Serija II. T. 4. Zagreb 1949. Broj 1 POSEBAN OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Dr. Vilim Niče, Zagreb

O hiperoskulacionim kružnim valjcima jedne kružnice

Zagreb 1949

Štamparski zavod „Ognjen Prica" • Zagreb, Savska cesta 31

Dr. Vilim Niče, Zagreb

O HIPEROSKULACIONIM KRUŽNIM VALJCIMA JEDNE KRUŽNICE

U v o d: Svaku elipsu hiperoskulira u svakom njenom tjemenu jedna hiperoskulaciona kružnica. Uzmemo li takvu elipsu kao bazu uspravnog valjka, tad uspravni kružni valjci, kojima su te hiperoskulacione kružnice baze, postaju hiperoskulacioni kružni valjci tog eliptičnog valjka duž njegovih tjemenih izvodnica.

Odaberemo li na nekoj prostornoj krivulji po volji neku točku P, tad ova krivulja ima u toj točki ne samo svoju oskulacionu kružnicu, nego i ∞^1 svojih oskulacionih zavojnica. Osi ovih zavojnica čine Plückerov konoid, kojega je dvostruki pravac identičan s glavnom normalom te prostorne krivulje u točki P[1]). Kuspidalne točke ovog konoida su točke P i središte O oskulacione kružnice.

Povucimo sada oskulacionom kružnicom ∞^1 valjaka tako, da im izvodnice budu paralelne s izvodnicama spomenutog konoida. Svakoj izvodnici tog konoida pridružen je na taj način jedan valjak, a ta izvodnica konoida bit će os hiperoskulacionog kružnog valjka tog njoj pridruženog valjka duž one tjemene izvodnice, koja prolazi točkom P. Odnosno, bit će to hiperoskulacioni kružni valjak te oskulacione kružnice u toj točki.

Napustimo sada prostornu krivulju i uzmimo ovu oskulacionu kružnicu posve samostalno. Povučemo li njome analogno kao gore, ali sada svih ∞^2 mogućih valjaka, tada svaki taj valjak (eliptični) ima četiri tjemene izvodnice, a duž svake te izvodnice jedan hiperoskulacioni kružni valjak. U ovoj radnji istražit ćemo geometrijsko mjesto osi svih ovih hiperoskulacio-

---

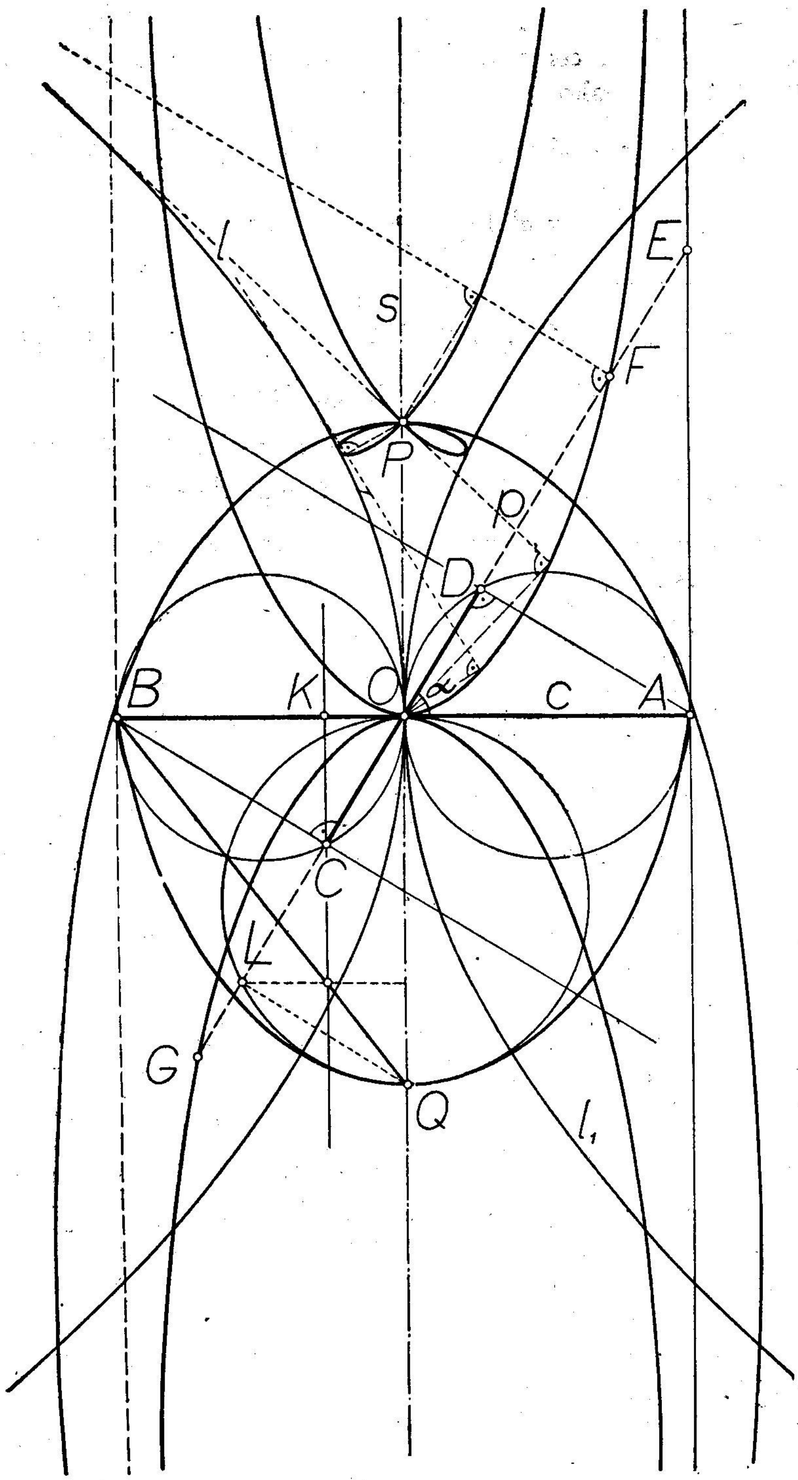
[1]) G. Scheffers: Anwendung der Differential und Integral Rechnung auf Geometrie (1923), Bd. I., str. 258.

nih kružnih valjaka. U našim razmatranjima zabavit ćemo se najprije osima širih hiperoskulacionih valjaka, t. j. onih, koji neki eliptičan valjak hiperoskuliraju na vanjskoj strani, a onda osima onih užih.

1. Odaberimo neku kružnicu c tako, da se ona na ravninu slike projicira u dužinu AB, a središte O te kružnice neka bude projekcija okomitog promjera o te kružnice na ravninu slike. Točke A, B, O neka se nalaze u ravnini slike (vidi sliku). Povucimo sada kružnicom c sve one valjke, kojima su izvodnice okomite na promjeru o, a svaki taj valjak presijecimo onom ravninom tog promjera, koja je na tom valjku okomita. Neka je pravcem p, kao tragom u ravnini slike, zadana takva ravnina ϱ. Smjer spojnica $BC \parallel AD$ daje nam smjer izvodnica pridruženog valjka toj ravnini ϱ, a dužina CD je projekcija njenog presjeka s tim okomitim valjkom. Budući da je promjer AB u ravnini slike, to je dužina CD odmah i mala os te presječne elipse, dok joj je velika os promjer o ($\perp AB$). Označimo li malu os s $CD = 2b$, a veliku os s $AB = 2a$, tad znademo da je polumjer r zakrivljenosti u tjemenima C, D ove presječne elipse jednak $r = \frac{a^2}{b}$. Označimo li nadalje s α kut što ga ravnina ϱ čini s ravninom kružnice c, tad se iz naše slike vidi, da je $b = a \cos \alpha$, odnosno $r = \frac{a}{\cos \alpha}$, ili $a = r \cos \alpha$.

Povučemo li u točki A okomicu na AB, pa je u točki E presiječemo pravcem p, tad na temelju izvedenog proizlazi, da je $OE = r$. Pomaknemo li prema tome dužinu OE na pravcu p tako, da točka O dođe u točku C, tad će točka E pasti u točku F, koja će biti hiperoskulaciono središte presječne elipse CD u tjemenu C. Točka G bit će isto takvo središte te elipse u tjemenu D. Zavrtimo li ravninu ϱ oko promjera o, tad će sve, tim ravninama na isti način pridružene točke C, ležati na kružnici opisanoj oko promjera OB u ravnini slike. Budući da će na svakoj tako nastaloj zraci p točke O biti uvijek $OC = EF$, to se sve točke F kod takve rotacije nalaze na Dioklovoj cisoidi[2]).

[2]) H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven (1908), str. 41., 42.


l
s
E
F
P
p
D
B
K
O
c
A
C
L
G
Q
l_1

Odaberemo li pravac OA kao ordinatu x, a okomicu s kao ordinatu y, tad ćemo jednadžbe geometrijskog mjesta točaka F i G dobiti ovako:

$$(FO)^2 = x^2 + y^2 = (OE - EF)^2 = \left(\frac{a}{\cos\alpha} - a\cos\alpha\right)^2 =$$
$$= a^2\left(\frac{1}{\cos^2\alpha} - 2 + \cos^2\alpha\right).$$

Budući da je

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \text{ to je } \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{y^2}{x^2} + 1 \text{ i } \cos^2\alpha = \frac{x^2}{y^2 + x^2}.$$

Uvrstimo li gore ove vrijednosti dobit ćemo:

$$\{ay^2 + x(x^2 + y^2)\}\,\{ay^2 - x(x^2 + y^2)\} = 0 \quad \text{ili}$$
$$ay^2 + x(x^2 + y^2) = 0 \quad \text{i} \quad ay^2 - x(x^2 + y^2) = 0.$$

Ove dvije poznate jednadžbe daju nam geometrijsko mjesto svih točaka F i G, a to su, kao što znademo, Dioklove cisoide. One se sastaju u šiljku O simetrično obzirom na vertikalu s (ordinata y).

Okomice postavljene u točkama F i G na pripadajuće ravnine bit će osi hiperoskulacionih kružnih valjaka, duž izvodnica koje prolaze širim tjemenima C, D presječnih elipsi onih valjaka kružnice c, kojih su izvodnice okomite na pridruženoj ravnini ϱ. Poznato je, da Dioklova cisoida može biti izvedena i kao nožišna krivulja parabole, uzevši tjeme te parabole kao pol. Odavle izlazi, da će sve spomenute okomice u točkama F omatati parabolu l, kojoj je pravac AB os, točka O tjeme, a točka B fokus. Analogno će okomice u točkama G omatati simetričnu parabolu l_1 obzirom na vertikalu s.

Zavrtimo li sada promjer o i sve ravnine njegova sveska oko središta O, odnosno vertikale s, tad će okomice na sve tako dobivene ravnine dati svih ∞^2 mogućih smjerova, a na taj smo način obuhvatili i svih mogućih ∞^2 valjaka kružnice c. U svakoj ravnini vertikale s dešavat će se isto što i u ravnini slike, jer će točke A, B putovati po kružnici c, a kružnice točaka C, D činiti će jedan torus ili anuloid. Iza rotacije za 180^0 prelaze točke F u točke G, a parabola l u parabolu l_1.

Imajući u vidu, da se u svakoj ravnini vertikale s dešava isto što i u ravnini slike, to iz naših razmatranja u ravnini slike direktno proizlazi ovaj stavak:

Geometrijsko mjesto osi kružnih hiperoskulacionih valjaka svih onih valjaka, koji prolaze nekom kružnicom c, čini ∞^2 ovakvih pravaca: U središtu O kružnice c postavimo okomicu s na njenu ravninu i tom okomicom postavimo jednu ravninu. U toj ravnini neka se nalazi parabola, kojoj je fokus u sjecištu te ravnine s kružnicom c, a tjeme u središtu O. Rotacijom ove parabole oko njene tjemene tangente s nastaje rotaciona ploha 4. reda, kojoj na kružnici c leže fokusi njenih paraboličnih meridijanskih presjeka. Sve tangente ove plohe, koje sijeku njenu os s, čine gore spomenuto geometrijsko mjesto hiperoskulacionih osi.

Svi ovi kružni hiperoskulacioni valjci hiperoskuliraju naravski i kružnicu c. Budući da ovakvih valjaka, dakle i njihovih osi ima ∞^2, to one čine jednu kongruenciju. Pravac s je singularna zraka te kongruencije[3]). Svakom točkom prostora prolazi jedna meridijanska ravnina te rotacione plohe 4. reda, koja ju siječe u dvije parabole. Tom točkom prolaze dakle četiri tangente toga meridijana, a prema tome je naša kongruencija 4. reda. U nekim točkama prostora bit će dvije takve zrake naše kongruencije konjugirano kompleksne, jer ta točka može biti i unutar jedne ili druge svoje meridijanske parabole.

2. Rotacijom naših Dioklovih cisoida oko osi s nastala je rotaciona ploha, koja je nožišna ploha naše kongruencije za središte O kružnice c kao pol. Iz naših se razmatranja vidi, da je ova ploha i geometrijsko mjesto središta zakrivljenosti u širokim tjemenima okomitih projekcija kružnice c na sve ravnine njenog središta O. Osim ove plohe vrijedno je spomenuti one nožišne plohe naše kongruencije, kojih se pol P nalazi na singularnoj zraci s. Takve su plohe opet rotacione, a meridijan u ravnini slike (u isti mah i kontura njene projekcije na ravninu slike) čine im nožišne krivulje parabola l i l_1. Rotacijom tih nožišnih krivulja oko osi s dobivamo takve plohe 6. reda s četverostrukom točkom u polu P i s dvostrukom točkom u neizmjernosti na singularnoj zraci s. U polu P takve plohe diraju same sebe, jer su tangente nožišnih krivulja parabola l i l_1 u polu P okomite na osi s.

Poznato je, da su nožišne krivulje parabole cirkularne krivulje. Obje nožišne krivulje parabola l i l_1 za pol P prolaze

---

[3]) Th. Reye: Die Geometrie der Lage, Bd. II., str. 122.

prema tome apsolutnim točkama svoje ravnine. Jer obje ove cisoide zajedno čine meridijan naše rotacione plohe, to taj meridijan prolazi dva puta apsolutnim točkama svoje ravnine. Budući da su svi meridijani jednaki proizlazi odavle, da naša nožišna ploha pola P prolazi dva puta apsolutnom čunjosječnicom, t. j. ona je ciklida 6. reda. Spomenuli smo, da ovakva ploha ima na svojoj osi s u neizmjernosti dvostruku točku. Jer je ona i rotaciona, to direktno odavle izlazi, da ona u neizmjernosti ima i par izotropnih pravaca. Dalje odavle izlazi, da su svi ravninski presjeci ovakvih ploha bicirkularne krivulje 6. reda. Neizmjerno daleki izotropni pravci tih ploha daju nam međutim i ovo: Projiciramo li bicirkularne ravninske presjeke ovakvih ploha u smjeru osi s na ravninu okomitu na toj osi, bit će te projekcije cirkularne krivulje.

3. Promotrimo sada, kako izgleda geometrijsko mjesto osi užih hiperoskulacionih kružnih valjaka svih valjaka kružnice c? Pod užim hiperoskulacionim kružnim valjcima razumijevamo one, koji eliptične valjke kružnice c hiperoskuliraju iznutra.

U kružnici c odaberimo promjer AB koji je u ravnini slike, a tim promjerom postavimo svezak ravnina σ. Projiciramo li kružnicu c okomito na svaku ovu ravninu σ, tad će sve dobivene elipse u tim ravninama imati zajedničku veliku os AB, a prema tome i tjemena A, B. Središta zakrivljenosti ovih elipsi u tjemenima A, B nalazit će se prema tome na promjeru AB. Taj promjer sjeći će dakle osi užih hiperoskulacionih kružnih valjaka kružnice c, kojih su izvodnice okomite na promjeru AB. Uzmemo li kružnicu c kao oskulacionu kružnicu neke prostorne krivulje u točki A ili B, tad će se osi naših užih hiperoskulacionih kružnih valjaka, okomitih na promjeru AB, podudarati s osima oskulacionih zavojnica te prostorne krivulje u točkama A, odnosno B, kao što je to spomenuto u uvodu ove radnje. Sve takve osi čine za tjeme B jedan Plückerov konoid, Tangente kružnice c u točkama A, odnosno B, su jedan torzalan pravac, a vertikala s je drugi zajednički torzalan pravac tih konoida. Točka O im je zajednička kuspidalna točka. Što vrijedi za promjer AB, vrijedi i za sve ostale promjere kružnice c, a time smo obuhvatili i svih ∞^2 smjerova u prostoru. Geometrijsko mjesto osi užih kružnih hiperoskulacionih valjaka svih valjaka kružnice c nastaje prema tome ovako: Jedan polumjer kružnice c, recimo OA, neka je dvostruki pravac Plückerova konoida, kojemu su točke O, A kuspidalne točke, a vertikala s i tangenta kružnice c u točki A torzalni pravci. Zarotiramo li ovaj konoid oko vertikale s, tad izvodnice svih tako dobivenih konoida čine spomenuto geometrijsko mjesto.

Svaki par izvodnica prvotnog konoida, koje se sijeku na dvostrukom pravcu AB, opisuje kod spomenute rotacije oba sistema izvodnica jednog rotacionog hiperboloida. Torzalnim pravcem kuspidalne točke B postavimo jednu ravninu (okomitu na ravninu slike). Ova ravnina siječe taj konoid u elipsi, kojoj je projekcija dužina BQ. Znademo, da se u smjeru AB ta elipsa projicira na torzalnu ravninu u kružnicu, kojoj je promjer OQ. Uzmimo na našem konoidu onaj par izvodnica, koje se sijeku u točki K na pravcu AB. Rotacioni hiperboloid ovog para izvodnica imat će u točki K tjeme konturne meridijanske hiperbole (u ravnini slike), a jedna asimptota te hiperbole bit će pravac OL, jer je taj pravac projekcija jedne izvodnice konoida u točki K zarotirane za 90^0. Radi sličnosti i okomitosti trokuta OQL i BOC sjeći će uvijek okomica dužine OB, postavljena u točki K, pravac (asimptotu) OL u nožištu C okomice spuštene na taj pravac iz točke B. Točka B je prema tome središte zakrivljenosti u tjemenu K konturne hiperbole našeg spomenutog hiperboloida, a koja je u ravnini slike kao meridijanskoj ravnini. Naša razmatranja u svezi s točkom K vrijede i za svaku drugu točku dužine OB, kao i za svaki drugi polumjer kružnice c. Dakle naša razmatranja izvedena pomoću ravnine slike kao meridijanske ravnine možemo prenijeti na svaku drugu meridijansku ravninu.

Pustimo li neku kuglu da svojim središtem putuje po nekoj kružnici c, tad sve te kugle omataju plohu 4. reda koja se zove torus ili anuloid. Ovu kružnicu c zvat ćemo kružnom osi tog torusa. Svaki rotacioni jednoplošni hiperboloid ima duž svoje grlene kružnice jedan hiperoskulacioni koaksijalni torus, t. j. takav, kod kojeg sve četiri prodorne kružnice s takvim hiperboloidom (kao degenerirana prostorna krivulja 8. reda) padaju skupa.

Iz ovih, kao i onih gornjih razlaganja proizlazi ovaj stavak:

Osi užih hiperoskulacionih kružnih valjaka svih valjaka neke kružnice c *čine kongruenciju, koja se sastoji iz oba sistema izvodnica jednog pramena takvih rotacionih koaksijalnih* *hiperboloida, kojima je kružnica* c *zajednička kružna os njihovih hiperoskulacionih torusa duž njihovih grlenih kružnica (kružnih strikcionih linija).*

Svakom točkom prostora prolazi jedna meridijanska ravnina, koja naš koaksijalni pramen rotacionih hiperboloida siječe u pramenu koaksijalnih hiperbola sa zajedničkim središtem zakrivljenosti. Svakom točkom prostora prolazi samo jedna takva meridijanska hiperbola, jer u našem je koaksijalnom pramenu hiperbola nemoguće povući jednom točkom dvije njegove hiperbole zato, jer svaka hiperbola tog pramena, koja ima što dužu realnu os, ima tim manji kut između asimptote i te realne osi. Svakom točkom prostora prolazi dakle samo jedan hiperboloid tog rotacionog pramena, dakle i samo dvije zrake naše kongruencije. Ova je kongruencija prema tome drugoga reda.

Nožišna ploha ove kongruencije, obzirom na točku O kao pol, je krug kružnice c. Odaberemo li pol Q negdje na osi s (vidi sliku), tad je nožišna ploha rotaciona ploha s tjemenom Q, a granični rub joj čini kružnica c. Nožišna krivulja pola Q na Plückerovu konoidu, kojemu su kuspidalne točke O, B, je elipsa, koja se na ravninu slike projicira u dužinu BQ (malo prije odabrani presjek). Naša nožišna ploha pola Q nastaje prema tome rotacijom ove elipse oko osi s, jer našu kongruenciju čine izvodnice svih Plückerovih konoida, koje dobivamo rotacijom spomenutog konoida oko osi s.

RÉSUMÉ

Sur les cylindres de rotation hyperosculateurs d'un cercle

Par Dr. Vilim Niče

Tout cylindre elliptique possède quatre cylindres de rotation hyperosculateurs touchant ce cylindre le long de ses génératrices de sommet. Il y a ∞^2 de cylindres elliptiques passant par un cercle c et à chacun d'eux appartiennent quatre cylindres de rotation hyperosculateurs. Dans ce travail on examine le lieu géométrique des axes de ces ∞^2 cylindres hyperosculateurs. On traite d'abord les axes des cylindres circonscrits et ensuite ceux des cylindres inscrits. Chacun de ces deux ensembles d'axes forme une congruence de rotation.

Projetons le cercle c orthogonalement sur un plan passant par un de ses diamètres o. La projection est une ellipse dont le grand axe est $2a = o$, tandis que le petit axe est $2b = 2a \cos \alpha$, où α est l'angle entre le plan du cercle c et le plan ϱ mené par le diamètre o. Le rayon de courbure aux sommets du petit axe de cette ellipse est $r = a^2/b = a^2/a \cos \alpha = a/\cos \alpha$ et il s'ensuit $r \cos \alpha = a$. Les centres de courbures respectifs se trouvent dans le plan de symétrie du diamètre o, quel que soit le plan ϱ mené par o sur lequel nous projetons le cercle. On déduit de la relation $a = r \cos \alpha$ que tous ces centres de courbures aux sommets des petits axes décrivent deux cissoïdes de Dioclès symétriques lorsque le plan de projection ϱ tourne autour du diamètre o. La pointe de ces courbes se trouve au centre O du cercle c et les courbes sont symétriques par rapport à la normale s du plan du cercle c menée par son centre. On sait que la cissoïde de Dioclès peut être considérée comme courbe pédale d'une parabole, le sommet de cette parabole étant le pôle.

Les normales du plan ϱ passant par les centres de courbure susdits sont les axes de cylindres de rotation hyperosculateurs du cylindre des rayons projetant le cercle c et enveloppent deux paraboles se touchant au sommet commun O. Leurs foyers se trouvent sur le cercle c. On déduit de ces résultats:

Le lieu géométrique des axes de cylindres de rotation hyperosculateurs de tous les cylindres du cercle c *forment une congruence de droites qui peut être obtenue comme il suit: Menons un plan par la normale* s *du plan du cercle* c *dans son centre* O. *Si la parabole dans ce plan dont le sommet est* O *et dont le foyer se trouve sur le cercle* c *tourne autour de sa tangente* s *en* O, *on obtient une surface de rotation du* 4ᵉ *ordre. Toutes les tangentes de cette surface coupant son axe* s *forment la congruence cherchée.*

Cette congruence est du 4ᵉ ordre et l'axe s en est le rayon singulier.

Dans ce travail on traite aussi les surfaces pédales de cette congruence. Si l'on prend le centre du cercle O comme pôle, la surface pédale par rapport à ce pôle est identique avec le lieu géométrique des centres de courbure dans tous les plans ϱ de tous les diamètres o. Si le pôle P se trouve sur le rayon singulier s, la surface pédale par rapport à ce pôle est une cyclide du 6ᵉ ordre dont P est un point quadruple. Elle possède une paire de droites isotropes à l'infini.

On a démontré la proposition suivante concernant les axes des cylindres de rotation hyperosculateurs inscrits aux cylindres du cercle c.

La congruence des axes des cylindres de rotation hyperosculateurs inscrits à tous les cylindres d'un cercle c *est formée des génératrices du faisceau d'hyperboloïdes de rotation coaxiaux dont le cercle* c *est l'axe commun de leurs tores hyperosculateurs touchant ces hyperboloïdes le long de leurs cercles de striction. Cette congruence est du* 2ᵉ *ordre.*