dijametralnom točkom te nožišne elipse, obzirom na njeno sjecište s dvostrukim pravcem.

RÉSUME

Démonstration et complément d'un théorème concernant le conoïde de Plücker

Par Dr. Vilko Niče

On donne une démonstration synthétique du théorème d'Appell sur les courbes pédales du conoïde de Plücker et on complète ce théorème en indiquant le lieu géométrique des pôles ayant une ellipse pédale commune sur ce conoïde. Ce lièu géométrique se trouve sur une droite parallèle à la droite double du conoïde. Ces deux droites passent par deux points diametraux de l'ellipse pédale.