Serija II. · T. 1. · Zagreb 1946. · No. 5. POSEBAN OTISAK

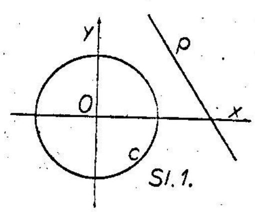
GLASNIK matematičko-fizički i astronomski · PERIODICUM mathematico-physicum et astronomicum

na str. 201 ima nešto o kvadratnoj involuciji

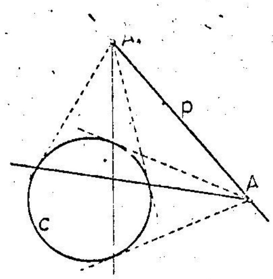
Dr. Vilim Niče:

O IMAGINARNIM ELEMENTIMA U GEOMETRIJI

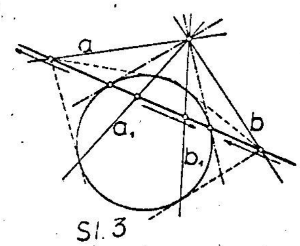
Govoriti o imaginarnim elementima u geometriji uopće značilo bi zahvatiti u ogroman dio čitave geometrije. Radi ograničenog vremena i prostora obuhvatit ćemo ovdje samo izvjestan dio naslovom označene građe, što i jest zapravo naša namjera. Govorit ćemo o konjugirano kompleksnim točkama, pravcima, ravninama i imaginarnim čunjosjecima, i to samo u projektivnoj geometriji. Dakle u geometriji u kojoj ne postoje nikakovi metrički odnosi. Osvrnut ćemo se na te elemente naročito u vezi s nekim krivuljama te pravčastim i općim plohama, čiji su oni i sastavni dijelovi.



Sl. 1.



Sl. 2



Sl. 3

Imaginarni brojevi javljaju se nesvijesno već kod starih Indijaca, pri pokušavanju vađenja drugog korijena iz negativnih brojeva. Kasnije su se time bavili mnogi, kao na pr. Cardano (1560). Izraze realno i imaginarno uvodi tek René Descartes (1596—1650), a u njegovom djelu „Géométrie" prvi puta se geometrija sastaje s pojmom imaginarno. Imaginarni geometrijski elementi postoje od sada u geometriji, ali su oni vezani uz koordinatni sustav analitičke geometrije, koji je uveo Descartes. Imaginarne točke javljaju se u koordinatnoj ravnini kao one točke, kojima su koordinate kompleksni brojevi. Ako nam na pr. poznate jednadžbe $x^2 + y^2 = r^2$ i $y = ax + b$ predočuju kružnicu c i pravac p kao na sl. br. 1.

onda će vrijednosti za x i y, koje zadovoljavaju ove obje jednadžbe, biti neki konjugirano kompleksni brojevi, koje smatramo koordinatama imaginarnih sjecišta ovog pravca i ove kružnice. Par konjugirano kompleksnih točaka dobili smo prema tome ovdje kao imaginarna sjecišta pravca i kružnice.

Zamislimo li takav par točaka spojen s nekom realnom točkom, tada dobivamo par konjugirano kompleksnih pravaca, a nekim realnim pravcem i tim točkama postavljene ravnine daju par konjugirano kompleksnih ravnina. Posve analogno dobivamo analitičkim putem i imaginarne čunjosjeke. Presijecimo na pr. kuglu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ ravninom $z = d$, ako je $|d| > r$. Tu će biti i $d^2 > r^2$, dakle je $r^2 - d^2 = -n$, gdje n neki racionalan broj. Jednadžba presjeka kugle s tom ravninom glasi $x^2 + y^2 = -n$, dakle je polumjer te kružnice $\sqrt{-n}$, t. j. imaginaran. Kada bismo stavili $d = r$ dobili bi jednadžbu presjeka $x^2 + y^2 = 0$, ili $(x + iy)(x - iy) = 0$, a to je par tako zvanih minimalnih ili izotropnih pravaca, koje ćemo kasnije još dosta spominjati. (13)

U izgradnji projektivne geometrije, koja se je jače počela razvijati nakon objelodanjenja djela »Lecons de géometrie descriptive« od Gasparda Monge-a 1795. god., osjećala se neprestano i sve jače potreba uvođenja imaginarnosti u tu geometriju. No bez koordinatnog sustava i imaginarnih koordinata nikako se nije dalo uhvatiti imaginarne geometrijske elemente, a takovih koordinata u projektivnoj geometriji nema. Sam Jakov Steiner, koga se općenito smatra ocem projektivne geometrije, kao što se Gasparda Monge-a smatra ocem deskriptivne geometrije, nazivao je imaginarne geometrijske elemente sablastima (Gespenste), jer ih nikako nije mogao dohvatiti sredstvima projektivne geometrije. Tek von Staudt uspio je definirati imaginarne geometrijske elemente pomoću postojećih realnih geometrijskih tvorevina tako, da su oni potpuno jednakopravni s realnim elementima (Beiträge zur Geometrie der Lage, god. 1856—60).

Konjugirano kompleksne geometrijske elemente prve vrste, a to su točke, pravci i ravnine, definira von Staudt kao dvostruke točke t. zv. eliptičko involutornog niza točaka, odnosno dvostruke pravce i ravnine eliptičko involutornog pramena pravaca i ravnina. Uvođenjem dvostrukog smisla k[illegible]tanja involutorno pridruženih točaka, pravaca i ravnina u tim involutornim nizovima i pramenovima, uspjelo je von Staudtu i odijeliti konjugirano kompleksne elemente jedan od drugoga.

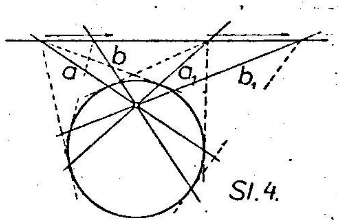
Pogledajmo sada, kako je von Staudt definirao te konjugirano kompleksne elemente prve vrste. Uzmimo dva projektivna niza točaka i položimo ih jedan na drugoga. Mi to tada zovemo dva kolokalna niza. Znademo, da su dva projektivna niza ona, kod kojih četiri točke jednoga niza i četiri pridružene točke drugoga niza imaju isti dvoomjer. Projektivnim nizovima zovemo ih zato, jer ih možemo dobiti jedan iz drugoga projiciranjem iz neke točke na temelju činjenice, koju je našao još grčki učenjak Papus u 4. st. pr. Kr. u Aleksandriji, a koja glasi: Dvomjer četiriju zraka nekog pramena jednak je dvoomjeru četiriju sjecišta tih zraka s bilo kojim pravcem. Pretpostavimo sada, da se u ta dva kolokalna niza nalaze takova dva para točaka A, B i A_1, B_1, kod kojih će točki A jednoga niza biti pridružena točka A_1 u suprotnom nizu bez obzira da li ta točka A pripada prvom ili drugom nizu. Dakle će i točki A_1 biti pridružena točka A bez obzira, da li ova pripada drugom ili prvom nizu. Analogno neka vrijedi za par B, B_1. Ovakova dva kolokalna projektivna niza zovu se involutoran niz, ili kratko involucija. Očito je, da su dva obična projektivna niza zadana s tri para pridruženih točaka. Involucija je određena s dva takova para, jer je time već ispunjen gornji uvjet. Na pr. $ABA_1 \overline{\wedge} A_1B_1A$ ($\overline{\wedge}$ = znak projektivnosti). Putujemo li jednom točkom po takovom involutornom nizu, putovati će istovremeno i njoj pridružena točka u tom nizu. Ta dva putovanja mogu biti istosmjerna, a mogu biti i raznosmjerna. Ako su ta dva putovanja raznosmjerna, tada će se parovi pridruženih točaka dva puta sresti, t. j. ovakova će involucija imati dva dvostruka elementa. Tri ili više takovih dvostrukih elemenata ne može ta involucija imati, jer su u takovom slučaju dva kolokalna projektivna niza identična. Ovakova involucija s dvije dvostruke točke zove se hiperbolna. Bilo koje dvije realne točke određuju na njihovoj spojnici neku hiperbolnu involuciju, kojoj su one dvostruke točke. Pretpostavimo li sada, da su spomenuta dva putovanja istosmjerna, onda ta dva involutorno pridružena niza neće imati realnih dvostrukih točaka, ali s ovakova dva involutorno pridružena niza definirao je von Staudt par imaginarnih točaka. Ovakova involucija zove se eliptička. Naše gore spomenuto putovanje jedne točke i njoj pridružene točke u eliptičkoj involuciji možemo vršiti u dva smjera, t. j. postoje dva smisla obilaženja. Svakim ovim smislom obilaženja definirana je po jedna imaginarna točka u konjugirano kompleksnom paru.

Da nam bude jasnija ovakova definicija konjugirano kompleksnog para točaka, usporedimo je s malo prije analitički definiranim konjugirano kompleksnim parom točaka, odstranivši koordinatni sustav. Uzmimo opet kružnicu c i pravac p, koji ju ne siječe realno. (Sl. br. 2.) Polara neke točke A na pravcu p, obzirom na kružnicu c, siječe taj pravac u nekoj točki A_1, a polara ove točke siječe pravac p opet u točki A. Točke A, A_1 nazivamo parom konjugiranih polova. Svaka točka na pravcu p ima na taj način pridružen involutorno svoj konjugirani pol, a svi ti parovi čine upravo onu eliptičku involuciju, kojom je definiran naš konjugirano kompleksan par sjecišta pravca p i kružnice c.

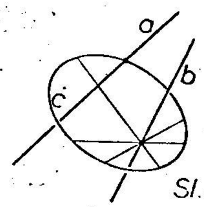
Kada bi pravac p sjekao kružnicu c u dvije realne točke, dobili bi na tom pravcu posve analogno hiperbolnu involuciju, kojom su definirana realna sjecišta kao dvostruke točke te involucije.

Neizmjerno daleki pravac ravnine kružnice c siječe ju u paru imaginarnih točaka, koje nazivamo apsolutnim točkama te ravnine. Spojnice bilo koje realne točke u toj ravnini s tim apsolutnim točkama daju par već spomenutih izotropnih pravaca. U ovakovom paru izotropnih pravaca siječe kuglu svaka njena tangencijalna ravnina. Neizmjerno daleka ravnina prostora siječe analogno svaku kuglu u imaginarnoj kružnici, koju zovemo apsolutnim čunjosjekom. Svaka ravnina prostora siječe apsolutni čunjosjek u svom paru apsolutnih točaka.

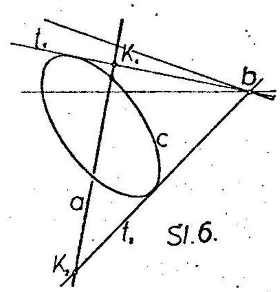
Spojimo li točke niza eliptičke involucije na nekom pravcu s nekom točkom, ili s nekim pravcem, dobit ćemo eliptičko involutaran pramen pravaca, odnosno ravnina, kojima je definiran konjugirano kompleksan par pravaca, odnosno ravnina. Parovi pridruženih zraka u eliptičko involutornom pramenu zraka, kojim je definiran par izotropnih pravaca, međusobno su okomite zrake, jer su to zapravo parovi konjugiranih promjera neke kružnice. Imamo li naime neki čunjosjek i neki pravac, onda pol toga pravca spojen sa sjecištima njegovim na čunjosjeku daje tangente toga čunjosjeka u tim sjecištima. Ove su tangente dvostruke zrake involutornog pramena, koji je nastao spajanjem toga pola s točkama opisane involucije na tom pravcu. (Sl. br. 3.) Ako pravac siječe čunjosjek imaginarno, onda je njegov pol realno sjecište imaginarnih tangenata toga čunjosjeka u njegovim imaginarnim sjecištima s tim pravcem. (Sl. br. 4.) Ako je pravac neizmjerno dalek, onda je njegov pol središte, a involuciju imaginarnog para tangenata iz te točke čine parovi konjugiranih promjera toga čunjosjeka. Ako je taj čunjosjek kružnica, onda su takovi parovi, kao što znademo, međusobno okomiti promjeri. Ovdje također vidimo, da je središte kružnice sjecište njenih imaginarnih tangenata



Sl. 4.



Sl. 5.



Sl. 6.

u apsolutnim točkama. Kod krivulja višega reda koje prolaze apsolutnim točkama, t. j. kod tako zvanih cirkularnih krivulja, zovu se takove točke četverostruki fokusi.

Povučemo li tangente iz apsolutnih točaka na bilo kakovu krivulju, onda se njihova sjecišta zovu obični fokusi te krivulje. Elipsa ima na pr. par realnih i par imaginarnih fokusa. Odredimo li polaru jednog realnog fokusa (ravnalicu) te parove konjugiranih polova na toj polari spojimo s tim fokusom, dobit ćemo involutoran pramen zraka, kojemu dvostruke zrake čine par izotropnih tangenata te elipse povučenih iz toga fokusa. Parovi pridruženih zraka su u toj involuciji međusobno okomiti. Spomenut ćemo još, da par realnih fokusa elipse možemo shvatiti kao sjecišta njene velike osi kružnicom, koja je opisana oko jednog njenog tjemena na maloj osi, a kojoj je polumjer jednak njenoj velikoj poluosi. Par imaginarnih fokusa te elipse dobivamo posve analogno kao imaginarna sjecišta njene male osi s kružnicom opisanom oko jednog tjemena na velikoj osi, a kojoj je polumjer jednak maloj poluosi te elipse.

Napustimo sada naša razmatranja imaginarnih elemenata, pa ih dalje promatrajmo u vezi s nekim geometrijskim tvorevinama, ili kao sastavne dijelove tih tvorevina. Zabavit ćemo se najprije pravčastim plohama 3. i 4. reda.

Imamo li u prostoru neki čunjosjek c i dva pravca a i b postavljene tako, da jedan (a) siječe čunjosjek c, a drugi (b) ga ne siječe, onda svi pravci prostora, koji sijeku pravce a, b, i čunjosjek c, sačinjavaju neku pravčastu plohu 3. reda. Pravac a joj je dvostruk, a pravac b jednostruki pravac. Ako pravac a kao i pravac b, ne siječe čunjosjek c, onda je takova ploha 4. reda. Ako pravac b, koji ne siječe čunjosjek c, probada ravninu čunjosjeka c iznutra (sl. br. 5), onda su sve izvodnice takove plohe 3. reda realne, jer pravcem b ne možemo postaviti ravnine, koja ne bi sjekla čunjosjek c. Ako pravac b (okomit na ravninu slike) probada tu ravninu izvan čunjosjeka c (sl. br. 6), onda u ravninama jednog dijela pramena ravnina pravca b postoje parovi imaginarnih izvodnica, jer te ravnine imaginarno sijeku čunjosjek c. Granične ravnine toga pramena između ravnina s realnim i imaginarnim izvodnicama zovu se torzalne ravnine. Par realnih izvodnica u toj ravnini pada skupa, a zove se taj pravac, kao što znademo, torzalan pravac. Torzalni pravci t_1, t_1 sijeku dvostruki pravac a u kuspidalnim točkama K_1, K_2.

Kod ovakovih ploha 4. reda su oba pravca dvostruka i na svakom od njih mogu postojati analogne dvije kuspidalne točke s pripadna dva torzalna pravca.

Kako u literaturi nije posvećena osobita pažnja ovom imaginarnom sastavnom dijelu ovakovih pravčastih ploha, zaokupio je on moj interes. Najviše me je interesiralo postoje li i kada na izoliranom dijelu dvostrukog pravca točke, kojima prolazi par izotropnih izvodnica ove plohe? Analogno kao na nepravčastim plohama 2. reda nazvane su ove točke kružnim točkama. Kao što je poznato, postoje na pr. na troosnom elipsoidu četiri točke, u kojima tangencijalna ravnina siječe taj elipsoid u paru izotropnih pravaca. Pomičemo li naime tu ravninu paralelno na stranu elipsoida, sjeći će svaka takova ravnina u novom položaju taj elipsoid u kružnici. Na kugli su sve točke kružne.

Bitna oznaka ovakovih kružnih točaka na pravčastim plohama 3. reda je ta, da se svih ∞^2 čunjosjeka ovakove plohe (*) projicira iz te točke u kružnice, na ravnine paralelne s ravninom izotropnih izvodnica te kružne točke. Dakle posvema analogno kao kod nepravčastih ploha 2. reda, ili kod stereografske projekcije kugle. Istraživanjem problema kružnih točaka došlo se je do ovih rezultata:

a) Kružne točke mogu postojati samo na onim pravčastim plohama 3. reda s realnim torzalnim pravcima, kod kojih je najkraća udaljenost jednostrukog i dvostrukog pravca manja od polovine udaljenosti dvostrukih točaka involucije na jednostrukom pravcu, u kojoj taj pravac sijeku parovi realnih izvodnica te plohe.

b) Nuždan i dovoljan uvjet za kružnu točku na konoidu 3. reda je taj, da su mu torzalni pravci realni i jedan na drugom okomiti.

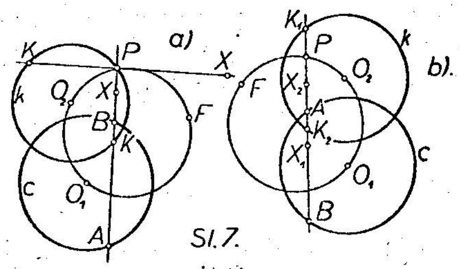
Konoid 3. reda je takova pravčasta ploha, kojoj je jednostruki pravac u neizmjernosti. Najpoznatiji i najinteresantniji konoid 3. reda je Plückerov konoid. Presiječemo li uspravan kružni valjak ravninom i u svakoj točki toga presjeka postavimo okomicu na jednu određenu izvodnicu toga valjka, onda je ta izvodnica dvostruki pravac Plückerovog konoida, kojemu su ove okomice izvodnice. Kod ovog konoida već je davno poznata činjenica, da mu se svi čunjosjeci projiciraju paralelno s dvostrukim pravcem u kružnice, i to na ravnine paralelne s ravninama parova izvodnica ovoga konoida. Naša kružna točka nalazi se dakle u neizmjerno dalekoj točki njegovog dvostrukog pravca. (*)

Govoreći o Plückerovom konoidu donijet ćemo još neke rezultate, koji se tiču toga konoida, a u vezi su s imaginarnim geometrijskim elementima. Siječemo li taj konoid paralelnim ravninama, pa te presjeke projiciramo u smjeru dvostrukog pravca na neku direkcionu ravninu, dobit ćemo na toj ravnini ∞^1 cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga, koje sve zajedno imaju isti četverostruki fokus. Siječemo li takav konoid ravninama paralelnim s nekim pravcem, pa te presjeke projiciramo kao i malo prije na jednu direkcionu ravninu, ležat će ∞^1 dobivenih četverostrukih fokusa tih cirkularnih krivulja na jednoj kružnici. Polumjer i središte te kružnice lako se mogu odrediti. Analogna razmatranja mogu se izvršiti i na svim sličnim konoidima s Plückerovim, ali sve to bit će potanje objelodanjeno, kada za to dođe vrijeme. Problem kružnih točaka na pravčastim plohama 4. reda mnogo je teži i opširniji od onoga na takovim plohama 3. reda. Na takovim plohama ne mogu se sigurno općeno nalaziti više od četiri kružne točke. Na onima koje imaju dvostruki pravac, ne mogu se na jednom takovom pravcu nalaziti sigurno više od dvije kružne točke. Kod nekih specijalnih ovakovih ploha postoji zanimiva povezanost kružnih presjeka s kružnim točkama. U glavnome je kod tih ploha u tom smislu otvoreno još široko polje rada.

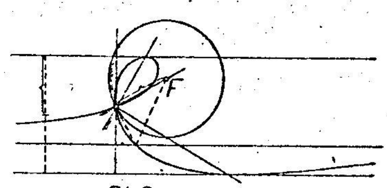
U vezi s kružnim točkama na pravčastim plohama 3. i 4. reda zanimivo je spomenuti i slijedeće: U nekoj linearnoj hiperbolnoj kongruenciji ima ∞^5 pravčastih ploha 3. reda i ∞^7 pravčastih ploha 4. reda. Među ovima ima ∞^4 ploha 3. reda i ∞^6 ploha 4. reda na kojima se nalaze kružne točke. Među ovakovim plohama 4. reda ima ih ∞^5 takovih, kod kojih će se njihovi čunjosjeci projicirati iz kružne točke na odgovarajuću ravninu u pramen koncentričnih kružnica. U parabolnoj linearnoj kongruenciji vrijedi za plohe 4. reda isto kao u hiperbolnoj, dok u kongruenciji bisekanata kubnog čunjosjeka ima ∞^5 pravčastih ploha 4. reda, od kojih ∞^4 posjeduju kružne točke.

Govoreći o pravčastim plohama u vezi s imaginarnim elementima, moramo spomenuti i takove pravčaste plohe, koje se sastoje iz samih imaginarnih elemenata i to baš izotropnih pravaca. Uzmemo li dva mimosmjerna pravca i neki čunjosjek u prostoru tako, da se međusobno ne sijeku, tada znademo, da svi pravci prostora, koji ta tri elementa sijeku, čine neku pravčastu plohu 4. reda. Ako pravci ostanu realni, a umjesto običnog uzmemo apsolutni čunjosjek, onda smo dobili pravčastu plohu 4. reda s dva dvostruka realna pravca, kojoj su sve izvodnice parovi izotropnih pravaca. Uzmemo li nadalje jedan kubni čunjosjek i apsolutni čunjosjek, tada svi imaginarni pravci prostora, koji sijeku ova dva čunjosjeka, čine neku plohu 8. reda, kojoj je taj kubni čunjosjek četverostruka krivulja, a svakom njegovom točkom prolaze dva para njenih izotropnih izvodnica.

Spomenuli smo u početku cirkularne krivulje. Ovakove krivulje 3. reda roda nultoga i neke 4. reda roda nultoga mogu se konstruktivno dobiti pomoću t. zv. posveopćene kvadratne inverzije jedne kružnice na nekoj drugoj kružnici. Zadajmo po volji neke kružnice c i k, a na posljednjoj i neku točku P. Svaka zraka točke P siječe kružnicu c u nekom realnom ili imaginarnom paru točaka A, B, a kružnicu k u drugoj točki K. Potražimo li sada na svim tim zrakama one točke X, koje su konjugirano pridruženi polovi točaka K, (ako je A, B realno onda je $(ABKX) = -1$), onda sve te točke leže na nekoj cirkularnoj krivulji 3. reda roda nultoga. Označimo li središta kružnica c, k s O_1, O_2, a točkama O_1, O_2, P povućemo kružnicu, tada je zanimivo kod tih krivulja, da će ona točka F na toj kružnici, za koju vrijedi $(O_1 P O_2 F) = -1$, biti četverostruki fokus te krivulje. Sl. br. 7 a).



Sl. 7.



Sl. 8.

Ne leži li točka P na kružnici k, onda će svaka njena zraka sjeći tu kružnicu u dvije točke K_1, K_2, a njima pridružene točke X_1, X_2 na gore spomenuti način sačinjavat će neku cirkularnu krivulju 4. redo roda nultoga. Za četverostruki fokus ovakovih krivulja vrijedi također gornji harmonijski dvoomjer. Sl. br. 7 b).

Neka svojstva ovakovih krivulja mogu se vrlo lako dobiti pomoću prostornih razmatranja na pravčastim plohama, ako te krivulje smatramo projekcijama ravninskih presjeka tih ploha iz kružne točke na određenu ravninu. Pomoću takovih razmatranja može se četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda dobiti i ovako: Dirališta paralelnih tengenata s asimptotom te krivulje spojimo s njenom dvostrukom točkom (kod cirkularnih krivulja su to okomiti pravci), a iz te točke postavimo okomicu na asimptomu. Preklopimo li ovu okomicu oko one jedne spojnice na suprotnu stranu i na taj pravac nanesemo od dvostruke točke polovicu udaljenosti između tangenata te krivulje paralelnih s asiptomom, dobivamo četverostruki fokus te krivulje. Sl. br. 8. Prenesti treba spomenutu dužinu uvijek na stranu vitice te krivulje. Kod ovog posljednjeg rezultata malo je neobično, da je on posve metričke naravi, ali ovi metrički odnosi dobiveni su iz prostornih odnosa na pravčastim plohama 3. reda. Posvema analogno možemo dobiti i četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 4. reda, dobivenih na spomenuti način.

Kod ovakovog razmatranja unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda zapažena je kod njih jedna osobita kružnica, kojoj je središte u četverostrukom fokusu, a prolazi dvostrukom točkom te krivulje. Svaka unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda može se smatrati cisoidom ove kružnice i svoje asimptote. Odavle direktno slijedi, da su uvijek dvostruka točka, četverostruki fokus i sjecište krivulje s asimptotom, vrhovi pravokutnog trokuta, kojemu je u dvostrukoj točki pravi kut, a kateta do četverostrukog fokusa jednaka polovici udaljenosti između tangenata paralelnih s asimptotom.

Analogno kao što cirkularne krivulje prolaze apsolutnim točkama svoje ravnine, mogu i neke opće nepravčaste plohe prolaziti apsolutnim čunjosjekom. Razlika između ovih i običnih nepravčastih ploha je u glavnom takova, kao što je na pr. razlika između troosnog elipsoida i kugle kod ploha drugoga reda. Provedemo li analogno posveopćenu prostornu kvadratnu inverziju, kao što smo ju malo prije opisali u ravnini, i to tako da mjesto kružnica c i k uzmemo kugle C i K, a centar inverzije P uzmemo negdje na kugli K ili izvan nje, tada ćemo u prvom slučaju dobiti opću plohu 3. reda s jednom dvostrukom točkom, a u drugom slučaju opću plohu 4. reda s jednom dvostrukom točkom i jednom dvostrukom kružnicom, koje prolaze apsolutnim čunjosjekom. Svi presjeci ovakovih ploha su cirkularne krivulje 3., odnosno 4. reda. Treba ovdje spomenuti, da četverostruki fokusi svih presjeka s nekim pravcem paralelnih ravnina leže na nekom pravcu, koji je okomit na smjeru tih ravnina. Smjerova ravnina ima ∞^2, dakle je uz svaku ovakovu plohu 3. ili 4. reda vezana jedna kongruencija ovakovih pravaca.

Nalazi li se točka P na spojnici središta kugala C i K, tada će tom našom posveopćenom inverzijom izvedena ploha biti rotaciona. Spomenuta kongruencija pravaca prelazi ovdje u snop pravaca, čiji se vrh nalazi na osi plohe i to u četverostrukom fokusu svih meridijanskih presjeka. Na temelju malo prije spomenutoga izlazi, da svi ravninski presjeci ove točke imaju u njoj svoj četverostruki fokus. Sve ravnine dvostruke točke sijeku takove plohe u unikurzalnim cirkularnim krivuljama. Četverostruki fokusi ovih ∞^2 krivulja nalaze se kod ovakovih rotacionih ploha na nekoj kugli, koja ima središte na osi, a prolazi dvostrukom točkom i spomenutim vrhom. Postavimo li dvostrukom točkom obične nerotacione ovakove plohe svih ∞^2 ravnina, tada četverostruki fokusi ovakovih unikurzalnih presječnih krivulja leže na nekoj plohi 5. reda. Ova ploha ima uz ostala zanimiva svojstva jednu hiperbolnu i jednu eliptičku biplanarnu točku. To su takove dvostruke točke, kod kojih se njihov tangencijalni stožac 2. reda raspada u par realnih, odnosno imaginarnih ravnina.

Vidjeli smo kod rotacionih ploha 3. i 4. reda, koje prolaze apsolutnim čunjosjekom, da četverostruke fokuse presjeka ovakovih ploha možemo zapravo dobiti kao okomite projekcije izvjesne točke osi na te ravnine. Ova je točka na osi, kao što već znademo, četverostruki fokus svih meridijanskih presjeka te plohe. Ovaj zajednički četverostruki fokus, odnosno vrh poznatog snopa pravaca, može biti i u tjemenu na samoj toj plohi. Sve ravnine ove točke sjeći će prema tome ovakovu plohu 3. reda u Lagrangeovim strofoidalama.

Među općim plohama 3. reda koje prolaze apsolutnim čunjosjekom ima međutim i takovih ploha, koje ovakovu točku imaju na svojoj površini, ma da nisu rotacione. Zamislimo si u prostoru tri točke P, A i B, od kojih točke A, B mogu biti ili realne, ili imaginarne, a mogu pasti i skupa. Postavimo sada točkama A, B svih ∞^2 kugala. Točku P spojmo sa središtem svake te kugle i tom spojnicom probodimo tu kuglu. Sva ovakova probodišta leže na nekoj općoj plohi 3. reda, koja prolazi apsolutnim čunjosjekom. Ta će ploha biti dvodjelna, jednodjelna ili će imati dvostruku točku prema tome, jesu li točke A, B realne, imaginarne ili padaju skupa. Radi analogije sa strofoidalama nazvane su ovakove plohe strofoidalnim plohama 3. reda. Točka P na ovakovim plohama je vrh imaginarnog stošca 2. reda, koji tu plohu tangira duž apsolutnog čunjosjeka. Svi ravninski presjeci kroz ovu točku su Lagrangeove strofoidale, jer im je točka P četverostruki fokus. Usporedimo li ovakovu plohu s kuglom, tada točka P odgovara središtu te kugle, jer je i to središte vrh imaginarnog tangencijalnog stošca kugle duž apsolutnog čunjosjeka. Ova istaknuta činjenica točke P daje ovoj plohi i daljnje bitne oznake kugle. Na pr. četverostruki fokus svakog ravninskog presjeka ove plohe je okomita projekcija točke P na ravninu toga presjeka. Odavle direktno izlazi analogija s kuglom za sve ravninske presjeke kroz jednu točku i kroz neki pravac. Uz točku P imaju ovakove plohe daljnjih šest kružnih točaka, među kojima se nalaze i točke A, B. Vrlo lako se može naći broj i geometrijsko mjesto ravnina, koje ovakove plohe sijeku u strofoidalama, a prolaze jednim pravcem ili jednom po volji uzetom točkom.

Među općim plohama 3. i 4. reda, koje prolaze apsolutnim čunjosjekom, postoje međutim i takove, kojima se vrh ovakovog imaginarnog tangencijalnog stošca duž apsolutnog čunjosjeka nalazi izvan njihove površine. Njih se može dobiti cisoidalnim putem iz neke kugle i ravnine analogno kao cisoidu iz kružnice i pravca. Središte te kugle bit će vrh toga imaginarnog stošca. Te su plohe 3. ili 4. reda prema tome, da li se točka P nalazi ili ne nalazi na kugli. Daljnjim razmatranjem ovih ploha ne možemo se ovdje baviti, a niti je to potrebno, jer će o njima biti govora pobliže u drugo vrijeme i na drugom mjestu.

Završavajući moram napomenuti, da odabirući gradivo za ovaj kolokvij, nisam se mogao odhrvati želji da ne iskoristim priliku, pa da se bar donekle otputim u golemo i neizmjerno bogato carstvo matematski definiranih ploha i krivulja, kod kojih baš njihovi imaginarni sastavni dijelovi odlučuju o bogatstvu i raznolikosti oblika njihovih realnih dijelova. Sjetimo se samo kuspidalnih točaka i torzalnih pravaca kao prelaznih mjesta pravčastih ploha s njihovog realnog dijela na imaginarni, ili kružnih točaka općih ploha kao prelazna mjesta s realnih cikličkih presjeka na imaginarne takove presjeke i t. d. Imajući ovo u vidu smatrao sam i zgodnim i potrebnim, da se otputim upravo u ovo područje geometrije u vezi s imaginarnim elementima, donesavši usput i neke s time povezane rezultate, povađene iz nekih objelodanjenih radova, kao i iz nekih neobjelodanjenih, koji će izaći kada to bude moguće.