DR. VILIM NIČE

ČETVEROSTRUKI FOKUS UNIKURZALNIH CIRKULARNIH KRIVULJA 3. REDA I NEKI OSOBITI PRAMENOVI TIH KRIVULJA

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

ZAGREB 1947.

ČETVEROSTRUKI FOKUS UNIKURZALNIH CIRKULARNIH KRIVULJA 3. REDA I NEKI OSOBITI PRAMENOVI TIH KRIVULJA.

Neki pravac p, koji siječe jednostruku ravnalicu neke pravčaste plohe 3. reda u točki A, neka probada ovu plohu još i u točkama B i C. Probodišta B, C nalaze se na paru izvodnica ove plohe, koje se sijeku na njenoj dvostrukoj ravnalici, recimo u točki O. Siječemo li sada našu plohu ravninama pravca p i sve te presječne krivulje centralno projiciramo iz točke O na bilo kakvu ravninu, dobit ćemo na toj ravnini pramen unikurzalnih (jednoga krivulja 3. reda, određen dvostrukom točkom (tri elementa), trima jednostrukim točkama (projekcije točaka A, B, C), te tangentama u dvjema od tih točaka (u projekcijama točaka B, C). Sjecište F ovih tangenata je čvrsta točka ovoga pramena, jer su čvrste u njemu i spomenute tangente.

Mjesto bilo kakove pravčaste plohe 3. reda uzmimo sada Plückerov konoid, a pravac p neka se nalazi u neizmjerno dalekoj ravnini para minimalnih izvodnica toga konoida. Svezak njegovih ravnina bit će prema tome svezak usporednih ravnina. Točka O bit će ovdje neizmjerno daleka točka dvostrukog pravca ovog konoida, a to je, kao što znademo, ona njegova točka, kojom prolazi par njegovih minimalnih izvodnica.[1]) Odavle direktno slijedi poznata činjenica, da se svi presjeci Plückerova konoida projiciraju u smjeru dvostrukog pravca na direkcione ravnine kao cirkularne krivulje. Siječemo li sada ovaj konoid sveskom usporednih ravnina neizmjerno dalekog pravca p i sve te presjeke u smjeru dvostrukog pravca projiciramo na bilo koju direkcionu ravninu, dobit ćemo na toj ravnini pramen cirkularnih krivulja 3. reda, koje imaju zajedničku dvostruku točku, neizmjerno daleku realnu točku i obje apsolutne točke s njihovim tangentama. Realno sjecište F ovih imaginarnih tangenata u apsolutnim točkama zove se četverostruki fokus.

---

[1]) Müller-Krames: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III. str. 204.

Budući da su apsolutne točke i njihove imaginarne tangente zajedničke svim krivuljama ovog pramena, to će i ovo realno sjecište F biti zajednički četverostruki fokus svih cirkularnih krivulja ovog pramena.

Po jedna ravnina svakog sveska usporednih ravnina prolazi jednom izvodnicom Plückerova konoida. Presjek toga konoida s tom ravninom raspada se u spomenutu izvodnicu i neku elipsu, koja se u prije spomenuti pramen cirkularnih krivulja 3. reda projicira kao kružnica. Budući da je središte kružnice sjecište njenih tangenata u apsolutnim točkama, to će središte spomenute kružnice, u pramenu naših cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga, biti zajednički četverostruki fokus svih krivulja ovog pramena.

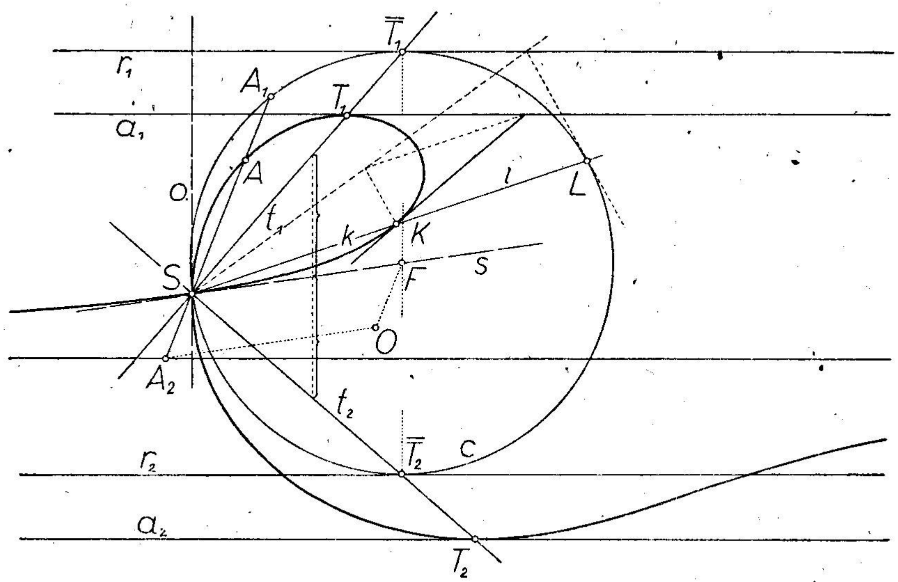
Kad svaku cirkularnu krivulju 3. reda roda nultoga možemo shvatiti kao projekciju nekog ravnog presjeka Plückerova konoida u smjeru dvostrukog pravca na jednu njegovu direkcionu ravninu[2]), tad pomoću gornjih razmatranja možemo na svakoj takovoj unikurzalnoj cirkularnoj krivulji 3. reda odrediti njen četverostruki fokus.

Neka je zadana unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda k kao projekcija nekog presjeka Plückerova konoida u smjeru njegovog dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu (vidi sliku). Povučemo li tangente a_1, a_2 na tu krivulju, usporedne s njenom asimptotom, i njihova dirališta T_1, T_2 spojimo s dvostrukom točkom, tada su ove spojnice t_1, t_2 projekcije torzalnih pravaca toga Plückerova konoida, dakle okomitih jedan na drugom. Kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda ove dvije spojnice moraju biti međusobno okomite[3]). Uzmemo li sada sve presjeke našeg Plückerova konoida, čije su ravnine usporedne s ravninom zadanog presjeka, tada će njihova projekcija dati, kao što već znademo, pramen cirkularnih krivulja 3. reda sa zajedničkom dvostrukom točkom, realnom neizmjerno dalekom točkom, te apsolutnim točkama i njihovim tangentama. Tangente r_1, r_2 u sjecištima tih krivulja s pravcima t_1, t_2 bit će usporedne s pravcima a_1, a_2, a razmak njihov bit će jednak razmaku pravaca a_1, a_2, jer su parovi ovih tangenata tragovi tih usporednih ravnina u torzalnim ravninama, koje su kod Plückerova konoida usporedne. Sve krivulje ovog pramena imaju zajednički četverostruki fokus, a jedna između tih krivulja raspada se u kružnicu i pravac, koji prolazi dvostrukom točkom, a usporedan je s prav-

[2]) Vidi moju radnju: Vanjska oznaka unikurzalne cirkularne krivulje 3 reda. Nast. Vjesnik, knj. 1., str. 360.

[3]) Vidi moju radnju: Cit. pod [2]).

cima a_1, a_2. Središte ove kružnice c bit će dakle traženi četverostruki fokus F, a sama kružnica je projekcija presječne elipse s onom ravninom našeg sveska, koja prolazi onom izvodnicom našeg Plückerova konoida, koja je usporedna s pravcima a_1, a_2. Rekli smo već, da ova kružnica c mora prolaziti dvostrukom točkom, a prema gornjemu mora sjeći pravce t_1, t_2 tako, da tangente r_1, r_2 na tu kružnicu, u tim sjecištima, budu usporedne s pravcima a_1, a_2, a razmak tih tangenata da bude jednak razmaku onih pravaca a_1, a_2. Povučemo li prema tome neki pravac okomito na tangente a_1, a_2 i raspolovimo udaljenost nje-



govih sjecišta s pravcima t_1, t_2, a to polovište spojimo s dvostrukom točkom, tada se na toj spojnici s nalazi središte F tražene kružnice c, odnosno četverostruki fokus cirkularne krivulje k. Udaljenost njegova od dvostruke točke na stranu vitice krivulje, jednaka je polovici razmaka tangenata a_1, a_2, što slijedi iz gornjih razmatranja.

Uzdignemo li u dvostrukoj točki okomicu o na asimptotu, tada za pravce t_1, t_2, o i s vrijedi $(t_1\, t_2\, o\, s) = -1$, odnosno $\sphericalangle\, ot_1 = \sphericalangle\, t_1 s$, jer je kut pravaca t_1, t_2 pravi. Vidimo dakle, da ćemo dobiti četverostruki fokus svake unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda ovako: *dvostruku točku te krivulje spojimo s diralištima njenih tangenata a_1, a_2 usporednih s asimptotom i kroz nju povučemo okomicu o na te tangente, odnosno asimptotu. Prenesemo* *li pravac o oko jedne ili druge ove spojnice simetrično na drugu stranu, tada na dobivenom pravcu leži četverostruki fokus na strani vitice, udaljen od dvostruke točke za polovicu udaljenosti tangenata a_1, a_2.*

Imamo li četverostruki fokus F neke cirkularne unikurzalne krivulje k 3. reda i oko nje, kroz njenu dvostruku točku, opisanu kružnicu c, tada se na temelju prostornih razmatranja može utvrditi zanimljiva veza ove kružnice s našom krivuljom k.

Svaku zraku dvostruke točke krivulje k možemo smatrati projekcijom jedne izvodnice Plückerova konoida. Neka takva izvodnica i siječe kružnicu c u točki L, a krivulju k u točki K. Budući da su ravnine presjeka k, c usporedne, to iz prostornih odnosa jasno slijedi, da točka L mora biti ispod pravca r_1 upravo toliko, koliko je točka K ispod pravca a_1. Pomoću ove činjenice može se vrlo jednostavno konstruirati svaka krivulja našeg pramena, ako mu je zadan zajednički smjer asimptota, dvostruka točka i četverostruki fokus. Tangente u pojedinim točkama mogu se dobiti također vrlo jednostavnim putem, koji se temelji na poznatim svojstvima Plückerova konoida. Na pr. presiječemo li tangentom kružnice c u točki L pravac r_1 pa spojnicom toga sjecišta i dvostruke točke presiječemo usporednicu tangente kružnice c u točki L, povučenu točkom K, tada će nam ovim sjecištem povučena usporednica s pravcem KL sjeći pravac a_1 u točki, kojom prolazi tangenta krivulje k u točki K (vidi sliku!). Ova planimetrijska konstrukcija je projekcija prostornog određivanja presječnice ravnina presjeka k s dirnom ravninom Plückerova konoida u točki K.

Uzmimo na krivulji k kao naprijed spomenutoj projekciji nekog ravnog presjeka Plückerova konoida, točku A i zrakom SA sijecimo kružnicu c i asimptotu krivulje k u točkama A_1, A_2. Iz naših dosadanjih razmatranja vidi se, da mora biti $A_1 A = SA_2$, što vrijedi i za sve točke krivulje k, jer su radi paralelnosti ravnina krivulja k i c u prostoru, kao presječnih ravnina spomenutog Plückerova konoida, jednake dužine AA_2, SA_1 u prostoru, dakle i njihove projekcije na našoj slici, a odatle slijedi i $A_1A = SA_2$. Vidimo dakle, da izlazi ovaj već poznati stavak: Svaka unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda je cisoida kružnice opisane oko njenog četverostrukog fokusa kroz dvostruku točku i njene asimptote, a za dvostruku točku kao pol.

Pomoću ovih naših prostornih i ravninskih razmatranja lako se može uvidjeti i to, kako svaku elipsoidnu unikurzalnu krivulju 3. reda, t. j. onu, koja ima običan par imaginarnih točaka u neizmjernosti, zgodnom afinom transformacijom (u prostoru

mnogo [illegible]!

paralelnim projiciranjem) možemo prevesti u cirkularnu i obrnuto, isto kao što i svaku elipsu možemo projicirati u kružnicu i obrnuto. Osim toga odavle izlazi činjenica, da je svaka unikurzalna krivulja 3. reda s parom imaginarnih točaka u neizmjernosti cisoida[4]) neke elipse, koja je dira u njenim imaginarnim neizmjerno dalekim točkama, te asimptote ove krivulje, a za dvostruku točku kao pol.

Konstruktivno odrediti ovakovu elipsu je vrlo lako. Spojimo dvostruku točku ove krivulje s diralištima T_1, T_2 njene neizmjerno daleke točke i tim spojnicama presijecimo njenu asimptotu. Prenesemo li na tim spojnicama njihov odsječak od asimptote do dvostruke točke od točaka T_1, T_2 u istom smjeru, tada dobivene točke $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ (vidi sliku) leže na traženoj elipsi. Spojnica njihova je promjer te elipse, dok su njene tangente u tim točkama usporedne s asimptotom krivulje. S ovim i dvostrukom točkom krivulje ta je elipsa određena. Ako je još i spojnica $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$ okomita na asimptotu krivulje, postaje ta elipsa kružnicom, odnosno naša krivulja je cirkularna. Za cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga vrijedi prema tome još i ovaj stavak:

Ako su spojnice dvostruke točke S s tangencijalnim točkama T_1, T_2 neizmjerno daleke točke neke unikurzalne krivulje 3. reda s parom imaginarnih točaka u neizmjernosti međusobno okomite, pa na te spojnice prenesemo od točaka T_1, T_2 njihov odsječak od asimptote do dvostruke točke u smjeru asimptota — dvostruka točka, tada će ova krivulja biti cirkularna samo onda, ako je spojnica dobivenih dviju točaka okomita na njenu asimptotu.

Iz ovoga stavka nam se nameće izravno novi konstruktivni postupak za određivanje četverostrukog fokusa, budući da je taj fokus polovište dužine $\overline{T}_1$, $\overline{T}_2$.

U vezi s našim razmatranjima možemo lako riješiti pitanje, kada će se četverostruki fokus F nalaziti na krivulji k. Povučemo li dvostrukom točkom S usporednicu s asimptotom, tada će središte F kružnice c pasti na krivulju k samo onda, ako od te usporednice bude jednako udaljeno kao i asimptota, samo na suprotnu stranu. Ovo je, kao što znademo, poznata činjenica kod strofoide.[5])

---

[4]) K. Zahradnik: Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen, (Prager Ber., 1906). G. de Longchamps: Sur les cubiques unicursales. (Nouvelle Corréspondance mathématique T. IV., 1878 i Progresso, T. I., 1891).

[5]) H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, str. 38.

Na temelju opisanih činjenica može se vrlo jednostavno konstruirati svaka unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda, koja je zadana četverostrukim fokusom, dvostrukom točkom i dvima realnim točkama od kojih jedna može biti i u neizmjernosti.

Mi ćemo međutim sada promotriti pramen ovakovih krivulja, ako je on zadan četverostrukim fokusom (četiri elementa), dvostrukom točkom (tri elementa) i: a) jednom točkom u neizmjernosti, b) jednom točkom u konačnosti, c) jednom točkom, koja pada u dvostruku točku i d) jednom točkom, koja pada u četverostruki fokus.

a) Uzmimo na našoj slici da je pramen unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda zadan četverostrukim fokusom F, dvostrukom točkom S i neizmjerno dalekom točkom krivulje k. Neizmjerno daleka točka daje nam smjer asimptote, a svaka asimptota određuje nam jednu krivulju tog pramena. Svaka krivulja ovog pramena može se odmah konstruirati, čim zadamo asimptotu, jer je poznata kružnica c. Među krivuljama ovog pramena nalaze se dvije sa šiljkom, jedna strofoida, a jedna se raspada u kružnicu i pravac, što se sve vrlo lako može razabrati iz naših ravničnih i prostornih razmatranja.

b) U ovom slučaju neka je naš pramen zadan opet točkama F, S i točkom A u konačnosti. Presiječemo li spojnicom SA kružnicu c u točki A_1, pa na taj pravac prenesemo dužinu AA_1 od točke S na suprotnu stranu do točke A_2, tada ovom točkom prolaze asimptote svih krivulja ovog pramena, jer znademo, da je na svakoj takovoj krivulji $A_1A = SA_2$. Svakom asimptotom u ovom pramenu određena je jedna krivulja toga pramena. Povučemo li na svaku ovu krivulju tangente usporedne s njenom asimptotom, tada je razmak tih parova tangenata opet jednak promjeru kružnice c. Povucimo unutar svakog ovakvog para usporednih tangenata s asimptotom simetralu. Radi paralelnosti ravnina krivulja k i c u prostoru svaki ovakav par tangenata a^1_1, a^1_2 možemo dobiti paralelnim pomicanjem para tangenata r^1_1, r^1_2 kružnice c u smjeru i veličini određenoj točkama AA_1. Pomaknemo li kod svakog para i njegovu simetralu, tada sve te simetrale prolaze nekom točkom O, koja se od točke F nalazi isto tako daleko i u istom smjeru kao i točka A od točke A_1, odnosno točka A_2 od točke S, t. j. $FO \mathrel{\not\equiv} A_1A$, jer kod svakog takovog pomaka točka F prelazi u točku O. Za ovakav pramen unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda možemo prema tome napisati slijedeći stavak:

Kod pramena unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, koji je zadan točkom A, čine asimptote svih krivulja toga pramena

pramena pravaca, čiji se vrh A_2 nalazi na spojnici SA udaljen od točke S isto toliko kao točka A od sjecišta A_1 spojnice SA s kružnicom c, opisanom oko fokusa F s polumjerom FS, samo na suprotnu stranu. Tangente svih krivulja ovog pramena, usporedne s njihovom asimptotom, omataju neku kružnicu h, koja je jednaka kružnici c, a dobivena je paralelnim pomakom kružnice c u smjeru i udaljenosti točaka A_1, A. Evidentno je, da dobivena kružnica h prolazi vrhom A_2 pramena asimptota.

Ako je točka A, kao osmi zajednički elemenat krivulja toga pramena, na viticama tih krivulja, tada unutar toga pramena ne postoji niti jedna krivulja sa šiljkom. Ako je pak ta točka na rastegnutim dijelovima tih krivulja, tada postoje u pramenu dvije krivulje sa šiljkom. Smjer njihovih asimptota dobit ćemo tako, da točku A_2 na spojnici SA prebacimo simetrično na drugu stranu, pa iz te točke povučemo tangente na kružnicu c. Prema tome da li su te tangente imaginarne ili realne, dobit ćemo gore navedena dva slučaja. Povučemo li naime paralelu s asimptotom simetrično s druge strane točke S, tada sjecišta te paralele s kružnicom c, spojena s točkom S, daju tangente krivulje k u točki S, jer ovim sjecištima (A_1) pripadne točke A padaju u točku S. Postane li ta paralelna sekanta kružnice c s asimptotom njena tangenta, onda te dvije tangente krivulje k u dvostrukoj točki S padaju skupa, t. j. ta točka postaje šiljak. Ovakove realne tangente na kružnicu c postojati će samo onda, ako je vrh A_2 pramena asimptota unutar kružnice c, jer će vrh pramena paralela s tim asimptotama pasti u tom slučaju izvan kružnice c. U ovakovom pramenu unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda postoji samo jedna strofoida, jer će samo u jednom slučaju biti fokus F i asimptota krivulje jednako udaljeni od paralele s asimptotom kroz dvostruku točku. Isto se tako u samo jednom slučaju raspada krivulja ovog pramena u pravac i kružnicu.

c) Padne li točka A u točku S, t. j. bude li mjesto točke A zadana jedna (od dviju mogućih) zajednička tangenta krivulja toga pramena u dvostrukoj točki, ne će se ništa bitno promijeniti. Točka A_1 je sjecište ove tangente kružnicom c, a točka A_2 se nalazi simetrično na suprotnoj strani. Sve ostalo je analogno kao u prošlom slučaju.

U ovom pramenu unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda postoji uvijek jedna i samo jedna krivulja sa šiljkom, jer one u toč. b) spomenute tangente padaju ovdje skupa. Strofoida je u ovom pramenu također samo jedna, a i samo se jedna krivulja raspada u pravac i kružnicu.

d) Odaberemo li točku A tako, da padne u zajednički četverostruki fokus F, tada se cijeli problem mnogo pojednostavnjuje. Sada su sve krivulje pramena strofoide, a vrh A_2, kojim prolaze asimptote svih tih strofoida, dobit ćemo ako točku F na spojnici FS prebacimo simetrično na drugu stranu točke S, jer je u ovom slučaju $A = F$, a $A_1 F = FS = SA_2$. Središte O kružnice h poklapa se dakle s dvostrukom točkom S, a kod svake je strofoide dvostruka točka jednako udaljena od njenih tangenata usporednih s asimptotom. Vidimo dakle, da za ovakav pramen strofoida možemo izreći slijedeći stavak:

Zadamo li pramen kubnih strofoida zajedničkom dvostrukom točkom (tri elementa) i zajedničkim četverostrukim fokusom (pet elemenata), tada asimptote tih krivulja čine pramen pravaca, tako da dvostruka točka raspolavlja udaljenost vrha ovog pramena do zajedničkog fokusa. Tangente krivulja ovog pramena, usporedne s njihovom asimptotom, omataju kružnicu, koja prolazi zajedničkim četverostrukim fokusom, a središte joj je u zajedničkoj dvostrukoj točki.

Očito je, da je pramen ovih krivulja simetričan obzirom na spojnicu zadanih dviju točaka, pa prema tome u njemu postoji i jedna uspravna strofoida.