DR. VILIM NIČE

O CIRKULARNIM KRIVULJAMA 4. REDA RODA NULTOGA S NEIZMJERNO DALEKOM DVOSTRUKOM TOČKOM

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

ZAGREB 1947.

O CIRKULARNIM KRIVULJAMA 4. REDA RODA NULTOGA S NEIZMJERNO DALEKOM DVOSTRUKOM TOČKOM

Uvod. Razlika između cirkularnih i običnih necirkularnih krivulja bilo kojega reda oštro se zapaža u obliku njihovih jednadžbi, jer se u jednadžbi cirkularnih krivulja javlja poznati njen tipični dio (x^2+y^2). Po vanjskom (grafičkom) obliku razlikuju se nacrtane ovakove krivulje mnogo manje. Očita se razlika vidi samo kod krivulja 2. reda, dok se već kod krivulja 3. reda to ne može tako lako raspoznati. Za cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga, kao i neke 4. reda roda nultoga[1]) pokazano je, kojim uvjetima mora zadovoljavati njihov vanjski oblik, da one budu cirkularne. Kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 4. reda bile su razmatrane samo one, koje imaju sve tri dvostruke točke u konačnosti. U ovoj radnji promatrat ćemo cirkularne unikurzalne krivulje 4. reda, koje imaju jednu neizmjerno daleku dvostruku točku. Potražit ćemo uvjete, kojima mora zadovoljavati vanjski oblik ovakvih krivulja, da one budu cirkularne, a naći ćemo i jednostavan konstruktivni postupak za određivanje četverostrukog fokusa ovakvih krivulja.

1. Neka je kružnica l projekcija uspravnog kružnog valjka, a točka D_1 projekcija nekog pravca o usporednog s tim valjkom. Zamislimo taj valjak presječen ravninom u nekoj elipsi $\bar{l}$, koja se također projicira u kružnicu l. Okomice spuštene iz svake točke ove presječne elipse na pravac o su izvodnice nekog uspravnog konoida 4. reda, čije neizmjerno daleke izvodnice čine par minimalnih pravaca. Tangente r_1, r_2 kružnice l neka su projekcije tragova $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ presječne ravnine onog valjka u torzalnim ravninama našeg konoida, a prema tome su pravci t_1, t_2 projekcije torzalnih pravaca (vidi sliku). Pravac $i \parallel r_1$, r_2 je projekcija dvostruke izvodnice ovog konoida.

---

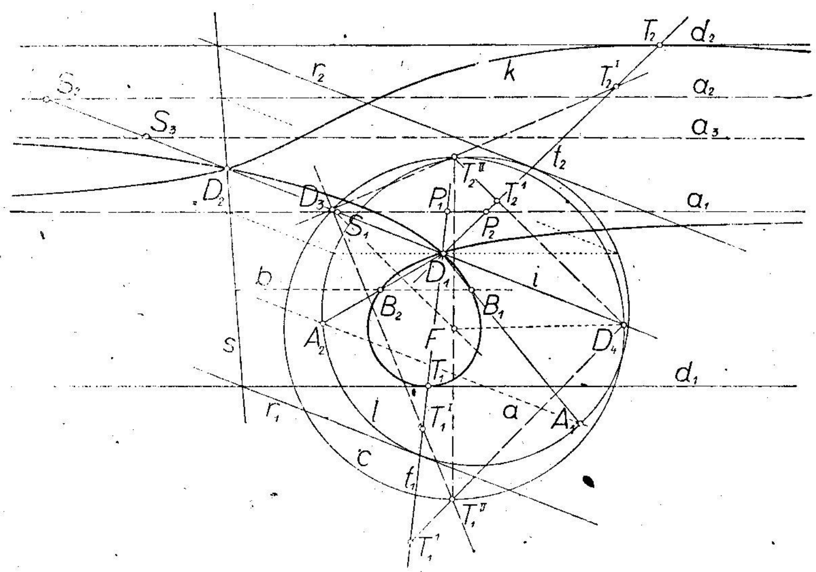
[1]) Vidi moje radnje a) i b): a) Vanjska oznaka unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda (Nast. Vj., knj. L) i b) Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije (izašlo ranije u Radu).

Uzmimo sada neku ravninu po volji, kojoj su tragovi u torzalnim ravninama konoida pravci $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$. Presječnica s ravnina $(\bar{d}_1\ \bar{d}_2)$, $(\bar{r}_1\ \bar{r}_2)$ siječe dvostruku izvodnicu i u dvostrukoj točki $\bar{D}_2$ presječne krivulje $\bar{k}$ ovog konoida s ravninom $(\bar{d}_1\ \bar{d}_2)$. Točka $\bar{D}_1$, t. j. probodište pravca $\bar{o}$ i ravnine $(\bar{d}_1\ \bar{d}_2)$, bit će druga dvostruka točka krivulje $\bar{k}$, dok je treća takva točka neizmjerno daleko u smjeru tragova $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$. Ostale točke presječne krivulje dobit ćemo ovako: presijecimo naš konoid jednom direkcionom ravninom; pravci a, b neka su presječnice te ravnine s ravninama $(\bar{r}_1\ \bar{r}_2)$ i $(\bar{d}_1\ \bar{d}_2)$; izvodnice, čije su projekcije pravci $A_1\ D_1$, $A_2\ D_1$, a nalaze se u toj ravnini, sijeku presječnicu b u točkama $\bar{B}_1$, B_2, koje su točke probodišta tih izvodnica s ravninom $(\bar{d}_1\ \bar{d}_2)$, dakle točke naše presječne krivulje $\bar{k}$. Analognim putem možemo dobiti sve ostale točke krivulje $\bar{k}$ kao i njene asimptote $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$. Iz same konstrukcije evidentno je, da su tragovi $\bar{d}_1$, $\bar{d}_2$ tangente krivulje $\bar{k}$, povučene na nju iz dvostruke neizmjerno daleke točke. Projekcija k krivulje $\bar{k}$ bit će cirkularna krivulja, jer smo je dobili projekcijom iz neizmjerno daleke točke dvostrukog pravca, kojom prolazi par minimalnih izvodnica, na jednu direkcionu ravninu.

2. Uzmimo svezak ravnina usporednih s ravninom $(\bar{d}_1\ \bar{d}_2)$ našeg presjeka $\bar{k}$. U svakoj toj ravnini nalazi se neka presječna krivulja $\bar{k}_i$ našeg konoida, a projekcije k_i svih tih krivulja činit će pramen cirkularnih krivulja 4. reda. One krivulje ovog pramena, koje su projekcije presjeka onih ravnina, što prolaze jednom izvodnicom našeg konoida, bit će 3. reda. Budući da na takovom konoidu postoje dvije izvodnice, koje su usporedne s ravninom $(\bar{d}_1\ \bar{d}_2)$, to će se dvije krivulje u našem pramenu k_i raspasti u ovakovu unikurzalnu cirkularnu krivulju 3. reda i projekciju jedne izvodnice.

Sve presječne krivulje $\bar{k}_i$ u svesku usporednih ravnina sijeku neizmjerno daleke minimalne izvodnice našeg konoida u iste dvije točke, koje se iz neizmjerno daleke točke dvostrukog pravca o projiciraju na našu ravninu projekcija u njene apsolutne točke. Odavle slijedi, da će sve krivulje k_i našega pramena, kao projekcije krivulja $\bar{k}_i$, imati zajednički četverostruki fokus F, jer se one dodiruju u apsolutnim točkama.

Kako u pramenu krivulja k_i postoje i dvije krivulje 3. reda, znat ćemo odrediti njihov zajednički četverostruki fokus, jer je to za ovakove krivulje 3. reda već poznato[2]). Krivulje k_i našega pramena imaju tangente d_1, d_2 kao i asimptote a_1, a_2 konstantno jednako međusobno razmaknute, jer su ti pravci presječnice ravnina krivulja $\overline{k}_i$ s torzanim ravninama i direkcionim ravninama položenim onim izvodnicama, koje su usporedne s ravninom $(\overline{d}_1\ \overline{d}_2)$. Cirkularna krivulja k_i pramena raspast će se u



pravac i krivulju 3. reda onda, ako asimptota a_1, odnosno a_2, ide točkom D_1. Dvostruka točka D_2 past će u tom slučaju u točku D_3, odnosno D_4, na spojnici D_1 D_2, a to su u tom slučaju dvostruke točke onih raspadnutih krivulja 3. reda u pramenu k_i (vidi sliku).

Četverostruki fokus neke unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda dobivamo tako, da dvostruku točku spojimo s tangencijalnim točkama njene realne neizmjerno daleke točke (te spojnice moraju biti okomite kod cirkularnih krivulja), te njom

---

[2]) Vidi radnju c): Četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda i neki osobiti pramenovi tih krivulja.

povučemo i okomicu na asimptotu. Preklopimo li ovu okomicu oko jedne ili druge spomenute spojnice simetrično na drugu stranu, pa na ovu prenesemo, od dvostruke točke, polovicu udaljenosti između tangenata te krivulje usporednih s asimptotom, na strani vitice, tada je dobivena točka četverostruki fokus te krivulje[3]).

Na našoj unikurzalnoj cirkularnoj krivulji 3. reda k_i unutar pramena, kojoj je dvostruka točka D_3, dobit ćemo tangencijalne točke T_1^I, T_2^I njene neizmjerno daleke realne točke tako, da dirališta T_1, T_2 krivulje k pomaknemo po pravcu t_1, odnosno t_2, u okomitom smjeru na pravce d_1, d_2, a_1, a_2 za udaljenost točke D_1 od asimptote a_1. T. j. treba načiniti $T_1 T_1^I = P_1 D_1$, odnosno $T_2 T_2^I = P_2 D_1$ ako su točke P_1, P_2 sjecišta pravaca $t_1 = T_1 D_1$, $t_2 = T_2 D_1$ s asimptotom a_1.

Spojnice $D_3 T_1^I$ i $D_3 T_2^I$ stoje okomito jedna na drugoj, odnosno bit će uvijek tada međusobno okomite, ako je krivulja k cirkularna, jer je u tom slučaju i naša reducirana unikurzalna krivulja 3. reda cirkularna. Na temelju malo prije opisanog postupka za konstrukciju četverostrukog fokusa unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, znat ćemo sada konstruirati i četverostruki fokus F naše krivulje k. Asimptota a_3 one reducirane krivulje 3. reda u pramenu k_i usporedna je naravski s pravcima a_1, a_2, d_1, d_2.

Uzmemo li u pramenu k_i mjesto reducirane krivulje 3. reda s dvostrukom točkom D_3 onu s dvostrukom točkom D_4, dobit ćemo istim konstruktivnim putem isti četverostruki fokus F, jer to uostalom, kao što znademo iz prostornog razmatranja, tako i mora biti.

Na temelju ove posljednje činjenice može se konstruktivni postupak za određenje četverostrukog fokusa naše unikurzalne cirkularne krivulje k 4. reda veoma pojednostavniti, a čitav postupak izraziti slijedećim stavkom:

Četverostruki fokus F neke unikurzalne cirkularne krivulje 4. reda s neizmjerno dalekom dvostrukom točkom dobit ćemo tako, da spojnicom $D_1 D_2$ konačnih dvostrukih točaka D_1, D_2 presiječemo njene asimptote u točkama S_1, S_2 i na tu spojnicu prenesemo dužine $S_1 D_1$, $S_2 D_1$ od točke D_2 u istom smjeru do točaka D_3, odnosno D_4. Četverostruki fokus F krivulje k bit će ona točka na strani njene vitice, koja je od točaka D_3, D_4 udaljena za polovicu udaljenosti između tangenata krivulje k usporednih s njenim asimptotama.

---

[3]) Vidi radnju c).

Točke D_3, D_4 dobit ćemo i tako, da od točke D_1 nanesemo dužine $S_1 D_2$ i $S_2 D_2$ u istom smjeru.

3. Kada bismo sa svakom pojedinom točkom krivulje k učinili isto kao s točkama T_1, T_2, t. j. potražili njima pridružene na isti način kao što smo našli točke T_1^I, T_2^I, tada bi sve te točke sačinjavale projekciju one krivulje u pramenu k_i, koja se je raspala u krivulju 3. reda i pravac. Odavle vidimo, da krivulja k može nastati kao cisoida ove cirkularne krivulje 3. reda i pravca a_1 za točku D_1 kao pol. Ova unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda može opet nastati kao cisoida njene asimptote a_3 i kružnice c, koja prolazi njenom dvostrukom točkom D_3, a središte joj je u zajedničkom četverostrukom fokusu F[4]). Točke T_1^I, T_2^I su tangencijalne točke neizmjerno daleke točke ove krivulje, a na kružnici c pridružene su im točke T_1^{II}, T_2^{II}, u kojima su tangentne kružnice c usporedne opet s pravcima d_1, d_2, a_1, a_2, a_3.

Učinimo li sada s točkama T_1, T_2 istu dvostruku translaciju (T_1, T_2 — T_1^I, T_2^I — T_1^{II}, T_2^{II}) kao do sada, samo mjesto asimptote a_1 uzmemo asimptotu a_2 krivulje k, tada su dobivene točke T_1^1, T_2^1 tangencijalne točke neizmjerno daleke točke one druge krivulje 3. reda, koja je nastala raspadanjem u pramenu k_i. Dvostruka točka ove krivulje je, kao što znademo, točka D_4. Krivulja k može se prema tome smatrati cisoidom i ove cirkularne krivulje te pravca a_2 za pol D_1. I ova krivulja 3. reda može se smatrati cisoidom, kao i ona malo prije, i to opet kružnice c i svoje asimptote a_4 tako, da je točkama T_1^1, T_2^1 te krivulje pridružen na kružnici c isti par točaka T_1^{II}, T_2^{II}, jer su samo u tim točkama kružnice c njene tangente usporedne s pravcima d_1, d_2, a_1, a_2, a_3 i a_4.

Kada bismo naš problem shvatili samo posve planimetrijski pa pretpostaviti da u pramenu k_i točka D_2 ostane čvrsta, dok točka D_1 putuje po spojnici $D_1 D_2$, tada se vrlo lako možemo uvjeriti, da će one dvije krivulje u tom pramenu, koje se raspadaju u krivulju 3. reda i pravac, imati iste dvostruke točke D_3, D_4 kao i isti četverostruki fokus F. U ovakvom slučaju samo bi pravci t_1, t_2 i točke T_1^I, T_2^I promijenili mjesta, dok bi spojnice $D_3 T_1^I$, $D_3 T_2^I$, $D_4 T_1^I$ i $D_4 T_2^I$, kao i točke T_1^{II}, T_2^{II} ostale iste.

Prostorno gledajući, morali bismo tada našu krivulju k shvatiti kao projekciju presjeka nekog drugog uspravnog konoida, čiji se dvostruki pravac projicira u točku D_2, dok bi točka D_1 bila projekcija probodišta dvostruke izvodnice toga konoida

4) Vidi radnju c).

s ravninom presjeka. Usporedne ravnine s ravninom krivulje k sjekle bi ovaj novi konoid u krivuljama, kojih će okomite projekcije dati pramen unikurzalnih cirkularnih krivulja k_n, u kojima će se nove dvije krivulje raspasti u krivulju 3. reda i pravac.

Na temelju svega ovoga možemo za unikurzalne cirkularne krivulje 4. reda s jednom neizmjerno dalekom točkom napisati slijedeći stavak:

Imamo li neku unikurzalnu krivulju 4. reda k s jednom neizmjerno dalekom dvostrukom točkom, tada se može konstatirati, da li je ona cirkularna, na slijedeći način: Jednu konačnu dvostruku točku, recimo D_1, spojimo s drugom takovom točkom D_2 i s dirnim točkama T_1, T_2 tangenata usporednih s asimptotama te krivulje, pa tim spojnicama presijecimo jednu asimptotu, recimo a_1. Prenesemo li na tim spojnicama dužine između asimptote i točke D_1, od točaka D_2, T_1, T_2 u istom smjeru, dobit ćemo na njima točke D_3, T_1^{I}, T_2^{I}. Uzmemo li mjesto asimptote a_1 asimptotu a_2, dobit ćemo na istim spojnicama istim postupkom točke D_4, T_1^{1}, T_2^{1}. Spojnice $D_3\,T_1^{I}$, $D_4\,T_1^{1}$ neka se sijeku u točki T_1^{II}, a spojnice $D_3\,T_2^{I}$, $D_4\,T_2^{1}$ u točki T_2^{II}. Krivulja k bit će cirkularna onda, ako je

$$D_3 T_1^{II} \perp D_3^{II}\, T_2^{II} \text{ i } D_4 T_1^{II} \perp D_4 T_2^{II}, \text{ a } T_1^{II} T_2^{II} \perp a_1, a_2.$$

Dužina $T_1^{II}\,T_2^{II}$ bit će osim toga jednaka razmaku tangenata krivulje k usporednih s asimptotama, dok je polovište te dužine, kao što već znademo, četverostruki fokus krivulje k.

4. Uzmimo neku unikurzalnu cirkularnu krivulju 4. reda s jednom neizmjerno dalekom dvostrukom točkom kao bazu uspravnog valjka 4. reda i u jednoj njenoj konačnoj dvostrukoj točki postavimo okomicu o paralelno s izvodnicama toga valjka. Presiječemo li taj valjak ravninom usporednom s asimptotama njegove cirkularne baze i u svakoj točki te presječne krivulje postavimo okomicu na pravac o, tada sve te okomice sačinjavaju uspravan konoid 4. reda. Neizmjerno daleki par izvodnica ovog konoida je par izotropnih pravaca, jer te izvodnice prolaze neizmjerno dalekim konjugirano kompleksnim parom točaka cirkularne baze našega valjka 4. reda, t. j. apsolutnim točkama. Vidimo dakle, da svaku unikurzalnu cirkularnu krivulju 4. reda, koja ima jednu neizmjerno daleku dvostruku točku, možemo smatrati projekcijom jednog presjeka dvaju uspravnih konoida, okomitom na direkcionu ravninu tih konoida. Na temelju ovoga, kao i svega naprijed izvedenoga, možemo napisati još i slijedeći stavak:

Svaka unikurzalna cirkularna krivulja 4. reda s jednom neizmjerno dalekom dvostrukom točkom može se dobiti kao cisoida svojih asimptota kao ravnalica i odgovarajuće dvostruke točke kao pola, te četiriju unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, od kojih po dvije prolaze jednom dvostrukom točkom, a sve skupa imaju zajednički četverostruki fokus sa zadanom krivuljom 4. reda.

Pomoću naših razmatranja i izvoda može se vrlo lako konstruktivno odrediti afina transformacija, primjenom koje možemo svaku elipsoidnu unikurzalnu krivulju 4. reda s jednom neizmjerno dalekom dvostrukom točkom prevesti u cirkularnu takvu krivulju i obrnuto. Evidentno je također, da se svaka elipsoidna (ona koja ima par imaginarnih točaka u neizmjernosti) unikurzalna krivulja 4. reda s neizmjerno dalekom dvostrukom točkom može smatrati cisoidom svojih asimptota i četiriju elipsoidnih unikurzalnih krivulja 3. reda, od kojih po dvije prolaze jednom konačnom dvostrukom točkom zadane krivulje, a sve četiri diraju tu zadanu krivulju u neizmjerno dalekim imaginarnim točkama.