Dr. VILIM NIČE

O STROFOIDALI I PROSTORNOJ KRIVULJI 4. REDA NA KUGLI

(S 1 SLIKOM)

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

ZAGREB 1949.

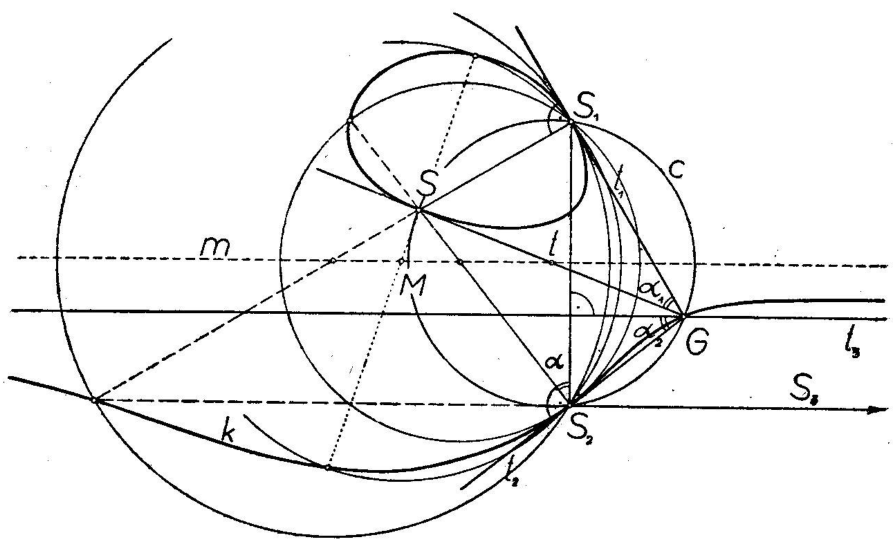
O STROFOIDALI I PROSTORNOJ KRIVULJI 4. REDA NA KUGLI

Uvod: Odaberimo u ravnini po volji tri točke S, S_1 i S_2, a točkama S_1, S_2 neka je određen pramen kružnica $(S_1 S_2)$. Točka S neka je vrh pramena pravaca, koji je projektivno pridružen pramenu $(S_1 S_2)$ kružnica tako, da svaka zraka prolazi središtem njoj pridružene kružnice. Proizvod ovih dvaju pramenova bit će cirkularna krivulja 3. reda roda prvoga, ako točke S_1, S_2 ne padaju skupa, kojoj je točka S četverostruki fokus[1]. Uz realan par rastavljenih točaka S_1, S_2 raspada se ovakova krivulja u dva dijela. K. van Rees nazvao je ovu krivulju fokalnom krivuljom, dok ju M. Lagrange zove strofoidalom, a tako ćemo je i mi zvati. Ovom krivuljom bavilo se osim spomenutih i dosta drugih matematičara, kao Chasles, Schröter, Durège, J. Steiner i drugi, koji su otkrili mnogo njenih osobina, po kojima se ona razlikuje od ostalih cirkularnih krivulja 3. reda. Postoje međutim još neka njena zanimljiva svojstva, koja spomenuti pisci, čini se, nisu zapazili, ili ne barem u ovakvom obliku, a koja ćemo mi u ovoj radnji izvesti pomoću vrlo jednostavnih sredstava. Kao specijalan slučaj ovakve krivulje javljaju se strofoide, pa će naša razmatranja biti prenesena i na te krivulje. Svaku cirkularnu krivulju 3. reda možemo smatrati stereografskom slikom neke prostorne krivulje 4. reda na kugli. Na temelju toga prenest ćemo nađene osobine i na kugline prostorne krivulje 4. reda.

1. Uzmimo u uvodu spomenute točke S, S_1 i S_2 kao zadane nosioce spomenutih pramenova. Na simetrali m dužine $S_1 S_2$ nalaze se središta svih kružnica pramena $(S_1 S_2)$. Povučemo li točkom S bilo koju zraku i njome presiječemo pravac m u točki M, tada kružnica, koja prolazi točkama S_1, S_2, a središte joj je u točki M, siječe tu zraku u točkama naše strofoidale k (vidi sliku). Poznata je činjenica, da se točke S, S_1 i S_2 nalaze na toj krivulji. Uzmemo li u pramenu kružnica $(S_1 S_2)$ onu kružnicu c, koja prolazi točkom S, tada će se u točki S, na pridru-

[1] G. Loria: Spezielle algeb. und transc. ebene Kurven, Bd. I., str. 35.

ženoj zraci ove kružnice, nalaziti dvije točke krivulje k. Kružnici c u pramenu $(S_1 S_2)$ pridružena je zraka t u pramenu pravaca (S), pa će prema tome ta zraka biti tangenta krivulje k u točki S. Treću točku krivulje k na toj zraci t označimo s G. Zraka t siječe prema tome krivulju k u točki G i tangira u točki S. Povucimo točkom S tangente na krivulju k. Osim jednog para običnih imaginarnih tangenata postoji tu i par izotropnih tangenata[2], t. j. ove posljednje imaginarne tangente diraju krivulju k u apsolutnim točkama ravnine. Dirališe jedne



tangente, povučene iz točke G na krivulju k, mora također ležati na tom neizmjerno dalekom pravcu, jer to izlazi iz poznate činjenice: Ako neki pravac siječe krivulju 3. reda u tri realne točke, a iz ovih povučemo tangente na tu krivulju, tada po tri dirališta ovih tangenata leže opet na jednom pravcu[3]. U našem smo slučaju krivulju presjekli pravcem t u tri točke, od kojih dvije padaju zajedno u točki S, a treća je točka G. Prvim dvjema povučene su izotropne tangente s diralištima u apsolutnim točkama ravnine, dakle mora po upravo navedenom stavku i dirališe jedne tangente, povučene iz točke G, imati svoje diralište u neizmjerno dalekom pravcu ravnine. Iz toga izlazi, da je ova tangenta t_3 asimptota, dakle je točka G

[2] G. Loria: Cit. pod 1), str. 34.
[3] H. Durège: Die ebenen Curven dritter Ordnung, čl. 383., str. 210.

glavna točka[4] krivulje k. Budući da se neizmjerno daleka točka krivulje k nalazi na onoj zraci pramena (S), koja je okomita na spojnici $S_1 S_2$ (pravac je $S_1 S_2$ naime kružnica pramena $(S_1 S_2)$, kojoj je središte neizmjerno daleko); tada mora biti i $t_3 \perp S_1 S_2$, t. j. $t_3 \parallel m$.

Produžimo li spojnicu $S_1 S$ do pravca m, a ovo sjecište uzmemo kao središte nove kružnice u pramenu $(S_1 S_2)$, tada u točki S_1 ima ova kružnica i krivulja k dvije točke zajedničke, t. j. tangenta t_1 ove kružnice je i tangenta krivulje k u toj točki. Budući da je $t_1 \perp S_1 S$, a dužina SG promjer kružnice c, to mora i tangenta t_1 krivulje k u točki S prolaziti točkom G. Posve analogno prolazi točkom G i tangenta t_2 krivulje k u točki S_2. Točkom G idu dakle četiri tangente krivulje k, naime t, t_1, t_2, t_3, pa zato njihova dirališta S, S_1, S_2 i neizmjerno daleka točka S_3 krivulje k čine točki G pridruženu četvorku korespondentnih točaka (Punktquadrupel)[5].

Za ovakvu četvorku točaka izvest ćemo sada jednu njihovu osobinu, koja će nam kasnije trebati. Znamo, da tangente krivulje u točkama neke četvorke korespondentnih točaka prolaze jednom i istom točkom G te krivulje. Spojimo po dvije točke ovakve četvorke i presijecimo tima dvjema spojnicama našu krivulju k u točkama L_1, L_2. Iz poznatih svojstava krivulja 3. reda proizlazi, da će tangente krivulje k u točkama L_1, L_2 prolaziti sjecištem te krivulje s njenom tangentom u točki G. Točke L_1, L_2 mogu biti ili obje na ovalu ili obje na beskonačno dugom dijelu krivulje k. Radi šest mogućih spojnica postoje tri ovakva para točaka L_1, L_2, od kojih je uvijek jedan na beskonačno dugom dijelu, a dva na ovalu. Budući da je za svaku realnu četvorku korespondentnih točaka točka G uvijek na beskonačno dugom dijelu, a na tome se dijelu nalazi i sjecište krivulje k s njenom tangentom u točki G, to svaki par točaka L_1, L_2 mora biti jedna i ista točka. Iz svake točke na beskonačno dugom dijelu krivulje možemo naime povući samo dvije tangente na oval i samo dvije tangente na beskonačno dugi dio te krivulje, a ne četiri odnosno tri, kako bi to bilo, kada bi točke L_1, L_2 bile rastavljene. Vidimo dakle, ako točke neke četvorke korespondentnih točaka u parovima spojimo, tada se tri dobivena međusobna sjecišta tih spojnica nalaze na toj krivulji. Ovu činjenicu spominje već i J. Steiner, ali bez dokaza.

Označimo na našoj slici kutove, što ih čine pravci $t_1 t$, $t_3 t_2$ i kut $S_1 S_2 S$ s α_1, α_2 i α. Budući da je $SS_2 \perp t_2$ i $S_1 S_2 \perp t_3$, izlazi,

[4] G. Loria: Cit. pod 1), str. 33.
[5] H. Durège: Cit. pod 3), čl. 378, str. 207.

da je $\alpha_2 = \alpha$. A kako se vrhovi S_2, G nalaze na istoj kružnici, kojoj je SS_1 tetiva, izlazi, da je $\alpha_1 = \alpha$. Odavle konačno proizlazi, da su kutovi α_1, α_2 jednaki.

K. van Rees, a kasnije i J. Steiner našli su, da se ovakve krivulje k mogu definirati i kao geometrijsko mjesto točaka, iz kojih se dvije zadane dužine vide pod jednakim kutovima[6]. Uzme li se u račun i suplementni kut, tada je pokazao J. Steiner, da postoje dvije takve krivulje.

Već iz definicije ovakvih krivulja po K. van Reesu i Steineru izlazi, da su u krajnjim točkama ovakvih dužina određene i njihove tangente u tim točkama, a na njima se nalaze i sva tri sjecišta parova spojnica u parovima spojenih zadanih četiriju krajnjih točaka, jer i ta sjecišta zadovoljavaju definiciju. Iz jednakosti kutova $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ kao i činjenice da točke S, S_1, S_2 i S_3 čine četvorku korespondentnih točaka izlazi, da sve navedeno vrijedi i za našu krivulju k odnosno njene točke S, S_1, S_2, S_3. Naša krivulja k je prema tome i geometrijsko mjesto točaka, iz kojih će se obje dužine omeđene točkama S, S_1, S_2, S_3 vidjeti pod jednakim kutovima, jer se spomenuto geometrijsko mjesto kao krivulja podudara s krivuljom k u više od devet točaka.

Uzmemo li prema tome dužine SS_1 i S_2S_3 kao zadane, tada možemo našu krivulju k shvatiti i kao geometrijsko mjesto točaka, iz kojih će se ove dvije dužine vidjeti pod jednakim kutovima.

Znamo, da točke S, S_1, S_2 i S_3 čine četvorku korespondentnih točaka krivulje k, pridruženih točki G na toj krivulji, a za svaku četvorku ovakvih točaka postoji ovaj poznati stavak: Ako iz neke točke krivulje 3. reda povučemo sve četiri tangente na tu krivulju, a četiri dobivena dirališta spojimo s bilo kojom točkom te krivulje, tada ove spojnice sijeku krivulju u takve dalje četiri točke, da će njene tangente u tim točkama prolaziti opet jednom točkom te krivulje[7]. Spojimo li prema tome bilo koju točku K krivulje k s točkama S, S_1, S_2, S_3, i tim spojnicama presiječemo krivulju k, tada nastala četiri sjecišta čine opet četvorku korespondentnih točaka pridruženih nekoj točki na krivulji k. Putujemo li neprekinuto s točkom K po krivulji k, dobit ćemo svih ∞^1 četvorki korespondentnih točaka na ovoj krivulji. Realne četvorke korespondentnih točaka daju uvijek njima pridruženu točku G (njom prolaze tangente krivulje u tim točkama), koja se nalazi na onom dijelu naše dvodijelne

---

[6] J. Steiner: Gesam. Werke, Bd. II., str. 487.

[7] H. Durège: Cit. pod 3), str. 210.

krivulje k, na kojoj se nalazi njena realna neizmjerno daleka točka. Nazovimo ovaj dio krivulje k njenim beskonačno dugim dijelom. Na ovom dijelu nalaze se uvijek dvije točke svake realne četvorke, dok se preostale dvije nalaze na ovalu krivulje.

Na temelju malo prije spomenutog stavka smo vidjeli, da se iz naše četvorke S, S_1, S_2, S_3 korespondentnih točaka može dobiti svih ∞^1 takvih četvorki N, N_1, N_2, N_3 na našoj krivulji. Neka je jedna takva četvorka nastala pomoću neke točke K iz točaka S, S_1, S_2, S_3. Potražimo li sada geometrijsko mjesto točaka, iz kojih će se dužine NN_1, N_2N_3 vidjeti pod jednakim kutovima, to će se na toj krivulji sigurno nalaziti točke N, N_1, N_2, N_3 i K, kao i apsolutne točke ravnine. Spojimo li točke N, N_1, N_2, N_3 u parovima, tada se i sva tri sjecišta tih šest spojnica nalaze na toj krivulji, jer se spomenute dužine i iz tih sjecišta vide pod jednakim kutovima. Ali ovih deset točaka nalazi se i na našoj krivulji k, dakle je to jedna i ista krivulja, jer je isključena i mogućnost pramena takvih krivulja, kao kada bi ova bila određena samo sa devet točaka.

Što vrijedi za četvorku točaka S, S_1, S_2, S_3 vrijedi prema tome i za svaku drugu realnu četvorku korespondentnih točaka na krivulji k. Možemo dakle za našu krivulju k napisati ovaj stavak:

Spojimo li parove točaka neke četvorke korespondentnih točaka na strofoidali u dvije dužine, tada se ove dužine vide pod jednakim kutovima iz svake točke ove krivulje.

Ovaj stavak zapravo je već poznat u drugom obliku nekim starijim autorima (na pr. H. Schröteru), ali izveden i izrečen na ovaj način vodi nas on direktno do novog, dosada čini se nezapaženog stavka. Budući da naše dužine mogu biti i tako postavljene, da se jedna nalazi u ovalu, a druga u beskonačno dugom dijelu, a te se vide pod jednakim kutovima iz svake točke beskonačno dugog dijela, dakle i iz one točke G, u kojoj se sastaju tangente te krivulje u točkama četvorke, izlazi odavle eto i naš nagoviješteni stavak, koji je zapravo već sadržan u gornjem stavku:

Oba dijela dvodijelne strofoidale vide se iz svake točke njena beskonačno dugog dijela pod jednakim kutovima.

2. Odaberemo li pramen kružnica (S_1 S_2) u toč. 1. tako, da ove dvije točke padnu skupa, t. j. sve kružnice ovog pramena imaju zajedničku tangentu i dirалište, tada ovakav pramen kružnica i pramen pravaca (S), projektivno pridruženi na opisani način, daju kosu strofoidu[8]. Ako se točka S nalazi na

[8] H. Wieleitner: Spezielle ebenen Kurven, (Sam. Schub. LVI), str. 38.

spomenutoj zajedničkoj tangenti, onda je nastala strofoida uspravna. Vidimo dakle, da su strofoide samo specijalni slučajevi strofoidale. Od četiri tangente ove krivulje, povučene iz neke točke na toj krivulji, padaju dvije skupa, t. j. kod strofoida prelaze u spojnicu s dvostrukom točkom, jer dvostruka točka je ono mjesto, koje dijeli oval od beskonačno dugog dijela ove krivulje.

Na temelju dosadašnjih naših izvoda i zaključaka kod strofoidale možemo prema tome i za kosu i za uspravnu strofoidu napisati ovaj stavak:

Spojnica svake točke uspravne ili kose strofoide s njenom dvostrukom točkom raspolavlja kut tangenata ove strofoide povučenih ovom točkom.

Odavle direktno izlazi i poznata činjenica, da su tangente strofoida u dvostrukoj točki međusobno okomite.

Definiramo li strofoidalu kao geometrijsko mjesto točaka, iz kojih se dvije zadane dužine vide pod jednakim kutovima, tada će ova krivulja prijeći u strofoidu, ako zadane dužine imaju jednu zajedničku krajnju točku. Strofoidu možemo prema tome definirati i ovako:

Strofoida je geometrijsko mjesto točaka, iz kojih se dvije iste stranice nekog zadanog trokuta vide uvijek pod jednakim kutovima.

Parovi konjugiranih točaka na nekoj krivulji 3. reda roda nultoga su dirališta tangenata ove krivulje povučenih iz točaka te krivulje. Ovi parovi analogni su četvorkama korespondentnih točaka na krivuljama 3. reda roda prvoga. Primijenimo li naša dosadašnja razmatranja na strofoidali u toč. 1. na obične strofoide, u vezi s parovima njenih konjugiranih točaka, tada za ove možemo izreći i ovaj stavak:

Spojimo li bilo koji par konjugiranih točaka strofoide s bilo kojom njenom točkom, tada spojnica ove točke s dvostrukom točkom te strofoide raspolavlja uvijek nastali kut.

Iz ovoga stavka izlazi poznata činjenica, da tangente ovih krivulja u dvostrukoj točki raspolavljaju oba kuta, što ga čine spojnice svakog para konjugiranih točaka s dvostrukom točkom. Ove su među sobom okomite tangente dvostruke zrake involutornog pramena zraka, što ga čine spojnice dvostruke točke s parovima konjugiranih točaka.

O strofoidama postoji obilna literatura, naročito starijeg datuma, pa su opisana svojstva tih krivulja bila po svoj prilici poznata nekim autorima. No njihov je put do otkrića bio vjerojatno različit od našega, a za nas su izvedena svojstva od osobitog značenja upravo zato, što smo ih na tim krivuljama izveli kao na specijalnom slučaju strofoidale. Da je strofoidala zapravo posve općena strofoida, našao je već M. Lagrange.

3. Rezultate naših razmatranja na strofoidama i strofoidalama u toč. 1. i 2. prenest ćemo sada i na neke prostorne krivulje 4. reda. Na ravnini naše krivulje k postavimo kuglinu plohu tako, da ona stoji upravo na točki S naše slike. Dijametralno iznad točke S postavljenu točku O na toj kugli uzmimo kao središte stereografske projekcije ove kugle na ravninu krivulje k. Projiciramo li krivulju k iz točke O na ovu kuglu, tada će nastala krivulja na kugli biti prostorna krivulja 4. reda (ciklična krivulja). Realna neizmjerno daleka točka krivulje k projicira se u točku O. Može se vrlo jednostavno pokazati, da ova krivulja može nastati i kao potpuni prodor s jednoplošnim hiperboloidom, koji je nastao kao proizvod dvaju projektivnih svezaka ravnina, kojima su osi spojnica SO i spojnica slika točaka S_1, S_2 na kugli. Kružnice pramena $(S_1 S_2)$ možemo smatrati stereografskim slikama presječnih kružnica kugle s ravninama ovoga drugog sveska, dok su pravci točke S stereografske slike presječenih kružnica kugle s ravninama sveska osi SO.

Poznato je, da se ciklična krivulja 4. reda na kugli projicira stereografski u cirkularnu krivulju 3. reda onda, ako je centar projiciranja na toj cikličnoj krivulji. Uzmimo na našoj kuglinoj plohi neku drugu cikličnu krivulju 4. reda, koja prolazi točkom O, ali ne i dijametralnom točkom S. Njena stereografska projekcija na ravninu krivulje k bit će opet neka cirkularna krivulja 3. reda k_1. Promjer OS naše kugle ima smjer konjugiran (okomit) smjeru ravnine naših slika s obzirom na našu kuglu, dakle imaginarni par tangencijalnih ravnina kugle, postavljen promjerom OS, dira tu kuglu u apsolutnim točkama te ravnine. Tim apsolutnim točkama prolaze i naše cirkularne krivulje k i k_1, dakle će izotropne presječnice naše ravnine slike s parom spomenutih imaginarnih tangencijalnih ravnina kugle morati biti tangente krivulja k i k_1 u apsolutnim točkama, t. j. stereografska slika točke S je četverostruki fokus krivulje k. Odavle izlazi, da se dijametralna točka centra projiciranja O projicira stereografski uvijek u četverostruki fokus projicirane cirkularne krivulje 3. reda. Taj fokus bit će na krivulji k_1, odnosno k, samo onda, ako ciklična krivulja 4. reda na kuglinoj plohi prolazi i dijametralnom točkom centra O (u našem slučaju točkom S). Vidimo dakle, da će se neka prostorna krivulja 4. reda na kugli moći stereografski projicirati samo onda u strofoidalu ili strofoidu (ako ima dvostruku točku), ako središtem projiciranja na toj kugli i krivulji prolazi jedna takva njena bisekanta, koja prolazi i središtem kugle. Ovakve bisekante mogu postojati samo dvije[9], dakle na svakoj prostornoj krivulji 4. reda na nekoj kugli postoje najviše dva para točaka, iz kojih se ta krivulja može stereografski projicirati u strofoidalu ili strofoidu, ako ta ciklična krivulja ima dvostruku točku.

Svaka bisekanta ove prostorne krivulje na kugli, koja prolazi točkom O, daje na našoj strofoidali k jednu točku, a tangencijalne ravnine te prostorne krivulje, položene ovom bisekantom, sijeku ravninu krivulje k u njenim tangentama. Budući da stereografska projekcija preslikava konformno, bit će jednaki kutovi, u kojima tangencijalne ravnine prostorne krivulje, položene jednom bisekantom točke O, sijeku tangencijalnu ravninu kugle i ravninu krivulje k u njenim probodištima. Kako se oba dijela strofoidale vide pod jednakim kutovima iz svake točke samo njezina beskonačno dugog dijela, a centar O se strereografski projicira u neizmjerno daleku točku, možemo na temelju naših razmatranja na strofoidali, kao i na prostornoj krivulji 4. reda na kugli, za te posljednje napisati ovaj stavak:

Na prostornoj krivulji 4. reda na nekoj kugli, koja se sastoji iz dva dijela, mogu postojati najviše dva para ovakvih točaka: Parovi tangencijalnih ravnina na oba dijela ovakve krivulje, položenih bilo kojom bisekantom, koja prolazi jednom od spomenute četiri točke i siječe isti dio krivulje, sijeku obje tangencijalne ravnine kugle u probodištima tih bisekanata u pravcima, koji su krakovi jednakih kutova.

Iz dosadašnjih razmatranja očito izlazi, da ove točke u parovima leže na promjerima kugle.

Ako prostorna krivulja 4. reda na kugli ima dvostruku točku, njena će stereografska projekcija iz spomenutih točaka biti strofoida. Na temelju onoga, što smo naprijed kazali za strofoide, možemo izreći još i ovaj stavak:

Na prostornoj krivulji 4. reda na nekoj kugli, koja ima dvostruku točku, mogu postojati najviše dva para ovakvih točaka: Tangencijalne ravnine položene na tu krivulju bilo kojom bisekantom ovakve točke, koja siječe tu krivulju na istom dijelu (oba dijela rastavlja dvostruka točka), sijeku tangencijalne ravnine kugle u probodištima te bisekante u pravcima, koji su krakovi jednakih kutova, koje uvijek raspolavljaju presječnice tih ravnina s ravninom te bisekante i dvostruke točke.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 18. V. 1948.)

[9] Th. Reye: Die Geometrie der Lage, Abt. III., str. 34.

EXTRAIT DE »RAD« DE L'ACADÉMIE YOUGOSLAVE,
TOME 276, PP. 109-116

VILIM NIČE

SUR LA STROPHOÏDALE ET LA COURBE GAUCHE CYCLIQUE DU 4e ORDRE

La courbe circulaire connue du 3e ordre et du genre 1 qui a son foyer quadruple sur soi-même, a été découverte par K. van REES comme courbe focale d'un système particulier de coniques, tandis que plus tard M. LAGRANGE la traitait comme strophoïde généralisée, en l'appelant strophoïdale. Bien des auteurs, les anciens plutôt, se sont occupés des intéressantes propriétés de cette courbe qui se distingue visiblement des autres courbes circulaires du 3e ordre. Cependant, cette courbe jouit encore d'autres propriétés, inaperçues de ces auteurs, à ce qu'il paraît, au moins sous la forme déduite dans ce travail. On verra qu'on obtient, par des moyens simples, ces nouvelles propriétés de celles qui sont connues.

Soient S, S_1 et S_2 trois points choisis arbitrairement, S étant le centre d'un faisceau de droites, tandis que S_1 et S_2 déterminent un faisceau de cercles. Si l'on adjoint à chaque cercle la droite passant par son centre, on obtient comme produits de ces faisceaux projectifs une strophoïdale ayant le point S comme foyer quadruple. Si les points S_1 et S_2 sont confondus, la strophoïdale dégénère en une strophoïde. Les tangentes t, t_1 et t_2 menées par les points S, S_1 et S_2 passent par le point principal G de la courbe, de sorte que ces trois points S, S_1 et S_2 avec le point à l'infini S_3 forment le quadruple connu de points correspondants adjoint au point tangentiel G. Outre cela on démontre dans ce travail l'égalité des angles formés par les tangentes t et t_1 et par la tangente t_2 et l'asymptote t_3.

D'après K. van REES et J. STEINER on définit cette strophoïdale comme lieu géométrique des points ayant le même angle parallactique par rapport à deux vecteurs donnés.

En tenant compte, de plus, du fait que les droites de jonction d'un point quelconque d'une courbe du 3e ordre avec les points correspondants d'un quadruple donnent comme points d'intersection avec la courbe

Le titre original de ce travail: *O strofoidali i prostornoj krivulji 4. reda na kugli.*

un nouveau quadruple et que la courbe contient les points d'intersections des paires de droites de jonction des points, pris deux à deux d'un quadruple, on a pu obtenir les propositions suivantes:

a) Les deux segments de jonction des deux paires de points d'un quadruple de points correspondants, ces paires se trouvant sur les deux branches de la courbe, se présentent sous le même angle parallactique par rapport à un point quelconque du lacet de la strophoïdale.

b) Les deux branches de la strophoïdale (oval et lacet) se présentent sous le même angle parallactique par rapport à un point quelconque du lacet de cette courbe.

A vrai dire, la proposition b) est déjà contenue dans la proposition a). Si, peut-être, la proposition a) se trouve sous une forme différente chez des auteurs plus anciens, la proposition b) nous paraît nouvelle.

En appliquant ces considérations à la strophoïde ordinaire, oblique ou droite, on parvient aux propositions suivantes, connues en partie:

c) La strophoïde est le lieu géométrique des points par rapport auxquels deux côtés d'un triangle apparaissent sous le même angle parallactique.

d) La droite de jonction d'un point arbitraire de la strophoïde et du point double de la courbe est la bissectrice de l'angle formé par les droites joignant ce point arbitraire et deux points conjugués de la strophoïde.

En transmettant ces résultats par projection stéréographique aux courbes cycliques du 4e ordre sur une sphère on a obtenue les propositions suivantes:

e) Sur une courbe cyclique du 4e ordre, située sur une sphère et composée de deux branches, il ne peut y avoir plus de quatre points, de sorte que les paires de plans tangentiels des deux branches de la courbe, menés par une bissécante quelconque contenant un des quatre points susdits et coupant la même branche de la courbe, coupent les deux plans tangentiels de la sphère menés par les points d'intersection de la bissecante et la courbe en deux droites chacun, ces deux paires de droites formant des angles égaux.

Pour la strophoïde on a encore déduit la proposition:

f) Sur une courbe gauche cyclique du 4e ordre avec point double il ne peut y avoir plus de quatre points de sorte que les plans tangentiels de cette courbe, menés par une bissécante quelconque contenant un tel point et coupant la même partie de la courbe par rapport au point double, coupent les plans tangentiels de la sphère menés par les points d'intersection de la bissécante et la courbe en deux droites chacun, ces deux paires de droites formant des angles égaux. Dans ce cas la droite d'intersection du plan tangentiel de la sphère et du plan mené par la bissécante et le point double est toujours la bissectrice d'un tel angle.