

O PLÜCKEROVU I NEKIM DRUGIM KONOIDIMA

3. I 4. REDA

Uvod. Plückerov konoid sigurno je najjednostavnija, ali i najzanimljivija pravčasta ploha 3. reda. Taj konoid javlja se vrlo često u prostornoj geometriji, a najpoznatiji je kao geometrijsko mjesto okomica spuštenih iz točaka kosog presjeka nekog uspravnog kružnog valjka na jednu njegovu izvodnicu. Postanak njegov definiran je međutim još na nekoliko raznih načina.¹ Radi toga istraživani i istražen je on temeljito tako, da mu danas poznajemo veliki broj zanimljivih osobina. Ima ipak još takvih njegovih osobina, koje nisu nigdje direktno zabilježene, iako bi se spomoću poznatih dale indirektno naći. Ali kako se one dađu odrediti i direktno spomoću vrlo jednostavnih sredstava, saopćit ćemo ih u ovoj radnji. Radi se o takvim svojstvima toga konoida, koja su u vezi s četverostrukim fokusima cirkularnih projekcija ravninskih presjeka toga konoida na njegove direkcione ravnine. Naša razmatranja prenijet ćemo i na neke konoidne 3. i 4. reda, koji imaju svojstva analogna Plückerovu.

I. Neka su Plückerov konoid i neki pravac p zadani tako, da taj pravac bude mimosmjernan i okomit na dvostruki pravac toga konoida. Izvodnice i_1, i_2 , koje prolaze konačnim probodštima toga pravca s konoidom, sijeku se na dvostrukom pravcu konoida, recimo u točki V , a leže zajedno s tim pravcem u direkcionoj ravnini ρ . Pravac p neka siječe te izvodnice u točkama J_1, J_2 . Svaka ravnina pravca p siječe naš konoid u nekoj krivulji 3. reda roda nultoga, a sve te krivulje prolaze točkama J_1, J_2 . Tangente ovih krivulja u tim točkama bit će presječnice ravnina tih krivulja s tangencijalnim ravninama konoida u točkama J_1, J_2 , dakle će se sjeći na presječnici s tih tangencijalnih ravnina, koja prolazi točkom V .

Uzmimo sada, da se pravac p nalazi u neizmjerano dalekoj ravnini. U toj ravnini nalazi se također par imaginarnih, i to izotropnih izvodnica našega konoida.² Pravac p neka siječe te

¹ E. Müller-J. Krames: Vorlesungen über darstellende Geometrie (Leipzig 1931.), Bd. III., str. 204.—214.

² E. Müller-J. Krames: Cit. pod 1), str. 204.

izvodnice u paru neizmjereno dalekih konjugirano imaginarnih točaka J_1, J_2 . Točka V je u tom slučaju neizmjereno daleka točka dvostrukog pravca konoida. Ravnine pravca p dat će u konačnosti svezak usporednih ravnina, koje konoid sijeku u krivuljama 3. reda roda nultoga. Parovi imaginarnih tangenata ovih presječnih krivulja u njihovim imaginarnim neizmjereno dalekim točkama J_1, J_2 , sjeći će se u realnim točkama. Ova realna sječišta leže na pravcu s , usporednom s dvostrukim pravcem konoida, jer on prolazi neizmjereno dalekom točkom V toga dvostrukog pravca.

Projiciramo li sve ovo u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu toga konoida, projicirat će se imaginarne točke J_1, J_2 u apsolutne točke ove ravnine projekcija, a pravac s u jednu njenu točku. Budući da se parovi tangenata presječnih krivulja u točkama J_1, J_2 sijeku na pravcu s , svi će se ti parovi projicirati u jedan zajednički par tangenata projiciranih presječnih krivulja s ravninama neizmjereno dalekog pravca p . Ovaj će par tangenata dirati sve te projekcije presječnih krivulja u apsolutnim točkama ravnine projekcija, koje su im svima zajedničke. Sve su te projekcije dakle unikurzalne cirkularne krivulje. Probodište pravca s s ravninom projekcija bit će zajednički četverostruki fokus čitavog nastalog pramena unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga u ravnini projekcija. Siječemo li dakle Plückerov konoid sveskom paralelnih ravnina i presječne krivulje projiciramo u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, imat će cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga tako nastalog pramena u toj ravnini zajednički četverostruki fokus.³

Jedna cirkularna krivulja ovog pramena raspada se u kružnicu i pravac, jer je jedna izvodnica konoida usporedna s tim ravninama presjeka. Središte ove kružnice bit će taj četverostruki fokus. Ova činjenica omogućuje nam uostalom vrlo jednostavnu konstrukciju toga četverostrukog fokusa.

II. Vratimo se sada na pravac p u ravnini ϱ realnih izvodnica i_1, i_2 . Negdje na tom pravcu odaberimo po volji točku S , koja neka bude vrh pramena pravaca p u ravnini ϱ . Zrake ovog pramena sijeku izvodnice i_1, i_2 u perspektivnim nizovima, a poznato je, da su točke izvodnica vitopere pravčaste plohe projektivno pridružene tangencijalnim ravninama plohe u tim točkama, t. j. ravninama sveska, kojemu je os ta izvodnica.⁴ Vrtimo li prema tome pravac p u ravnini ϱ oko točke S , bit će

³ Vidi radnju: Četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda i neki osobiti pramenovi tih krivulja. Rad, knj. 271.

⁴ E. Müller-J. Krames: Cit. pod 1), str. 68.

svakom tom pravcu pridružen neki pravac s (vidi sprijeda), a svi će ti pravci s činiti izvodnice nekog stošca 2. reda s vrhom V , na kojemu će se nalaziti dvostruki pravac konoida kao i izvodnice i_1, i_2 . Svi pravci s nastaju naime kao proizvod dvaju projektivnih svezaka ravnina, čije se osi i_1, i_2 sijeku u točki V .

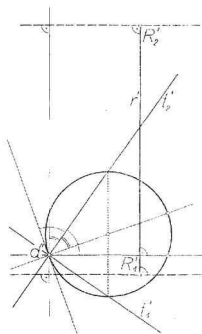
Prenesimo sada ta naša razmatranja na onaj slučaj, kada se pravac p nalazi u neizmjerljivo dalekoj ravnini para izotropnih izvodnica konoida. Točkom S , odnosno pramenom pravaca p u neizmjernosti, dano je u konačnosti ∞^1 svezaka paralelnih ravnina, koje su paralelne s jednim konačnim pravcem nosiocem neizmjerljivo daleke točke S . Presječne krivulje konoida s ravninama svakog ovog sveska, projicirane u smjeru dvostrukog pravca (t. j. iz neizmjerljivo daleke točke V) na jednu direkciju ravninu, imat će, kao što smo vidjeli, zajednički četverostruki fokus. Svi takvi fokusi svih ∞^1 svezaka paralelnih ravnina ležat će na nekoj kružnici, koja prolazi projekcijom dvostrukog pravca. U prošlom odjeljku spomenuti stožac 2. reda pretvorio se naime ovdje u uspravan kružni valjak radi neizmjerljivo dalekog para izotropnih izvodnica i_1, i_2 i neizmjerljivo dalekog vrha V na dvostrukom pravcu konoida.

Poznato je, da se četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda može odrediti ovako:³ dvostruka točka spoji se s tangencijalnim točkama neizmjerljivo daleke točke (te su spojnice među sobom okomite) i istom se točkom povuče okomica na asimptotu. Prebacimo li ovu okomicu oko jedne spomenute spojnice simetrično na suprotnu stranu i na taj pravac prenesemo od dvostruke točke pola udaljenosti tangencijalnih točaka na asimptotu na stranu vitice krivulje, dobit ćemo njezin četverostruki fokus.

Imamo li sada neki pravac r , koji probada torzalne ravnine našeg konoida u točkama R_1, R_2 , a projekcije su mu u smjeru dvostrukog pravca d na naprijed spomenutu ravninu točke R'_1, R'_2 (vidi sliku), vidi se iz naprijed opisane konstrukcije četverostrukog fokusa, da će promjer kružnice svih spomenutih četverostrukih fokusa biti jednak polovini udaljenosti između točaka R'_1, R'_2 . Pravci t'_1, t'_2 neka su projekcije torzalnih pravaca konoida. Uzmemo li pravcem r takvu ravninu, kojoj će tragovi u torzalnim ravninama konoida biti okomiti na projekciji toga pravca r , imat će projekcija presječne krivulje ove ravnine svoj četverostruki fokus najudaljeniji od projekcije dvostrukog pravca odnosno dvostruke točke te krivulje, jer je u tom slučaju najširi horizontalni razmak spomenutih tragova

³ Vid: radnju cit. pod 3).

ravnine, koja prolazi pravcem r , a jednak je duljini R'_1, R'_2 . Spojnica je dakle, dvostruke točke s ovim četverostrukim fokusom promjer tražene kružnice. Na temelju spomenute konstrukcije četverostrukih fokusa, kao i poznatog pravilnog poretka izvodnica na Plückerovu konoidu, izlazi, da će se promjer, a prema tome i središte te kružnice, nalaziti na projekciji one



Sl. 1.

izvodnice konoida, koja se u dvostrukom pravcu sastaje s onom izvodicom kojoj će projekcija biti paralelna s dužinom R'_1, R'_2 . Vidimo dakle, da za Plückerov konoid možemo izreći još ovakav stavak:

Projeciramo li usporedno s dvostrukim pravcem na jednu direkcionu ravninu presječne krivulje Plückerova konoida s ravninama usporednim s nekim pravcem r , ležat će četverostruki fokusi nastalih ∞^2 unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda u toj ravnini na jednoj kružnici, koja prolazi projekcijom dvostrukog pravca toga konoida. Polumjer te kružnice

jednak je četvrtini udaljenosti projekcija obadvaju probodišta toga pravca s torzalnim ravninama, a središte joj se nalazi na projekciji one izvodnice, koja dvostruki pravac siječe u istoj točki kao i ona izvodnica, kojoj je projekcija uspredna s projekcijom spomenutog pravca.

Ako je α prikloni kut pravca r prema ravnini projekcija, a a duljina razmaka između torzalnih ravnina konoida, promjer je kružnice $d = \frac{1}{2}a \cotg \alpha$, jer je $2d = R_1, R_2 = a \cotg \alpha$.

U okviru spomenute konstrukcije četverostrukog fokusa, kao i poznatih osobina Plückerova konoida, može se vrlo lako zapaziti činjenica, da je spomenuta kružnica svih četverostrukih fokusa projekcija one presječne elipse konoida, kojoj ravnina prolazi izvodnicom okomitom na pravcu r , a tangens njenog kuta nagiba prema ravnini projekcija dvostruko je veći od tangensa kuta priklona pravca r prema istoj ravnini. Ovo izlazi odatle, što je promjer spomenute kružnice jednak polovici duljine R_1, R_2 .

III. Zadamo li četverostruki fokus u ravnini projekcija unaprijed, tada je na temelju spomenute konstrukcije takva fokusa lako odrediti smještaj ravnina, kod kojih će projekcija njihovih presječnih krivulja u smjeru dvostrukog pravca imati zajednički upravo taj četverostruki fokus.

Zadamo li unaprijed čitavu našu kružnicu četverostrukih fokusa, tada ćemo smjer pravca r , s kojim su usporedne ravnine onih krivulja, kojih cirkularne projekcije imaju svoje četverostruke fokuse upravo na toj kružnici, odrediti na ovaj način: spojiti ćemo sjecišta torzalnih pravaca s ravninom one elipse na konoidu, koja se projicira u zadanu kružnicu. Toj spojnici smanjit ćemo prikloni kut prema direkcionim ravninama tako, da joj tangens priklona bude polovina tangensa njenog vlastitog priklona. Tako dobiveni pravac, iz priklonice ravnine one elipse, daje traženi smjer.

IV. Uzmimo na nekom kosom kružnom valjku po volji neki ravninski presjek (elipsu) kao ravnalicu, a jednu izvodnicu toga valjka kao dvostruki pravac nekog konoida. Ravnine jednog sveska paralelnih ravnina kružnih presjeka toga valjka neka su ravnine parova izvodnica toga konoida, koje se sijeku (direkzione ravnine). Taj konoid bit će 3. reda s takvim parom imaginarnih neizmjereno dalekih izvodnica, koje prolaze sjecištima neizmjereno dalekog jednostrukog pravca toga konoida s apsolutnom čunjosječnicom.⁶ Projekcije svih ravninskih pre-

⁶ Ove imaginarne neizmjereno daleke izvodnice nisu izotropni pravci, jer ne diraju apsolutnu čunjosječnicu kao kod Plückerova konoida.

sjeka ovakvog konoida, u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, bit će unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda kao kod Plückerova konoida, jer sve prolaze apsolutnim točkama ravnine projekcija. Ovakve projekcije svih čunjosječnica toga konoida bit će prema tome i ovdje kružnice. Iz istih razloga kao kod Plückerova konoida (toč. I.) imat će i ovdje opisane projekcije paralelnih ravninskih presjeka zajednički četverostruki fokus. U ravnini projekcija imat ćemo prema tome posve istu sliku kao kod Plückerova konoida, t. j. projiciramo li na opisani način sve ravninske presjeka paralelne s nekim pravcem r , ležat će četverostruki fokusi tih projekcija na jednoj kružnici, kojoj ćemo promjer odrediti analogno kao kod Plückerova konoida. Prostorna razmatranja u vezi s ovom kružnicom bila bi kod ovog konoida identična s razmatranjima kod Plückerova konoida.

Probodimo sada pravcem r torzalne ravnine toga konoida, a duljinu omeđenu tim probodištima projicirajmo u smjeru dvostrukog pravca na jednu ovu torzalnu ravninu, koja neka bude ravnina projekcija. Udaljenost od te projekcije onog probodišta, koje smo projicirali označimo s a , a kutove, što ih pravac r i dvostruki pravac konoida čine s tom projekcijom označimo s α i β . Malo prije spomenuta projekcija duljine, omeđene probodištima pravca r s torzalnim ravninama, bit će jednaka $a(\cotg \alpha - \cotg \beta)$. Znamo još od Plückerova konoida, a na temelju poznate konstrukcije četverostrukog fokusa kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, da je opisana projekcija te duljine jednaka dvostrukom promjeru naše kružnice četverostrukih fokusa. Taj je promjer prema tome kod ovakvog konoida jednak $\frac{1}{2}a(\cotg \alpha - \cotg \beta)$. Kod Plückerova konoida je kut $\beta = 90^\circ$, dakle $\cotg \beta = 0$, odnosno $d = \frac{1}{2}a \cotg \alpha$, kao što smo to tamo i spomenuli.

Uzmimo opet neki kosi ravninski presjek uspravnog ili kosog kružnog valjka kao ravnalicu konoida, kojemu je konačni dvostruki pravac usporedan s osi toga valjka, a ravnine su mu kružnih presjeka (kod kosoga valjka jedan svezak takovih ravnina) direkcione ravnine. Dobiveni konoid bit će 4. reda, kojemu u prvom slučaju neizmjereno daleke izvodnice čine par izotropnih pravaca, dok u drugom slučaju par neizmjereno dalekih imaginarnih izvodnica samo prolazi sjecištima neizmjereno dalekog dvostrukog pravca toga konoida s apsolutnom čunjosječnicom, tako da je te izvodnice ne dotiču. Projekcije ravninskih presjeka tih konoida u smjeru konačnog dvostrukog pravca na direkcione ravnine bit će i tu cirkularne krivulje, jer će i ovdje sve prolaziti apsolutnim točkama ravnine projekcija. Takve

projekcije presjeka s ravninama jednog sveska paralelnih ravnina bit će i ovdje konfokalne na isti način i iz istih razloga kao kod takvih konoida 3. reda. Uzmemo li konačno i ovdje sveske paralelnih ravnina paralelno s nekim pravcem r , bit će i tu na temelju razmatranja u točki II. ove radnje četverostruki fokusi presjeka toga konoida s tim ravninama, projiciranih u smjeru dvostrukog pravca na neku direkcionu ravninu, na nekoj kružnici. Ova kružnica prolazi sjecištem konačnog dvostrukog pravca s tom ravninom projekcija. Polumjer, kao i smještaj te kružnice u ravnini projekcija, ovisi o obliku ovakvih konoida, a konstruktivno može se ona odrediti spomoću poznate konstrukcije četverostrukog fokusa kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 4. reda s jednom neizmjerljivo dalekom dvostrukom točkom.⁷

Skupimo li sve ono, što smo našli zajedničko na svim do sada razmatranim konoidima, možemo to izreći ovim stavkom:

Svaki uspravan ili kosi konoid 3. ili 4. reda s neizmjerljivo dalekim imaginarnim parom izvodnica, koje prolaze sjecištima apsolutne čunjosječnice s jednostrukim odnosno dvostrukim neizmjerljivo dalekim pravcem toga konoida, odlikuje se ovakvim svojstvom: ravninski presjeci takvih konoida, projicirani u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, daju cirkularne krivulje. Uzmemo li sve ravninske presjeke tih konoida usporedne s nekim pravcem (njih ∞^2), četverostruki fokusi projekcija svih tih presjeka, projiciranih na spomenuti način, ležati će na jednoj kružnici.

V. Svaka presječna krivulja Plückerova konoida, projicirana u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, ima svoj četverostruki fokus. Ovaj je fokus projekcija neke točke u ravnini toga presjeka. Pogledat ćemo sada, gdje se u prostoru nalaze ovakve točke svih ravnina nekog pravca r . Iz prvog stavka u točki I. izlazi, da je geometrijsko mjesto ovakvih točaka na uspravnom kružnom valjku. Budući da ovo geometrijsko mjesto možemo smatrati proizvodom triju projektivnih svezaka ravnina (vidi točku II.), ono je prostorna krivulja 3. reda na uspravnom kružnom valjku, dakle *prostorna kubna kružnica*.

Potpuno isto vrijedi i za uspravan konoid 4. reda s izotropnim neizmjerljivo dalekim parom izvodnica. Kada bismo mjesto uspravnog konoida 3. ili 4. reda imali kosi takav konoid, kojega imaginarni neizmjerljivo daleki par izvodnica prolazi sjecištima

⁷ Vidi radnju: O cirkularnim krivuljama 4. reda roda nultoga s neizmjerljivo dalekom dvostrukom točkom. Rad, knj. 271.

apsolutne čunjosječnice s neizmjereno dalekom ravnalicom tog konoida, dobili bismo analognim putem prostornu kubnu elipsu.

Znamo, da u svakom svesku paralelnih presjeka Plückerova konoida ima po jedna elipsa, jer po jedna ravnina svakog takvog sveska prolazi jednom izvodnicom toga konoida. Spomenute projekcije presječnih krivulja toga konoida, s ravninom takvog sveska, imaju, kao što znamo, zajednički četverostruki fokus. Budući da se ovdje radi o paralelnom projiciranju taj je četverostruki fokus projekcija središta one jedine elipse u svesku takvih paralelnih presjeka. Oдавle, kao i iz naše prve stavka, izlazi još i ovaj stavak:

Središta elipsa Plückerova konoida, kojih su ravnine usporadne s nekim pravcem, leže na jednoj kružnici u ravnini okomitog para izvodnica toga konoida.

Polumjer i središte te kružnice izvedeni su u točki II. ovdje radnje uz pretpostavku, da je ravnina okomitog para izvodnica ravnina projekcija. U ravnini okomitog para izvodnica leži i kružnica zato, jer su u toj ravnini središta svih čunjosječnica toga konoida.

To vrijedi analogno i za kosi konoid 3. reda, kojemu neizmjereno daleki par imaginarnih izvodnica prolazi sjecištem apsolutne čunjosječnice s njegovom neizmjereno dalekom ravnalicom.

(Primijeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 22. VI. 1918.)