RAD
HRVATSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
RAZREDA MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNOGA
KNJIGA 278 (86) 1945 GOD.

Poklon od pisca

Dr. VILIM NIČE

KRIVULJE I PLOHE 3. I 4. REDA NARTALE POMOĆU KVADRATNE INVERZIJE

U ZAGREBU 1945
NARODNA TISKARA, KAPTOL 27

Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale s pomoću kvadratne inverzije

Napisao

Prof. Dr. Vilim Niče

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnog razreda 26. siečnja 1944.

I. Krivulje 3. i 4. reda roda nultoga.

Uvod. Ravnične krivulje 3. i 4. reda roda nultoga iztražene su do danas najtemeljitije. No među njihovim brojnim svojstvima može se još uviek naći po koja manje poznata ili takova, koja se može jednostavnije izvesti. Mi ćemo te krivulje izvesti pomoću tako zvane kvadratne inverzije, te ćemo pomoću ove izvesti na njima neka njihova svojstva, od kojih će se neka moći upotrebiti i za konstruktivne svrhe. Ovakav način izvođenja poslužit će nam vrlo zgodno kod analognog izvođenja i iztraživanja nekih obćih ploha 3. i 4. reda, što će biti sadržaj drugog i trećeg diela ove radnje.

1. Neka su P, P_1 i P_2 po volji uzete tri točke u ravnini, a točke P_1, P_2 neka se nalaze na nekoj čunjosječnici c tako, da spojnica p tih točaka bude polara pola P s obzirom na tu čunjosječnicu. Odaberimo po volji točku A i spojimo s točkom P. Točku, konjugiranu točki A na toj spojnici, s obzirom na čunjosječnicu c, označit ćemo s A_c. Konjugirane točke A, A_c kvadratno su srodne[1]. Uzmemo li mjesto točke A neki lik k, tada je njemu na isti način pridružen neki lik k_c, a za ta dva lika kažemo da se nalaze u ovakvoj srodnosti. Točka P uviek je realna, dok točke P_1, P_2 mogu biti realne ili konjugirano imaginarne, a mogu pasti i skupa u točku P. Točke P_1, P_2 određene su u svakom slučaju kao dvostruke točke involu-

[1] J. Thomae: Untersuchungen über zwei-zweideutige Verwandschaften und einige Erzeugnisse derselben. Abhandl. der mat. phys. Classe der Kön. Sächs. Gesel. der Wissenschaften. Bd. XXI, str. 440. Ova se srodnost zove kvadratna inverzija, a odkrio ju je već Bellavitis 1838. god.

cije konjugiranih točaka na polari p. Drugim riečima, točka P može biti izvan, unutar ili na čunjosječnici c. Nalazi li se točka P u središtu čunjosječnice c, koja je kružnica, tada ovakva srodnost prelazi u običnu inverziju, a točke P_1, P_2 nalaze se u absolutnim točkama ravnine. Vidimo dakle, da je ovakva srodnost zapravo posveobćena inverzija, t. j. srodnost nastala kvadratnom substitucijom, ako se želimo izraziti analitički. Svaka će dakle krivulja n-toga reda prieći u takvoj srodnosti u krivulju 2n-toga reda[2].

Budući da su točka P i pravac p pol i polara čunjosječnice c, sliedi, da je svakoj točki pravca p pridružena točka P, a svakoj točki pravaca PP_1 i PP_2 točke P_1 i P_2.

2. Imamo li u ravnini pravac s, koji čunjosječnicu c sieče u dvie realne ili imaginarne točke M, N, tada je tom pravcu pridružena na opisani način neka čunjosječnica s_c^2, koja je određena točkama P, P_1, P_2, M i N. Točke P, P_1, P_2 pridružene su presječnim točkama pravca s s pravcima p, PP_1 i PP_2. Jasno je, da vriedi i obratno, t. j. takvoj čunjosječnici s_c^2 pridružen je pravac s, koji prolazi točkama M i N.[3]

Uzmimo mjesto pravca s neku čunjosječnicu k, koja prolazi točkama P_1, P_2, a čunjosječnicu c sieče u točkama M i N. U našoj srodnosti bit će pridružena toj čunjosječnici opet neka čunjosječnica k_c^2, koja opet prolazi točkama P_1, P_2, M i N.[4] Točkama P_1 i P_2, M i N određen je dakle u našoj srodnosti involutoran pramen čunjosječnica. Ako su čunjosječnice c i k kružnice, onda je i čunjosječnica k_c^2 kružnica, jer su imaginarne točke M i N absolutne točke.

3. Povucimo čunjosječnicu k tako, da prolazi točkom P, a čunjosječnicu c sieče u točkama M, N, U i V. Čunjosječnici k pridružena krivulja k_c^8 mora radi kvadratne srodnosti biti četvrtoga reda. Kazali smo, da je točki P u našoj srodnosti pridružen cio pravac $p = P_1 P_2$, jer svaka točka na tom pravcu čini s točkom P par konjugiranih točaka s obzirom na čunjosječnicu c. Neka pravac p sieče čunjosječnicu k u realnom ili imaginarnom paru točaka T_1, T_2. Točkama T_1, T_2 krivulje k pridružena je dakle samo točka P na krivulji k_c^8, a to znači da je ta točka P dvostruka točka krivulje k_c^8. Spojnice točaka T_1, T_2 s točkom P daje tangente kri-

[2] Salmon-Fiedler-Dingeldey: Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Th. II. str. 360.
[3] J. Thomae: Op. cit., str. 441.
[4] J. Thomae: Op. cit., str. 442.—444.

vulje k_c^3 u toj točki. Svaka zraka točke P sieče samo još u jednoj točki čunjosječnicu k, dakle se na svakoj toj zraki nalazi samo po jedna točka krivulje k_c^3. Dakle krivulja k_c^4 može biti samo 3. reda roda nultoga. Krivulja 4. reda razpala se je ovdje u krivulju 3. reda roda nultoga i pravac p, koji je pridružen točki P na čunjosječnici k. Red ove krivulje može se dokazati ovako: Svaka čunjosječnica točaka P, P_1, P_2 sieče čunjosječnicu k u daljnje tri točke, dakle će i njoj srodan pravac sjeći krivulju k_c u tri točke. Prema tome je krivulja k_c^3 trećega reda. Vrlo jednostavno mogla bi se ova krivulja prikazati i kao proizvod dvaju jedno-dvoznačnih pramenova pravaca.

Ako su točke T_1, T_2 na pravcu p imaginarne, krivulja k_c ima izoliranu dvostruku točku. Ako te točke padnu skupa, t. j. pravac p dira čunjosječnicu k, ima krivulja k_c^3 šiljak. Uzme li se točka P na čunjosječnici c, imat će krivulja k_c^3 u toj točki opet dvostruku točku, u kojoj će ona dirati krivulje k i c.

Krivulja k_c^3 mora prolaziti točkama M, N, U, V, P, P_1 i P_2, a točka P joj je dvostruka točka. Pomoću ovih sedam točaka ta je krivulja određena te bi se mogla i pomoću tih točaka konstruirati[6].

4. Ako čunjosječnica k ne prolazi točkama P, P_1, P_2, bit će njoj pridružena krivulja k_c^4 četvrtoga reda, opet roda nultoga. Čunjosječnica k neka sieče čunjosječnicu c opet u točkama M, N, U i V, a polaru p u točkama T_1, T_2. Točkama T_1, T_2 čunjosječnice k pridružena je na krivulji k_c^4 točka P, dakle je ta točka dvostruka na krivulji k_c^4, a spojnice PT_1 i PT_2 su tangente krivulje u toj točki. Spojnice PP_1 i PP_2 sieku svaku čunjosječnicu k u dvie točke, a prema tome su i točke P_1 i P_2 dvostruke na krivulji k_c^4. Krivulja k_c^4 je dakle 4. reda roda nultoga. Tangente povučene iz točke P na čnjosječnicu k ostaju tangente i za krivulju k_c^4. Jednostrukim točkama M, N, U, V, dvostrukim točkama P, P_1, P_2 i s četiri tangente krivulje k_c^4 u točki P dano je 14 elemenata krivulje k_c^4, kojima je ona određena.

Red krivulje k_c^4 dokazat ćemo isto tako kao kod krivulja 3. reda: Svaka čunjosječnica točaka P, P_1, P_2 sieče čunjosječnicu k u četiri točke, a prema tome je ona četvrtoga reda. Moglo bi se

[6] E. Weyr: Theor. der mehrd. geom. Elementarg. und alg. Curven und Flächen als deren Erzeugnisse. II. Theil, str. 106.

ovdje vrlo jednostavno pokazati, kako ova krivulja može postati i kao proizvod dvaju projektivnih pramenova čunjosječnica[6].

5. Vidjeli smo, da su točke P, P_1, P_2 krivulje k_c^4 dvostruke. Od točaka $P, P_1 P_2$ točka je P uviek realna, dok točke P_1 i P_2 mogu biti i konjugirano imaginarne. Svaka od točaka P, P_1, P_2 može biti izolirana, a kada će to biti, ovisi o međusobnom položaju točke P i čunjosječnica c i k. Jasno je, da će točke P_1 i P_2 biti uviek imaginarne, kada se točka P nalazi unutar čunjosječnice c. Mogu i sve tri dvostruke točke krivulje k_c^4 pasti na čunjosječnici c skupa. U tom slučaju dira krivulja k_c^4 sama sebe u toj točki.

6. Sjecišta M, N, U i V čunjosječnica c i k mogu biti realne ili imaginarne (u konjugiranim parovima). Ako su čunjosječnice c i k kružnice, tada je jedan od parova MN i UV par absolutnih točaka ravnine, dakle je krivulja k_c^4 u tom slučaju cirkularna.

Kod inverzije, kao osobitog slučaja naše srodnosti, svaka je krivulja $k_c^{4,\,8}$ cirkularna, odnosno bicirkularna, jer su točke P_1, P_2 absolutne točke ravnine.

7. Čunjosječnica k neka bude kružnica, koja ne prolazi točkama P, P_1 i P_2, a krivulja c neka bude također kružnica. Krivulja k_c^4 bit će cirkularna krivulja 4. reda roda nultoga, jer prolazi zajedničkim točkama kružnica k i c. Jer je krivulja c kružnica, bit će $PP_1 = PP_2$. Budući da svaku krivulju 4. reda roda nultoga možemo uzeti, kao da je nastala pomoću naše kvadratne srodnosti, sliedi, da je $PP_1 = PP_2$ nuždan uvjet kod naše kvadratne inverzije, da ravnična krivulja 4. reda roda nultoga bude cirkularna. Ovo međutim nije i dovoljan uvjet. Kružnica c neka sieče krivulju k_c^4 i kružnicu k u točkama M, N, a pravac $p = P_1 P_2$ u točkama T_1 i T_2. Spojnice PT_1 i PT_2 su tangente krivulje k_c^4 u dvostrukoj točki P. Za ovakove krivulje možemo prema tome izreći ovaj stavak:

A k o s u v r h o v i P, P_1, P_2 i s t o k r a č n o g a t r o k u t a ($PP_1 = PP_2$) d v o s t r u k e t o č k e n e k e k r i v u l j e k_c^4 4. r e d a r o d a n u l t o g a, a p r a v c i PP_1 i PP_2 d i r a j u k r u ž n i c u c u t o č k a m a P_1, P_2, b i t ć e t a k r i v u l j a k_c^4 c i r k u l a r n a s a m o o n d a, a k o s e r e a l n a s j e c i š t a M, N k r i v u l j a c, k_c^4 i s j e c i š t a t a n g e n a t a k r i v u l j e k_c^4 u t o č k i P s a s p o j n i c o m $P_1 P_2$ n a l a z e n a k r u ž n i c i,

[6] Berzolari je pokazao, da se krivulje 4. reda mogu na ∞^5 načina prikazati kao proizvod dvaju projektivnih pramenova čunjosječnica.

koja dira tangente krivulje k_c^4, povučene točkom P s diralištima izvan te točke.

Točke P_1, P_2, tangente krivulje k_c^4 u točki P, kao i tangente, povučene tom točkom na krivulju k_c^4, mogu biti i imaginarne.

8. Po volji uzetoj točki H na čunjosječnici k neka je pridružena točka H_c na krivulji k_c^4. Potražit ćemo tangentu t krivulje k_c^4 u točki H_c. Tangenta t ima dvie zajedničke točke s krivuljom k_c^4 u točki H_c. Ta je tangenta prema tome pridružena onoj čunjosječnici e, koja prolazi točkama P, P_1, P_2, a dira čunjosječnicu k u točki H. Nađemo li dakle nekoj točki čunjosječnice e pridruženu točku, dat će nam njena spojnica s točkom H_c tangentu t krivulje k_c^4 u toj točki. Najbrže ćemo to izvesti tako, da na krivulji e odaberemo točku P, jer je njoj pridružena točka na pravcu p. Nađemo li dakle tangentu čunjosječnice e u točki P i njome presiečemo pravac p u točki L, tada je spojnica $LH_c = t$ tangenta krivulje k_c^4 u točki H_c.

Čunjosječnica e određena je točkama P, P_1. P_2, H i tangentom čunjosječnice k u točki H.

9. U realnim točkama M, N, U i V, u kojima se sieku čunjosječnice c i k, mogu se tangente krivulje k_c^4 konstruirati samo pomoću harmonijskog dvoomjera. Neka je pravac m spojnica točaka M i P. Tangente krivulja c, k i k_c^4 u točki M označimo s a_1, a_2 i a_3. Iz definicije naše kvadratne srodnosti sliedi harmonijski dvoomjer pravaca $(m\, a_1\, a_2\, a_3) = -1$. Pomoću toga dvoomjera lako je odrediti tangentu a_3.

Asimptotu, t. j. tangentu krivulje k u neizmjerno dalekoj točki, određujemo posvema analogno kao u konačnoj, ako na čunjosječnici k odredimo točku, kojoj pridružena na krivulji k_c^3 odlazi u bezkonačnost. Kod cirkularne krivulje k_c^3 3. reda dobije se ta točka tako, da se središtem O kružnice c i točkom P opiše kružnica sa središtem u polovištu dužinu OP, pa se njome presieče kružnica k u drugoj točki D. Točki D pridružena točka D_c na krivulji k_c^3 nalazi se u bezkonačnosti, jer je polara točke D s obzirom na kružnicu c uzporedna sa spojnicom PD. Ako krivulja k_c nije cirkularna, onda se točkama O, P mora povući čunjosječnica homotetična s čunjosječnicom c i središtem u polovištu dužine OP. Dalje vriedi posvema analogno kao kod cirkularnih krivulja, samo mjesto jedne realne točke D mogu biti tri.

Kod krivulja k_c^4 četvrtoga reda vriedi posvema analogno kao kod onih trećega reda, samo se ovdje povećava broj neizmjerno dalekih točaka kod cirkularnih krivulja na dva, a kod običnih na četiri. Sve ove točke mogu biti u parovima konjugirano imaginarne.

10. Svakom pravcu točke P_1 pridružen je neki pravac točke P_2, a oba se ta pravca sieku na čunjosječnici c. Svaka zraka točke P sieče ta dva pravca u pridruženim točkama. Neka spojnica PP_1 sieče čunjosječnicu k povučenu točkom P u točki K_1, a spojnica točaka $K_1 P_2$ čunjosječnicu c u točki C_1. Spojnici $P_2 C$ pridružena je u našoj srodnosti spojnica $P_1 C_1$, a točki K_1 na $P_2 C_1$ pridružena je točka P_1 na $P_1 C_1$, a ta je točka $P_1 \cancel{C_1}$ pridružena već točki P čunjosječnice k, dakle se na pravcu $C_1 P_1$ nalaze u točki P_1 dvie točke krivulje k_c^3. Pravac $P_1 C_1$ je prema tome tangenta krivulje k_c^3 u točki P_1. Posvema analogno vriedi i za točku P_2.

11. Kako bismo mogli odrediti oskulacionu kružnicu krivulje k_c u nekoj njenoj točki H_c? Točkama P_1, P_2 povukli bi neku čunjosječnicu e tako, da ona čunjosječnicu k oskulira u točki H. Čunjosječnici e pridružena čunjosječnica e_c oskulirat će krivulju k_c u točki H_c, a oskulaciona kružnica krivulje e_c u točki H_c bit će u isti mah oskulaciona i za krivulju k_c. Konstruktivni postupci za određenje te kružnice poznati su[7], ako ih nadopunimo našima, koji proizlaze iz naše srodnosti.

12. Neka krivulja k prolazi točkom P. Točkama $P, P_1 P_2$ povucimo čunjosječnicu r, koja krivulju k oskulira u točki P. Pridružen pravac r_c dirat će krivulju k_c u infleksionoj točki, jer ima s njom tri neizmjerno blize točke zajedničke. Tangenta krivulje k u točki P zajednička je i čunjosječnici r, dakle je presjek te tangente s pravcem $p = P_1 P_2$ infleksiona točka krivulje k_c.

13. Namjesto naše kvadratne srodnosti uzmimo običnu inverziju. Pravac p odlazi u bezkonačnost, a točke P_1 i P_2 u absolutne točke ravnine. Ako čunjosječnica k ne prolazi točkom P, tada su točke P_1, P_2 uviek dvostruke točke krivulje k_c^4. Sliedi dakle poznata činjenica, da svaka čunjosječnica inverzijom prelazi u bicirkularnu krivulju 4. reda, ako ne prolazi centrom inverzije[8]. Uzmimo u nekoj točki H čunjosječnice k oskulacionu kružnicu e. Inverzijom prelazi kružnica e opet u kružnicu e_c, a ova će imati u točki H_c

[7] W. Fiedler: Die darst. Geometrie, Bd. I, str. 219.—222.

[8] G. Loria: Spezielle alg. und transc. ebenen Kurven. Theorie und Geschichte. Bd. I, str. 118.

opet tri zajedničke točke s krivuljom k_c^4. Posvema analogno vriedi i za hiperoskulacione kružnice u tjemenima čunjosječnice k. Prema tome smo izveli poznati stavak: Inverzijom čunjosječnice k prelaze oskulacione i hiperoskulacione kružnice čunjosječnice k u isto takove kružnice nastale bicirkularne krivulje k_c^4.

14. Povucimo iz točke P_1 tangentu t_1^I na kružnicu k. Ovoj tangenti odgovarat će u našoj srodnosti neki pravac t_{1c}^I koji prolazi točkom P_2, a kružnicu c sieče u istoj točki kao i tangenta t_1^I. Označimo li diralište tangente t_1^I na kružnici k s T_1^I, onda će u pridruženoj točki T_{1c}^I dirati pravac t_{1c}^I krivulju k_c. Povucimo točkom P_2 još jednu tangentu t_2^I na kružnici k, a ona neka sieče tangentu t_1^I u točki F. Pravac t_{2c}^I bit će opet tangenta krivulje k_c u točki T_{2c}^I, a sieći će pravac t_{1c}^I u točki F_c, koja je pridružena točki F. Ako su točke P_1, P_2 imaginarne, bit će imaginarni i parovi tangenta iz tih točaka na krivulje k i k_c, ali sjecišta tih tangenata bit će realna.

Namjesto kružnice k uzmimo po volji neku čunjosječnicu k, koja može, ali ne mora prolaziti točkom P, a ova neka bude u središtu kružnice c. Imamo dakle inverziju, a krivulja k_c bit će cirkularna 3. reda ili bicirkularna 4. reda. Tangente, povučene iz absolutnih točaka na čunjosječnicu k sieku se u njenim fokusima F_1 i F_2. Ovi fokusi prelaze inverzijom u točke F_{1c} i F_{2c}, a prema onome, što smo malo prije zaključili, u tim se točkama sieku tangente, povučene iz absolutnih točaka na krivulju k_c, dakle su i to fokusi. Izveli smo prema tome i ovaj poznati stavak: Inverzijom prelaze fokusi čunjosječnice k u obične fokuse nastale cirkularne krivulje 3. reda ili bicirkularne krivulje 4. reda k_c.

Šest tangenata krivulje 4. reda roda nultoga u njihovim dvostrukim točkama umataju neku čunjosječnicu[9]. Odavle direktno sliedi, da ova čunjosječnica kod bicirkularne krivulje 4. reda ima fokuse u četverostrukim fokusima te krivulje.

15. Promotrimo još slučaj, kada se čunjosječnica c razpadne u dva realna ili imaginarna pravca c_1 i c_2. Ta dva pravca neka se sieku u točki P_c. Svaka krivulja k_c^3 trećega reda prolazit će tom točkom P_c, a dirat će u toj točki pravac $p \equiv b_c$, koji je pridružen pravcu $b = PP_c$ u involuciji pravaca točke P_c, kojoj su pravci c_1 i c_2 dvostruki. Dokazati se to može ovako: Spojimo li po volji

[9] Salmon-Fiedler: Analytishe Geometrie der höheren ebenen Kurven, str. 340.

uzetu točku H čunjosječnice k s točkom P_c ($h = HP_c$), onda će pridružena točka H_c na krivulji k_c, spojena s točkom P_c, dati pravac h_c, koji s pravcima c_1 i c_2 i pravcem h stoji u harmonijskom dvoomjeru $(c_1\, c_2\, h\, h_c) = -1$. Uzmemo li točku H na pravcu b, tada točka H_c padne u točku P_c, a točke H_c i P_c se u tom slučaju nalaze u pravcu p, dakle taj pravac dira krivulju k_c u točki P_c. Ako su pravci c_1 i c_2 imaginarni, daje nam pridružene točke H i H_c njihov eliptično involutoran pramen. Sjecišta pravca p s čunjosječnicom k spojena s točkom P, daju tangente krivulje k_c u toj točki. Ako točku P uzmemo na pravcu c_1 ili c_2, tada je svakom pravcu pridružen neki pravac, a prema tome i svakoj čunjosječnici pridružena je i neka čunjosječnica.

Kod krivulja k_c^4 četvrtoga reda prolazit će ove točkom P_c dva puta, ali će svaki puta dirati pravac p, dakle će takove krivulje dirati same sebe u točki P_c. Vidimo prema tome, da u ovakovom slučaju padaju naše prijašnje točke P_1 i P_2 kod krivulja k_c^3 i k_c^4 u jednu točku, a njihova spojnica prelazi u tangentu tih krivulja.

II. Plohe 3. reda s jednom, dvie, tri i četiri dvostruke točke.

Uvod. U prvom dielu ove radnje promatrali smo ravnične krivulje 3. i 4. reda nastale pomoću posveobćene kvadratne inverzije u ravnini. U ovom dielu proširit ćemo ovu kvadratnu inverziju u prostor, t. j. mjesto čunjosječnice c uzeti ćemo plohu Ψ 2. reda, a točka P bit će po volji odabrana točka u prostoru. Točkama P_1, P_2 odgovarat će ovdje čunjosječnica Π, duž koje plohu Ψ dira stožac vrha P. Ova čunjosječnica može biti realna ili imaginarna, a može se stegnuti i u točku P, kada ovu uzmemo na plohi Ψ. Pravcu p odgovarat će ravnina τ čunjosječnice Π.

Odaberimo po volji u prostoru točku K, pa ju spojimo s točkom P. Ovoj točki K bit će u ovakovoj prostornoj kvadratnoj srodnosti pridružena konjugirana točka K_ψ na zraki KP, s obzirom na plohu Ψ. Nekoj ravnini Φ u prostoru bit će pridružena na taj način neka ploha Φ^2_ψ 2. reda, koja prolazi točkom P, čunjosječnicom Π i onom čunjosječnicom u kojoj ravnina Φ sieče plohu Ψ. Ovo sliedi iz naših izvoda u toč. 2. dio I., jer svaka ravnina točke P sieče ravninu Φ u pravcu, a plohu Ψ u realnoj ili imaginarnoj čunjosječnici, dakle će sjeći i plohu Φ^2_ψ u nekoj čunjosječnici, koja ide poznatim točkama P_1, P_2 na čunjosječnici Π, kao i točkom P. Plohi Φ^2_ψ pridružena je dakako opet ravnina Φ.

U ovom će nas dielu zanimati samo plohe Φ^3_ψ 3. reda, t. j. one, koje nastaju, kada mjesto ravnine Φ uzmemo neku plohu Φ 2. reda i to tako, da prolazi točkom P. (Vidi toč. 3. dio I.). Plohe Ψ i Φ mogu biti i stožci 2. reda, a mogu se razpasti i u dvie realne ili imaginarne ravnine. Uzimajući razne variante ovakovih ploha u obzir, dobiti ćemo pomoću naše prostorne kvadratne srodnosti plohe 3. reda s jedním, dvie, tri i četiri dvostruke (čvorne) točke. Na takvim plohama potražit ćemo torzalne ravnine i pravce, kao i vrste i broj njihovih pravaca. Među ovakovim plohama zanimat će nas osobito takve, koje prolaze absolutnom kružnicom.

1. Točki P pridružena je čitava ravnina Π i obratno. Uzmemo li, da se točka K ili ravnina Φ nalaze u nekom prostoru X, onda se oni preslikaju u točku K_ψ i plohu Φ^2_ψ nekog drugog prostora X_ψ. Prostori X i X_ψ sieku se u plohi Ψ, t. j. točke ploke Ψ ostaju, kod preslikavanja prostora X u prostor X_ψ invariantne. Pridružene točke prostora X i X_ψ čine na svakoj zraki točke P hiperboličku, eliptičku ili paraboličku involuciju. Granicu između zraka s hiperboličkim i eliptičkim involucijama čine zrake stožca $(P\,\Pi)$, a involucije na ovim zrakama su paraboličke. Točkama stožca $(P\,\Pi)$ u prostoru X pridružena je čunjosječnica Π u prostoru X_ψ i obratno.

Uzmemo li mjesto ravnine Φ neku plohu Φ 2. reda, koja prolazi čunjosječnicom Π, tada ona sieče plohu Ψ u još jednoj čunjosječnici Π_1. Toj plohi pridružena je u prostoru X_ψ neka ploha Φ^2_ψ opet 2. reda, koja također prolazi čunjosječnicama Π i Π_1. Ovo sliedi iz toč. 2. dio I.

Spomenut ćemo ovdje još poznatu karakteristiku inverzije kugline plohe, da svaka kuglina ploha inverzijom prelazi opet u kuglinu plohu. Točka P je kod inverzije središte kugle Ψ, a čunjosječnica Π je absolutna kružnica prostora. Ako je ploha Φ kugla, mora i ploha Φ^2_ψ biti kugla, jer obje prolaze absolutnom kružnicom, a drugoga su reda.

Uzmimo nadalje, da se je ploha Ψ razpala u dvie realne ili imaginarne ravnine ξ_1, ξ_2 s presječnicom p_ψ. Ravnine ξ_1 i ξ_2 su dvostruke ravnine involutornog pramena ravnina pravca p_ψ. Ravnina Φ neka sieče ravnine ξ_1 i ξ_2 u pravcima s_1 i s_2, koji se sieku na pravcu p_ψ u točki V. Pravci s_1 i s_2 ostaju u prostorima X i X_ψ invariantni, a svakom pravcu ravnine Φ, koji prolazi točkom V, odgovarat će na plohi Φ^2_ψ opet neki pravac, koji ide točkom V. Uzmimo točkom V po volji pravac t u ravnini Φ. Položimo li pravcem p_ψ i tim pravcem ravninu, onda se pridruženi pravac t_ψ nalazi u ravnini $(p_\psi\, t_\psi)$ pravca p_ψ, koja je navedenoj pridružena u involuciji ravnina ξ_1 i ξ_2, a dobije se kao presječnica ravnina (Pt) i $(p_\psi\, t_\psi)$. Pramen ravnina $(P\, t_i)$ projektivan je s pramenom ravnina $(p_\psi\, t_i)$, a koaksialni pramenovi $(p\, t_i)$ i $(p\, t^i_\psi)$ su involutorno pridruženi, dakle su projektivni i pramenovi $(P\, t_i)$ i $(p_\psi\, t^i_\psi)$. Osi tih pramenova sieku se u točki V, dakle je njihov proizvod stožac drugoga reda. Vidimo dakle: Ako se ploha Ψ razpadne u dvie realne ili imaginarne ravnine, tada je ravnini Φ prostora X pridružen u prostoru X_ψ stožac drugoga reda. Točka P nalazi se na tom stožcu, jer njome prolazi os jednog pramena. Ovaj stožac prolazi pravcem p_ψ, jer je on os pramena $(p_\psi\, t^i_\psi)$. Presječnici ravnina (Pp_ψ) i Φ bit će opet pridružen na stožcu pravac p_ψ, dakle ravnini (Pp^ψ) pridružena ravnina τ u involuciji ravnina ξ_1, ξ_2, dirat će taj stožac duž pravca p_ψ.

Ako točku P uzmemo u realnoj ravnini ξ_1 ili ξ_2, onda će svakoj ravnini ϱ prostora biti pridružena ravnina ϱ_ψ, koja prolazi presječnicom z ravnine ϱ s ravninom ξ_2, odnosno ξ_1, a s tim ravninama i s ravninom (zP) čini harmonijski dvomjer

$$\{\xi_2,\ (zP),\ \varrho,\ \varrho_\psi\} = -1.$$

2. Neka ploha Φ 2. reda prolazi točkom P. Plohi Φ pridružena ploha Φ^3_ψ u prostoru X_ψ morala bi obćeno biti 4. reda. Točki P u prostoru X pridružena je čitava ravnina τ prostora X_ψ, a jer se točka P nalazi na plohi Φ, razpada se izvedena ploha $\bar{\Phi}^3_\psi$ u ravninu τ i neku obću plohu 3. reda. Ova će ploha imati u točki P dvostruku točku. Da je ova ploha Φ^3_ψ trećega reda s dvostrukom točkom P, mogli bismo lako zaključiti na temelju naših izvoda u toč. 3, dio I, ako ih prenesemo na sve ravnine točke P. Naime, svakom pravcu prostora X_ψ pridružena je neka čunjosječnica u prostoru X, koja plohu Φ sieče u točki P i još tri točke. Ovim trim točkama pridružene točke na pravcu jesu njegova probodišta s plohom Φ^3_ψ, dakle je ona 3. reda.

Pokazat ćemo sada, da se ploha Φ^3_ψ može prikazati i kao proizvod pramena ravnina i pramena ploha 2. reda. Ravnina τ neka sieče plohu Φ u čunjosječnici Π_k, a ta čunjosječnica neka sieče čunjosječnicu Π u točkama P_1, P_2, P_3 i P_4. Jedan ili oba para tih točaka mogu biti i imaginarni. Točka P_1, P_2, P_3 i P_4 nalaze se na plohama Φ i Ψ, dakle se nalaze i na plohi Φ^3_ψ. Spojnice točke P

s točkama P_1, P_2, P_3 i P_4 označimo s a_1, a_2, a_3 i a_4 a tangencialnu ravninu plohe Φ u točki P s α. Točkom P, tangencialnom ravninom α i čunjosječnicom Π neka je određen pramen Θ ploha 2. reda u prostoru X. U prostoru X_ψ pridružen je tom pramenu Θ pramen ravnina Θ_ψ, koje prolaze presječnicom b_τ ravnina τ i α. Plohe pramena Θ sieku plohu Φ u prostornim krivuljama 4. reda prve vrste. Ove krivulje imaju u točki P dvostruku točku, jer plohe pramena Θ diraju plohu Φ u točki P. Spojnice točaka tih krivulja s točkom P daju pramen Σ stožaca 2. reda[1], jer se točke P_1, P_2, P_3 i P_4 nalaze na svim tim prostornim krivuljama 4. reda. Preslikamo li taj pramen iz prostora X u prostor X_ψ, dobit ćemo isti taj pramen $\Sigma = \Sigma_\psi$, jer je svaka zraka točke P u prostorima X i X_ψ sama sebi pridružena. Pramenovi Θ i Θ_ψ projektivni su, jer svaka zraka točke P probada ta dva pramena u involutornom nizu. Plohu Φ možemo smatrati proizvodom pramenova Θ i $\Sigma = \Sigma_\psi$, a prema tome je i ploha Φ^3_ψ proizvod pramenova Θ_ψ i $\Sigma_\psi = \Sigma$. Ploha Φ^3_ψ je dakle trećega reda, jer je to zapravo jedan osobit slučaj drugog Steinerova načina izvađanja obćenih ploha 3. reda[2]. Steiner naime izvodi obćenu plohu 3. reda pomoću projektivnog pramena ravnina i pramena ploha 2. reda. Naš pramen ploha 2. reda prešao je u pramen stožaca, a rezultat je obćena ploha 3. reda s dvostrukom točkom. Ova je ploha do sada istraživana samo kao proizvod triju kolinearnih snopova[3]. Prikazali smo time ovdje jedno izvođenje osobite plohe 3. reda s jednom dvostrukom točkom, koje se donekle razlikuje od izvođenja obćih ploha 3. reda na pr. J. Majcena[4], H. Grassmanna[5] i J. Steinera[6].

3. Potražimo sada poznatih 27 pravaca obćenih ploha 3. reda na našoj plohi Φ^3_ψ. Kazali smo, da se čunjosječnice Π i Π_k ploha Φ i Ψ u ravnini τ sieku u točkama P_1, P_2, P_3 i P_4. Položimo točkom P i recimo točkama P_1 i P_2 ravninu β. Ova ravnina sieče plohu Ψ u čunjosječnici c, a plohu Φ u čunjosječnici k, koja prolazi točkama P, P_1 i P_2. Jer pravci $a_1 = PP_1$ i $a_2 = PP_2$ diraju čunjosječnicu c u točkamu $P_1 P_2$, bit će čunjosječnici k pridružen

[1] Th. Reye: Die Geometrie der Lage, Bd. III. str. 35.
[2] Th. Reye: Op. cit. str. 56.—57.
[3] Th. Reye: Op. cit. str. 216.
[4] J. Majcen: Eine neue Erzeugung für versch. typ. Formen der Fläch. 3. Ord. Jahresb. d. deut. Math. Verein XIV 1905.
[5] H. Grassmann: Crelle Journ. 1855. Bd. 49. str. 62. i Th. Reye: Op. cit. str. 74.
[6] Th. Reye: Op. cit. str. 94.—98.

na plohi Φ^3_ψ neki pravac k_ψ (toč. 2, dio I). Ravnina β sieče prema tome plohu Φ^3_ψ u pravcu k_ψ i još nekoj čunjosječnici. No ta bi čunjosječnica morala imati u točki P dvostruku točku, a prolazi točkom P_1 i P_2, dakle se ona razpada u pravce a_1, a_2, koji su prema tome također pravci plohe. Involucija pridruženih točaka prostora X i X_ψ je na tim pravcima parabolička, t. j. točkama P_1 i P_2 na plohi Φ pridružene su sve točke pravaca a_1 i a_2 na plohi Φ^3_ψ. Posvema analogno vriedi i za pravce $a_3 = P P_3$ i $a_4 = P P_4$, dakle su pravci a_1, a_2, a_3 i a_4 pravci plohe Φ^3_ψ. Točki P na plohi Φ pridružen je na plohi Φ^3_ψ opet neki pravac, i to onaj, u kojemu tangencialna ravnina α plohe Φ u točki P sieče ravninu τ. Čunjosječnica plohe Φ^3_ψ u ravnini α razpada se posvema analogno kao i ona malo prije u dva pravca, koji prolaze točkom P i sjecištima presječnice $(\alpha \times \tau)$ s čunjosječnicom Π_k. Ova dva pravca označimo s a_5, a_6. Ta su dva pravca uistinu realne ili imaginarne izvodnice plohe Φ u točki P. Vidimo dakle, da dvostrukom točkom plohe Φ^3_ψ prolazi 6 pravaca te plohe[7]. Položimo li kroz svaka dva pravca ravninu β_n, tada znademo, da se u svakoj takovoj ravnini nalazi još jedan. To je na pr. u ravnini $a_1 a_2 = \beta$ pravac k_ψ, a u ravnini α presječnica $(\alpha \times \tau)$. Takvih ravnina ima $\binom{6}{2} = 15$, dakle se u njima nalazi daljnjih 15 pravaca plohe. Na našoj plohi Φ^3_ψ ima prema tome najviše 21 pravac. Ali jer se pravci a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i a_6 sieku u točki P, moramo — uzporedivši ovu plohu s obćom plohom 3. reda — pravce a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i a_6 računati dvostruko[8], t. j. oni su dvoznačni, tako da je opet udovoljeno broju 27. U svezi s 27 pravaca naša je ploha već temeljito iztražena, tako da tu nemamo što više reći[9].

Spomenut ćemo ovdje još samo mogućnost broja realnih pravaca na raznim plohama Φ^3_ψ s dvostrukom točkom P. Kada može na plohi Φ^3_ψ postojati svih 21 realnih pravaca? Svi pravci plohe Φ^3_ψ bit će realni onda, kada su realni pravci a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i a_6 točke P. Pravci a_5 i a_6 realni su onda, kada je ploha Φ pravčasta, a pravci a_1, a_2, a_3 i a_4 onda, kada se čunjosječnice Π i Π_k sieku u četiri realne točke. Nuždan i dovoljan uvjet za 21 realan pravac na plohi Φ^3_ψ jest dakle sliedeći:

[7] Th. Reye: Op. cit. str. 219.
[8] Th. Reye: Op. cit. str. 89. i 217.
[9] Th. Reye: Op. cit. str. 218.—227.

Ploha Φ^3_ψ imat će 21 realan pravac onda, ako je ploha Φ pravčasta, a ravnina τ sieče presječnu krivulju ploha Φ i Ψ u četiri realne točke.

Ako ploha Φ nije pravčasta, može na plohi Φ^3_ψ biti najviše 11 realnih pravaca, od kojih 4 moraju prolaziti točkom P, a jedan se nalazi u ravnini τ. Ostalih 6 nalazi se u tri ravnine onog pravca ravnine τ. Na takovim plohama nema dakle Cremoninih parova trostrana, kao ni Steinerovih triedara[10].

Ako točkom P prolaze samo 2 realna pravca, t. j. 2 para konjugirano kompleksnih, onda na takovoj plohi može biti najviše 5 realnih pravaca. Sva tri pravca, koji ne prolaze točkom P, nalaze se u jednoj ravnini, a sačinjavaju jedini trostran te plohe.

Prolaze li točkom P tri para konjugirano imaginarnih pravaca plohe Φ^3_ψ, tada na njoj postoje samo 3 realna pravca. Ova tri pravca sačinjavaju opet jedini trostran te plohe.

Na temelju ovih naših razmatranja možemo izreći ovaj stavak:

Na obćenoj plohi 3. reda s jednom običnom dvostrukom točkom nalaze se uviek barem 3 realna pravca.

4. Hoće li dvostruka točka P plohe Φ^3_ψ biti izolirana ili ne zavisi o tome, da li je čunjosječnica Π_k imaginarna ili realna, t. j. sieče li ravnina τ plohu Φ imaginarno ili realno. Točku P možemo uzeti izvan ili unutar plohe Ψ. Uzmimo sada točku P na plohi Ψ, t. j. čunjosječnica Π se stegne u točku P, u kojoj ravnina τ dira plohu Ψ. Svaka ravnina točke P sjeći će ovakvu plohu Φ^3_ψ u krivulji, koja će u dvostrukoj točki P dirati presječne krivulje 2. reda ploha Ψ i Φ (toč. 3, dio I.) Odavle sliedi, da će samo tangencialne ravnine ploha Ψ i Φ dirati plohu Φ^3_ψ u dvostrukoj točki P, a prema tome je ta točka biplanarna dvostruka točka[11], jer se njen tangencialni stožac 2. reda razpao u dvie ravnine.

Govoreći o plohama 3. reda s biplanarnim točkama spomenut ćemo i druge slučajeve, kada dvostruka točka P može postati biplanarna. Tangencialni stožac plohe Φ^3_ψ u točki P zavisi o čunjosječnici Π_k. Ako se čunjosječnica Π_k razpadne u dva realna ili imaginarna pravca, t. j. ravnina τ je tangencialna ravnina plohe Φ, tada i dvostruka točka P postaje hiperbolički ili eliptički biplanarna, jer se je tangencialni stožac plohe Φ^3_ψ u točki P razpao u dvie realne ili imaginarne ravnine. Ako je ploha Φ stožac ili valjak 2.

---

[10] Th. Reye: Op. cit. str. 218.—219.

[11] Felix Klein: Über Flächen dritter Ordnung. Math. Annalen, Bd. 6. § 3. (1873).

reda, postoji na pridruženoj plosi Φ^3_ψ mogućnost i paraboličke biplanarne točke.

5. Naš način izvođenja osobite plohe 3. reda s dvostrukom točkom omogućuje nam i rješavanje nekih konstruktivnih zadaća na takovim plohama. Na pr. treba u točki K_ψ odrediti tangencialnu ravninu plohe Φ^3_ψ. Točki K_ψ pridružena je na plohi Φ točka K. Tangencialnu ravninu plohe Φ u toj točki označimo s h. Položimo sada neku plohu 2. reda Y, tako da bude određena točkom K, tangencialnom ravninom h, čunjosječnicom Π i točkom P. Toj plohi bit će pridružena u prostoru X_ψ tangencialna ravnina plohe Φ^3_ψ u točki K_ψ, jer ploha Y ide čunjosječnicom Π i točkom P, a dira plohu Φ u točki K. Valja prema tome naći barem jedan pravac te tangencialne ravnine t, da ona bude određena, jer točku K_ψ znademo. Točki P na plohi Y bit će pridružen u prostoru K_ψ neki pravac l u ravnini τ, a dobit ćemo ga kao presječnicu te ravnine s tangencialnom ravninom plohe Y u točki P. Pravcem l i točkom K_ψ određena je tangencialna ravnina plohe Φ^3_ψ u točki K_ψ. Cio problem sastoji se dakle u tome, da u točki P položimo tangencialnu ravninu plohe Y i da ju presječemo ravninom τ.

Kad bismo imali obrnutu zadaću, t. j. zadana je tangencialna ravnina t pa treba odrediti diralište K_ψ, riešili bismo ju na ovaj način: Presječnicom l ravnina τ i t i točkom P položili bi ravninu. Ovoj ravnini odredili bismo konjugirani diametar s obzirom na stožac $(P\,\Pi)$. Gdje taj diametar probada ravninu t nalazi se diralište K_ψ.

Tangencialne ravnine plohe Φ^3_ψ u točkama presječne krivulje ploha Φ i Ψ dadu se odrediti pomoću harmonijskog dvoomjera, i to analogno kao tangenta krivulje k_e u njenoj točki M u točki 9, dio I. Označimo li tangencialne ravnine ploha Φ i Ψ u njihovoj zajedničkoj točki M s α_1, α_2, a ravninu položenu točkom P i tangentom presječne krivulje $\Phi \times \Psi$ u točki M sa m, tada nam opet harmonijski dvoomjer $(m\,\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3) = -1$ daje tangencialnu ravninu α_3 plohe Φ^3_ψ u točki M. Sve tangencialne ravnine dvostruke točke P omataju stožac 2. reda, kojemu je baza čunjosječnica Π_k u ravnini τ na plohi Φ. To sliedi odatle, što je točkama čunjosječnice Π_k na plohi Φ pridružena točka P plohe Φ^3_ψ.

Položimo točkom P i središtem plohe Ψ plohu 2. reda Ω, koja ima središte u polovici te dužine, a homotetična je s plohom Ψ. Plohi Ω u našoj srodnosti srodna ploha je neizmjerno daleka ravnina, jer je spojnica svake točke ove plohe s točkom P uzporedna s polarnom ravninom te točke s obzirom na plohu Ψ. Točkama presječne krivulje $\Omega \times \Phi$ pridružene točke na plohi Φ^3_ψ nalaze se preme tome također u bezkonačnosti. Presječna krivulja ploha Ω i Φ je četvrtoga reda, a spojena s točkom P daje direkcioni stožac neizmjerno daleke krivulje plohe Φ^3_ψ.

6. Na obćenoj plohi 3. reda ima ∞^1 čunjosječnica, koje se nalaze u ravninama pramenova realnih pravaca te plohe. Neizmjerno daleka krivulja obćenite plohe 3. reda sieče absolutnu kružnicu u šest točaka. Spojimo li po dvie takove točke, dobit ćemo tri realna neizmjerno daleka pravca. Ova tri pravca određuju u konačnosti tri pramena uzporednih ravnina, a presjeci plohe tim ravninama prolazit će pripadnim absolutnim točkama. Vidimo dakle da: Svaka obća ploha 3. reda ima na sebi ∞^1 cirkularnih ravničnih krivulja 3. reda, koje se nalaze u najviše tri pramena uzporednih ravnina.

Svaka spojnica po dviju od gornja tri para točaka absolutne kružnice sieče neizmjerno daleku krivulju plohe u još jednoj realnoj točki. Uzmimo, da jedna takova spojnica parova točaka absolutne kružnice i neizmjerno daleke krivulje plohe prolazi upravo neizmjerno dalekom točkom nekog pravca te plohe. U pramenu ravnina ovakove neizmjerno daleke spojnice nalazi se jedna ravnina, koja prolazi pravcem plohe. Jer ta ravnina prolazi pravcem i absolutnim točkama, nalazi se u njoj kružnica plohe. Ovakove mogućnosti postoje tri, pa prema tome vidimo da: Na obćoj plohi 3. reda ne mogu se nalaziti više od tri kružnice[12], ako ih nema neizmjerno mnogo.

Kod naših osobitih ploha 3. reda s jednom dvostrukom točkom razpada se takova kružnica u par minimalnih pravaca, ako njena ravnina prolazi dvostrukom točkom P.

Vidjet ćemo odmah, da među plohama 3. reda s jednom dvostrukom točkom ima i takovih, na kojima ima neizmjerno mnogo kružnica.

7. Kod izvođenja naše plohe Φ^3_ψ uzmimo, da su plohe Φ i Ψ kugle. Ove dvie kuglene plohe sieku se u konačnoj realnoj ili imaginarnoj kružnici i u absolutnoj kružnici prostora. Izvedena ploha Φ^3_ψ prolazi uviek presječnom krivuljom ploha Φ i Ψ, dakle iz kugala Φ i Ψ izvedena ploha Φ^3_ψ prolazi absolutnom kružnicom (uzpo-

[12] Izporedi Müller-Krames: Vorles. üb. darst. Geometrie, Bd. III. str. 188.

redi s toč. 6 i 7, dio I). Označimo ovakove plohe s Φ_c^3. Ravnina absolutne kružnice je neizmjerno daleka ravnina prostora, a u toj ravnini nalazi se prema tome i jedan pravac b_∞ plohe Φ_c^3. Dvie se čunjosječnice obće plohe 3. reda sieku u dvie, jednoj ili nijednoj točki prema tome, da li se pravci plohe u ravninama tih čunjosječnica sieku, ne sieku ili padaju skupa[13]. Absolutnu kružnicu sjeći će prema tome one čunjosječnice plohe Φ_c^3 dva puta, koje se nalaze u ravninama onih pravaca plohe, koji sieku njen neizmjerno daleki pravac b_∞. Budući da naša ploha Φ_c^3 ima neizmjerno daleki pravac, to na njoj ima ∞^1 čunjosječnica, kojih su ravnine uzporedne. Oni pravci plohe Φ_c^3, koji se nalaze u nekoj ravnini tih uzporednih ravnina, sieku neizmjerno daleki pravac b_∞, dakle su čunjosječnice plohe Φ_c^3 u tim ravninana kružnice, jer sieku absolutnu kružnicu. Ako postoji jedan takav pravac, onda postoji sigurno još jedan, jer oba s neizmjerno dalekim b_∞ sačinjavaju poznati trostran. Koliko ima takovih realnih pravaca?

Znademo, da dvostrukom točkom plohe 3. reda prolazi uviek 6 njenih pravaca a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 i a_6, koji mogu biti u parovima i konjugirano imaginarni (toč. 2). Pravce a_1, a_2, a_3 i a_4 daju nam spojnice sjecišta čunjosječnica Π i Π_k s dvostrukom točkom P, dok su pravci a_5 i a_6 izvodnice plohe Φ u točki P. Plohe Φ i Φ su sada kugle, dakle su čunjosječnice Π i Π_k kružnice. Odavle sliedi, da su parovi pravaca a_1, a_2 i a_5, a_6 minimalni pravci plohe Φ_c^3, dok pravci a_3, a_4 mogu biti realni ili imaginarni. Prema napried u toč. 3 izvedenom postoje na plohama Φ_c^3 uviek tri realna pravca, koji čine jedini trostran te plohe. Naš neizmjerno daleki pravac b_∞ uviek je realan, dakle mora biti jedna stranica toga trostrana. Položimo realnim pravcima a_3, a_4 plohe Φ_c^3 ravninu ϱ. Ta ravnina sieče kugle Φ i Ψ u kružnicama k i c, koje se sieku u točkama P_3 i P_4. Kružnica k prolazi točkom P, jer tom točkom prolazi i kugla Φ. Spojnica točaka P_3, P_4 je polara pola P s obzirom na kružnicu c. Preslikamo li kružnicu k uz pomoć točke P i kružnice c, dobit ćemo neizmjerno daleki pravac ravnine ϱ, a to je upravo naš pravac b_∞. Dakle je ravninom pravaca a_3, a_4 određen neizmjerno daleki pravac b_∞ plohe Φ_c^3. Tom ravninom određen je i smjer uzporednih ravnina, u kojima se nalaze čunjosječnice plohe Φ_c^3, koje nisu kružnice. Pravce plohe Φ_c^3 u ravninama parova minimalnih pravaca a_1, a_2 i a_5, a_6 označimo s b_{12} i b_{56} ($b_\infty = b_{34}$). Jer

[13] Th. Reye: Op. cit. str. 92.

pravci b_{12} i b_{56} sieku pravac b_∞, a sieku se i među sobom[14], to je njihova ravnina uzporedna s ravninom pravaca a_3, a_4. Ako su pravci a_3, a_4 realni, tada se i u ravninama njihova pramena nalaze kružnice plohe Φ^3_c, jer i oni sieku pravac b_∞. Kružnica ravnine ϱ (a_3, a_4) pramena pravca a_3 razpada se u pravac a_4 i b_∞, a ona pravca a_4 u pravce a_3 i b_∞. Položimo li središtima kugala Φ i Ψ, te točkom P ravninu, tada je ploha Φ^3_c simetrična s obzirom na tu ravninu. Iz ove simetrije i činjenice, da su plohe Φ i Ψ kugle, može se lako zaključiti, da se trostran b_{12}, b_{56}, b_∞ stegnuo u jednu neizmjerno daleku točku, t. j. $b_{12} \parallel b_{56}$.

Na temelju ovih razmatranja mogli bismo sada izreći nekoliko stavaka o našim plohama Φ^3_c, ali prije nego to učinimo, pogledat ćemo još jedan slučaj, kada našim načinom izvođenja možemo doći do plohe 3. reda s dvostrukom točkom, koja prolazi absolutnom kružnicom:

Absolutna kružnica je presjek svake kugle s neizmjerno dalekom ravninom, dakle presjek s polarnom ravninom njena središta. Uzmimo kod naših osobitih ploha 3. reda, da je ploha Ψ opet kugla, a točka P neka je u njenu središtu. Imamo dakle inverziju na kugli. Absolutna kružnica postaje naša poznata čunjosječnica Π, a njome prolazi svaka ploha izvedena inverzijom plohe Φ 2. reda, koja prolazi središtem P. Jasno je, da ovakovoj plohi Φ^3_i postoji opet neizmjerno daleki pravac, a da ona prolazi absolutnom kružnicom, sliedi iz proširenja u prostor inverzije čunjosječnice u cirkularnu krivulju 3. reda, ako je centar inverzije na toj čunjosječnici[15].

Pogledajmo, da li se ovako inverzijom dobivena ploha Φ^3_i 3. reda razlikuje i koliko od napried izvedene plohe Φ^3_c. Kod plohe Φ^3_c uzeli smo, da su obje plohe Φ i Ψ kugle u po volji uzetom međusobnom položaju, a točku P po volji na plohi Φ. U drugom pak slučaju samo je ploha Ψ kugla, a točka P u njenu središtu. Nije težko spoznati, da se samo na ova dva načina mogu izvesti takove plohe Φ^3_c i Φ^3_i našim postupkom.

Vidjeli smo kod ploha Φ^3_c, da dvostrukom točkom P može prolaziti samo jedan par realnih pravaca plohe, koji također može biti imaginaran, dok su ostala dva para parovi minimalnih pravaca. Jer se kod inverzije dvostruka točka P nalazi u središtu kugle Ψ, to i svaka ploha Φ mora prolaziti tom točkom. Neizmjerno daleka

[14] Th. Reye: Op. cit. str. 218.
[15] To je izveo još G. P. Dandelin. (Bruxelles Nouv. Mem., 4, p. I, 1827.)

ravnina τ sieče plohu Φ u nekoj čunjosječnici, koja s absolutnom kružnicom ima dva para zajedničkih točaka. Spojnice ovih točaka s dvostrukom točkom P daju dva para minimalnih pravaca plohe Φ_i^3. Ravnine tih parova minimalnih pravaca jesu ravnine kružnih presjeka plohe Φ kroz točku P, a ovi kružni presjeci daju na plohi Φ_i^3 pravce b_{12}, b_{56}. Ovi se pravci sieku, jer se sieku i kružnice, iz kojih su nastali. U tangencialnoj ravnini plohe Φ u točki P nalaze se dvie njene realne ili imaginarne izvodnice, kojih točke inverzijom preslikane ostaju opet na tim pravcima. Ove su izvodnice dakle pravci plohe Φ_i^3. Vidimo dakle, da ploha Φ_i^3 ima u dvostrukoj točki isto kao i ploha Φ_c^3 dva para minimalnih pravaca a_1 a_2 i a_5 a_6, a treći par a_3 a_4 može biti realan ili imaginaran. Tangencialna ravnina σ plohe Φ u točki P, t. j. ravnina pravaca a_3, a_4, neka sieče kuglu Ψ u kružnici c. Točki P plohe Φ pridružen je inverzijom na kružnicu c neizmjerno daleki pravac b_∞ ravnine σ, a to je treći pravac plohe Φ_i^3 u ravnini σ. Ploha Φ_i^3 ima prema tome u ravnini realnih ili imaginarnih pravaca a_3, a_4 svoj neizmjerno daleki pravac b_∞ kao i ploha Φ_c^3. Ravnina gore spomenutih pravaca b_{12}, b_{56} uzporedna je s ravninom pravaca a_3, a_4, jer su pravci b_{12}, b_{56} nastali iz kružnica inverzijom na kugli Ψ, koje kružnice prolaze centrom inverzije, a pravci a_3, a_4 nalaze se u ravnini tangenata ovih kružnica u tom centru. Dakle opet kao kod ploha Φ_c^3. Dvostruka točka P plohe Φ_i^3 bit će izolirana, ako je neizmjerno daleka čunjosječnica plohe Φ imaginarna, a spojnice točaka ove čunjosječnice, ako je realna, s dvostrukom točkom P daju tangente plohe Φ_i^3 u toj točki i sačinjavaju stožac 2. reda. Vidimo dakle, da su plohe Φ_c^3 i Φ_i^3 istovrstne, a za svaku plohu Φ_c^3 možemo u ostalom uzeti, da je nastala i kao ploha Φ_i^3. Treba samo kružnicom Π položiti kuglu, koja ima središte u točki P. Inverzijom plohe Φ_c^3 s obzirom na ovu kuglu bit će joj pridružena neka ploha Φ 2. reda, koja prolazi točkom P. Iz ove plohe Φ 2. reda možemo uzeti, kao da je nastala inverzijom na istoj kugli naša ploha $\Phi_c^3 = \Phi_i^3$. Ne vriedi međutim i obrnuto. Za svaku plohu Φ_i^3 ne možemo uzeti, da može nastati i kao ploha Φ_c^3. Razlika između ovih ploha jest ipak tolika, što se plohe Φ_c^3 javljaju kao osobit slučaj ploha Φ_i^3, jer su simetrične, dok plohe Φ_i^3 to ne moraju biti. Dakle kod ploha Φ_i^3 se trostran b_{12}, b_{56}, b_∞ ne mora reducirati na jednu točku, kojom prolaze navedeni pravci. Na temelju svih ovih naših razmatranja možemo sada izreći za naše plohe Φ_i^3 sliedeće stavke:

a) Ploha Φ_i^8 3. reda, koja prolazi absolutnom kružnicom, može imati samo 3 ili 5 realnih pravaca, od kojih je jedan uviek u bezkonačnosti. U posljednjem slučaju dva prolaze uviek dvostrukom točkom.

b) Na plohi Φ_i^8 s 3 realna pravca postoje uviek 2 pravca, u kojih ravninama se nalaze kružnice te plohe.

c) Na plohi Φ_i^8 s 5 realnih pravaca postoje uviek 4 pravca, u kojih ravninama se nalaze kružnice plohe. Kružnice dvaju pramenova prolaze dvostrukom točkom.

d) Nuždan i dovoljan uvjet, da neka ploha 3. reda s dvostrukom točkom prolazi absolutnom kružnicom, jest taj, da se među čunjosječnicama plohe u ravninama pramena jednog pravca te plohe nalaze barem dvie kružnice.

e) Ako se na plohi Φ_i^8 nalaze 4 pravca, u kojih ravninama se nalaze kružnice plohe, tada se po dvie osi tih pramenova sieku (dvie prolaze dvostrukom točkom), a ravnine su im uzporedne. Sve ravnine, uzporedne s ove dvie, sieku plohu Φ_i^8 u čunjosječnicama, koje nisu kružnice.

f) Za plohu Φ_i^8 postoji samo jedan pramen uzporednih ravnina, koje tu plohu sieku u čunjosječnicama, koje nisu kružnice.

Hiperbolički paraboloid sieče neizmjerno daleku ravninu u dva pravca. Uzmemo li, da je ploha Φ hiperbolički paraboloid, tada će pravci b_{12} i b_{56} prieći u izvodnice a_3, a_4 ploha Φ i Φ_i^8 u dvostrukoj točki P, jer se svi kružni presjeci plohe Φ razpadaju u jednu konačnu i jednu neizmjerno daleku izvodnicu te plohe. Ravnine tih kružnih presjeka su direkcione ravnine izvodnica od oba sistema na toj plohi. Na ovakvoj osobitoj plohi Φ_i^8 nalaze se kružnice samo u ravninama dvaju realnih pravaca a_3, a_4 (b_{12}, b_{56}), koji idu dvostrukom točkom P. U ravnini ovih pravaca nalazi se i treći pravac ove plohe, a taj je neizmjerno daleko.

Svaka ravnina prostora sieče absolutnu kružnicu u dvie točke, dakle svi ravnični presjeci plohe Φ_i^8 prolaze absolutnim točkama svoje ravnine. Odavle sliedi, da su sve ravnične krivulje 3. reda na plohama Φ_i^3 cirkularne.

Na temelju izvoda u toč. 6 i upravo spomenutoga možemo izreći još i sliedeći stavak:

Postoje li na obćenoj plohi 3. reda s jednom dvostrukom točkom četiri ravnične cirkularne krivulje 3. reda tako, da ravnine ni kojih dviju između njih nisu uzporedne, tada ta ploha prolazi absolutnom kružnicom.

Spomenut ćemo još neka svojstva ploha Φ_i^3, koja sliede iz svojstava cirkularnih krivulja 3. reda. Svaka kuglina ploha prolazi absolutnom kružnicom. Siečemo li neku plohu Φ_i^3 3. reda, koja prolazi absolutnom kružnicom, kuglom, tada se presječna krivulja te plohe s tom kuglom razpada u absolutnu kružnicu i jednu prostornu krivulju 4. reda. Ovo je samo proširenje poznate činjenice, da svaka kružnica sieče cirkularnu krivulju 3. reda najviše u 4 realne točke.

Ako kugla prolazi jednom kružnicom plohe Φ_i^3, tada ona tu plohu sieče u ovoj i još jednoj kružnici, jer na kugli nema drugih čunjosječnica osim kružnica. Vidimo dakle, da kugle pramena kugala svake kružnice plohe Φ_i^3 sieku tu plohu opet u kružnicama. Svake dvie kružnice na kugli sieku se u dvie realne ili imaginarne točke. Sve kružnice plohe Φ_i^3 u nekom pramenu kugala sieku dakle temeljnu kružnicu toga pramena dva puta. Odavle sliedi, da se kružnice plohe Φ_i^3 u tom pramenu kugala nalaze ravnine onog pravca plohe Φ_i^3, koji sieče pravac temeljne kružnice toga pramena kugala na plohi Φ_i^3 [16]. Odavle direktno sliedi, da svaka ploha Φ_i^3 može nastati kao proizvod pramena kugala i s njim projektivnog pramena ravnina. To je specialni slučaj drugog Steinerova načina izvođenja obćenih ploha 3. reda[17].

8. Može se desiti kod ploha Φ_i^3, da sva tri pravca b_{12}, b_{56}, b_∞ padnu u jedan neizmjerno daleki pravac. Kružnice Π i Π_k u ravnini τ diraju se tada u absolutnim točkama, t. j. postaju koncentrične, a svi pravci takve plohe u dvostrukoj točki stežu se u jedan par minimalnih pravaca. Ravninom ovog para pravaca određen je onaj neizmjerno daleki troznačni[18] pravac. Na takovoj plohi postoje čunjosječnice samo u jednom pramenu uzporednih ravnina,

[16] Th. Reye: Op. cit. str. 92.
[17] Th. Reye: Op. cit. str. 56.—57.
[18] Ne trostruki, nego troznačni.

a te su kružnice. Označimo ovakovu plohu s Φ_z^3, a ona je rotaciona. Neizmjerno daleka ravnina tangira tu plohu duž njena neizmjerno dalekog pravca, a taj je pravac infleksioni pravac te plohe. Na tom se pravcu nalaze infleksione točke svih ravničnih krivulja 3. reda na plohi Φ_z^3. Infleksiona tangenta svake presječne krivulje 3. reda na ovoj plohi jest neizmjerno daleki pravac njezine ravnine, a sve su te krivulje simetrične s obzirom na jednu os, dakle:

S v a k a r a v n i n a d v o s t r u k e t o č k e s i e č e p l o h u Φ_z^3 u S l u s e o v o j k o n h o i d i[19].

9. Svaka ploha Φ_c^3 ima svoj neizmjerno daleki pravac. Opišemo li oko polovišta dužine PS, gdje je S središta kugle Ψ kuglinu plohu, koja ide tim točkama, onda ta kugla sieče kuglu Φ u nekoj kružnici ε, koja ide točkom P. Točkama kružnice ε na kugli Φ pridružene su točke neizmjerno dalekog pravca plohe Φ_c^3. Odavle sliedi, da će asimptote svih ravničnih krivulja plohe biti uzporedne s ravninom kružnice ε. Ravnina kružnice ε identična je s ravninom para a_3, a_4 realnih ili imaginarnih pravaca plohe u dvostrukoj točki P.

Svaka po volji uzeta ravnina prostora X_ψ sieče plohu Φ_c^3 u cirkularnoj krivulji 3. reda roda prvoga. Toj ravnini pridružena je u prostoru X neka ploha 2. reda Γ, koja prolazi točkom P i kružnicom Π. Ploha Γ sieče kuglu Φ u nekoj prostornoj krivulji 4. reda prve vrste (Darbouxovu ciklika), a na toj se krivulji nalazi i točka P. Presječnu cirkularnu krivulju 3. reda roda prvoga plohe Φ_c^3 možemo dakle smatrati perspektivnom slikom naše prostorne krivulje 4. reda na kugli Φ iz točke P, a time smo dobili poznati stavak, koji glasi:

S v a k a c i r k u l a r n a k r i v u l j a 3. r e d a r o d a p r v o g a j e p e r s p e k t i v n a s l i k a p r o s t o r n e k r i v u l j e 4. r e d a p r v e v r s t e n a n e k o j k u g l i i z n e k e t o č k e t e k r i v u l j e.

10. Do sada smo promatrali samo takove slučajeve ploha Φ_ψ^3, koje su nastale, ako su ploha Φ i ploha Ψ bile obične plohe 2. reda. Uzmimo sada plohu Φ kao stožac ili valjak 2. reda. Izvedena ploha Φ_ψ^3 dobit će još jednu dvostruku točku P^I, koja odgovara vrhu stožca. Valjak možemo uzeti kao stožac s neizmjerno dalekim vrhom. Pravci a_5 i a_6 takove plohe padaju skupa i uviek su realni, dakle ploha ima torzalan pravac. Torzalna ravnina je tangencialna

[19] G. Loria: Spezielle alg. und trans. ebene Kurven, Bd. I. str. 74.

ravnina stožca Φ u dvostrukoj točki P. U toj se ravnini nalazi još jedan pravac plohe Φ^3_ψ, za koji znademo, da je presječnica te ravnine s ravninom τ. Izvodnicama stožca Φ odgovaraju na plohi Φ^3_ψ čunjosječnice, koje se nalaze u ravninama torzalnog pravca, odnosno spojnice dvostrukih točaka PP^I. Za ostale čunjosječnice na takovim plohama vriede posvema naši prijašnji izvodi.

Ako se vrh stožca Φ uzme u ravnini τ, tada ova ravnina sieče taj stožac u dvie realne ili imaginarne izvodnice, koje mogu pasti i skupa. Odavle sliedi, da točka P može kod ovakovih ploha Φ^3_ψ biti hiperbolički, eliptički ili parabolički biplanarna.

Izvedemo li plohu $\Phi^3_\psi = \Phi^3_i$ inverzijom stožca ili valjka na kugli, tada znademo, da ta ploha prolazi absolutnom kružnicom. Ako je ploha Φ stožac, tada se u kružnim presjecima točke P toga stožca nalaze daljnja dva pravca, dakle će na toj plohi biti kružnice u tri pramena ravnina s konačnom osi. Kružnice jednog pramena pridružene su izvodnicama stožca Φ, a os toga pramena je torzalni pravac plohe. Poznato je, da svaka kružnica inverzijom na kugli prelazi opet u kružnicu[20], dakle će kružnice ostalih dvaju pramenova biti pridružene kružnim presjecima stožca Φ. Pramenovima ravnina ovih kružnica u prostoru X_ψ odgovaraju u prostoru X pramenovi kugala kružnih presjeka stožca Φ u točki P. Osi ovih dvaju pramenova su pravci pridruženi kružnicama stožca Φ, koje prolaze točkom P.

Ako bismo mjesto stožca Φ uzeli valjak, ploha Φ^3_i izmienila bi se utoliko, što obje dvostruke točke padaju skupa, t. j. ploha Φ^3_i dira u točki P sama sebe. Uzmemo li uzpravan kružni valjak kao plohu Φ, tada oba kružna presjeka padaju skupa, dakle i daljnja dva pravca na plohi padaju skupa. Ovakova ploha ima dakle dva torzalna pravca, koji su jedan na drugom okomiti, a padaju im skupa i obje dvostruke točke. Kružnice ove plohe nalaze se u ravninama pramenova torzalnih pravaca. Pramen kugala kružnice valjka Φ u točki P sieče taj valjak u daljnjim kružnicama, koje su sve okomite na izvodnicama toga valjka. Ovaj pramen kugala prelazi inverzijom u pramen ravnina, koje plohu Φ^3_i sieku u jednom sistemu kružnica, a os toga pramena je jedan torzalan pravac. Veličina kuta inverzijom na kugli ostaje nepromienjena[21], dakle svaka kružnica pramena ravnina jednog torzalnog pravca (prvog sistema)

---

[20] G. Peschka: Darstellende und projektive Geometrie, Bd. III. str. 238.
[21] G. Peschka: Op. cit. str. 234.

sieče okomito svaku kružnicu pramena ravnina drugog torzalnog pravca (drugog sistema) i obratno.

Postanak ove posljednje plohe možemo zamisliti i kao geometrijsko mjesto ovakovih kružnica: Neka su pravci t_1 i t_2 mimosmjerni i okomiti, a točke T_1 i T_2 neka su nožišta njihove osi. Povučemo li u ravninama pramena pravca t_1 kružnice, koje pravac t_1 diraju u točki T_1, a sieku pravac t_2, tada sve takove kružnice leže na gore izvedenoj plohi Φ_i^3.

11. Osobita vrst ploha Φ_ψ^3 dobije se također, ako se ploha Ψ razpadne u par realnih ili imaginarnih ravnina ξ_1, ξ_2. Te ravnine neka se sieku opet u pravcu p_ψ; one su dvostruke ravnine involucije pramena ravnina tog pravca. Čunjosječnica Π plohe Ψ steže se ovdje u pravac p_ψ, a ravnina τ pridružena je u spomenutoj involuciji ravnini pravca p_ψ i točke P. Na temelju izvoda u točki 15, dio I. sliedi, da će ovako izvedena ploha Φ_ψ^3 dirati ravninu τ duž pravca p_ψ, dakle je taj pravac za tu plohu torzalan. Budući da se je čunjosječnica Π stegnula u pravac, to su i po dvie njene zajedničke točke s čunjosječnicom Π_k pale zajedno i to u probodišta P^I, P^{II} pravca p_ψ s plohom Φ. Spojnice tih točaka s točkom P su prema tome sada četveroznačni pravci takove plohe, jer su već prije bili dvoznačni. Vidjet ćemo kasnije, da je i pravac p_ψ četveroznačan, pa će se na ovoj plohi nalaziti 3 jednostruka četveroznačna pravca.

Tangencialnoj ravnini plohe Φ u probodištu P^I pravca p_ψ s tom plohom pridružen je u prostoru X_ψ neki stožac 2. reda s vrhom P^I (toč. I.). Tangencialne ravnine ovakove plohe Φ_ψ^3 u točkama P^I, P^{II} omataju dakle stožac 2. reda, a taj stožac tangira i ravnina τ (toč. I). Ravnine pravca p_ψ sieku plohu Φ_ψ^3 u čunjosječnicama, a sve te čunjosječnice prolaze točkama P^I, P^{II}. Točke P^I, P^{II} mogu biti i imaginarne, a mogu pasti i skupa. Budući da tangencialne ravnine plohe umataju u točkama P^I, P^{II} stožac 2. reda, to su i te točke dvostruke. Ovakova ploha Φ_ψ^3 ima prema tome 3 dvostruke točke.

Utvrdili smo malo prije, da naša ploha ima 2 četveroznačna pravca. Promotrimo sada pravac p_ψ, a potražimo i ostale pravce ove plohe Φ_ψ^3, s 3 dvostruke točke. Označimo spojnice točaka PP^I i PP^{II} s n_1 i n_2, a izvodnice plohe Φ, odnosno pravce plohe Φ_ψ^3 u točki P, s a_1, a_2. Neka je ploha Φ pravčasta. Izvodnicama plohe Φ

u točki P^I odgovarat će na plohi Φ^3_ψ pravci b_1, b_2, koji prolaze istom točkom, a izvodnicama točke P^{II} pravci c_1, c_2, koji prolaze ovom točkom. Budući da su točke P^I, P^{II} dvostruke, to su one posve ekvivalentne s točkom P, a prema tome je i pravac p_ψ četveroznačan kao i pravci n_1, n_2. Pravci b_1, b_2 i c_1, c_2 su dvoznačni, jer prolaze dvostrukim točkama P^I, P^{II}. Uzmemo li, da su pravci a_1, b_1, c_1 nastali iz izvodnica jednog sistema plohe Φ, a pravci a_2, b_2, c_2 iz izvodnica drugog sistema, tad svaki od prva tri pravca sieče svaki od druga tri. U ravnini svakih dvaju pravaca nalazi se i treći. Pravci n_1, n_2 i p_ψ nalaze se pojedince u ravninama svih takovih parova osim u $a_1 a_2$, $b_1 b_2$ i $c_1 c_2$, a to znači, da na našoj plohi imamo samo 3 jednoznačna pravca i to u ravninama $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$ i $(c_1 c_2)$. Svih pravaca na našoj plohi ima dakle 12. To su: p_ψ, n_1, n_2, a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, $(a_1 a_2)$, $(b_1 b_2)$ i $(c_1 c_2)$. Prva tri su četveroznačna $(3 \cdot 4 = 12)$, drugih šest je dvoznačnih $(6 \cdot 2 = 12)$, a zadnja tri su jednoznačna $(3 \cdot 1 = 3)$. Dakle $(12 + 12 + 3 = 27)$ zadovoljeno je opet broju 27. Ako pravčasta ili nepravčasta ploha Φ dira ravninu τ, bit će dvostruka točka P hiperbolički ili eliptički biplanarna. Među plohama ove vrste ne postoje plohe Φ^3_i i Φ^3_z.

12. Uzmimo, da se je ploha Ψ opet razpala u par realnih ili imaginarnih ravnina ξ_1, ξ_2. a ploha Φ neka bude stožac ili valjak 2. reda s vrhom V. Nastala ploha Φ^3_ψ imat će četiri dvostruke točke, a to su točka P, vrhu V stožca Φ pridružena točka P^{III} i probodišta P^I, P^{II} pravca p_ψ sa stožcem Φ. Na temelju izvoda u toč. 15, dio I. znademo, da je pravac $p_\psi = P^I P^{II}$ torzalan pravac nastale plohe Φ^3_ψ. Pravac PP^{III} također je torzalan, jer tangencialna ravnina stožca Φ duž te izvodnice ostaje tangencialna ravnina i plohe Φ^3_ψ. Znademo iz prošle točke, da su pravci PP^I, PP^{II} na plohi Φ^3_ψ. Izvodnice VP^I, VP^{II} stožca Φ leže u jednoj ravnici pravca p_ψ, dakle će i njima pridruženi elementi na plohi Φ^3_ψ ležati također u nekoj ravnini pravca p_ψ. Odavle direktno sliedi, da su izvodnicama VP^I, VP^{II} stožca Φ pridruženi na plohi Φ^3_ψ pravci $P^{III}P^I$, $P^{III}P^{II}$ t. j. spojnice $P^{III}P^I$, $P^{III}P^{II}$ su također pravci plohe Φ^3_ψ s četiri dvostruke točke.

Tangencialnim ravninama stožca Φ u točkama P^I, P^{II} bit će pridruženi na naš način neki stožci 2. reda s vrhovima u istim točkama (toč. 1), koji će plohu Φ^3_ψ dirati duž pravaca P^{III} P^I i P^{III} P^{II}, kao i duž pravaca PP^I, PP^{II}. Odavle sliedi, da će ploha Φ^3_ψ imati duž pravaca $P^{III}P^I$, $P^{III}P^{II}$ i duž pravaca PP^I, PP^{II}

samo jednu tangencialnu ravninu, a prema tome su i ti pravci torzalni pravci plohe Φ^3_ψ. Vidimo dakle, da ploha Φ^3_ψ s 4 dvostruke točke ima 6 torzalnih ravnina. Znademo već iz prošle točke, da je pravac p_ψ četveroznačan. Pravci PP^{I}, PP^{II}, $P^{III}P^{I}$, $P^{III}P^{II}$ i PP^{III} su također četveroznačni, jer se u svakom ovom pravcu kriju dva pravca, koja su pala skupa, a svi prolaze dvostrukim točkama. U torzalnim ravninama pravaca $P^{III}P^{I}$, $P^{III}P^{II}$ nalazi se po jedan jednoznačni pravac, koji sieče i pravac PP^{II}, odnosno PP^{I}, a isto takav mora biti i u torzalnim ravninama pravaca p_ψ i PP^{III}. Odavle bismo mogli zaključiti, kao da ploha Φ^3_ψ ove vrste ima 28 pravaca. To međutim ne stoji, jer siečemo li tangencialnom ravninom stožca Φ duž izvodnice $PV = PP^{III}$, a to je torzalna ravnina plohe Φ^3_ψ duž pravca PP^{III}, ravninu τ, a ta je torzalna ravnina plohe Φ^3_ψ duž pravca p_ψ, tada je ta presječnica jednoznačni pravac plohe Φ^3_ψ, jer su sve točke tog pravca pridružene točki P stožca Φ. Dakle i obje zadnje torzalne ravnine sadržavaju jedan isti jednoznačni pravac plohe Φ^3_ψ. Plohe Φ^3_ψ s 4 dvostruke točke ne mogu prolaziti absolutnom kružnicom.

III. Plohe 4. reda s dvostrukom čunjosječnicom te s dvostrukim i trostrukim točkama.

Uvod. U trećem dielu ove radnje nastavit ćemo naša iztraživanja ploha, koje dobivamo pomoću Möbiusove kvadratne srodnosti ili kvadratne inverzije, samo ćemo uzeti, da ploha Φ ne prolazi točkom P. Ove će plohe biti 4. reda s jednom, dvie, tri ili četiri dvostruke ili trostruke točke i s jednom dvostrukom čunjosječnicom, koja se može razpasti u dva pravca, a i ti mogu pasti skupa. Razlike između ovakovih ploha Φ^4_ψ po broju višestrukih točaka i razpadnutom obliku dvostruke čunjosječnice nastaju prema oblicima ploha Ψ i Φ. Uglavnom možemo razlikovati ovakovih šest vrsta.

I. Jedna dvostruka točka i nedegenerirana dvostruka čunjosječnica. (Ψ i Φ su obične plohe 2. reda).

II. Dvie dvostruke točke i nedegenerirana dvostruka čunjosječnica. (Ψ je obična ploha 2. reda, Φ je stožac ili valjak 2. reda).

III. Tri višestruke točke i dvostruki i dvostruko torzalan pravac, koji spaja dvie od njih. (Ψ su 2 realne ili imaginarne ravnine, a Φ je obična ploha 2. reda).

IV. Četiri višestruke točke i dvostruki i dvostruko torzalan pravac, koji spaja dvie od njih. (Ψ su 2 realne ili imaginarne ravnine, a Φ je stožac ili valjak 2. reda).

V. Dvie dvostruke točke i dva dvostruka pravca, koji se u jednoj sieku. (Ψ je stožac ili valjak 2. reda, a Φ je obična ploha 2. reda).

VI. Tri dvostruke točke i dva dvostruka pravca, koji se u jednoj sieku. (Ψ je stožac ili valjak 2. reda, a Φ isto tako).

Naša razmatranja početćemo na plohama Φ^4_ψ s jednom dvostrukom točkom i nedegeneriranom dvostrukom realnom ili imaginarnom čunjosječnicom, a mnoga će se ova razmatranja moći prenieti i na ostale vrste.

1. Uzmimo kao u II. dielu, da su plohe Φ i Ψ po volji uzete plohe 2. reda, samo neka ploha Φ ne prolazi točkom P. Točka P, ravnina τ i njene presječne krivulje Π i Π_k s plohama Ψ i Φ ostaju kao u II. dielu. Čunjosječnici $\Pi_k \equiv \Phi \times \tau$ pridružena je opet samo točka P, dakle će i na izvedenoj plohi Φ^4_ψ točka P biti dvostruka. Sve zrake točke P, koje diraju plohu Ψ (stožac $P\Pi$), probadaju plohu Φ u dvie točke. U svakoj točki čunjosječnice Π dakle su po dvie točke plohe Φ^4_ψ, a prema tome je čunjosječnica Π dvostruka za tu plohu. Čunjosječnica Π može biti djelomično ili podpuno izolirana, a može biti i imaginarna. Točka P je uviek realna, ali će i ona biti izolirana, ako je čunjosječnica Π_k imaginarna. Ako se čunjosječnica Π_k razpadne u dva realna ili imaginarna pravca, koji mogu pasti i skupa, t. j. ako ravnina τ dira plohu Φ, imat će ploha Φ^4_ψ u točki P hiperboličku, eliptičku ili paraboličku biplanarnu točku, prema tome, da li je ploha Φ pravčasta, nepravčasta ili stožac odnosno valjak. Dvostruka čunjosječnica Π bit će podpuno izolirana, ako stožac ($P\Pi$) ne sieče plohu Φ realno, a djelomice izolirana, ako ju samo zadire. U slučaju podpunoga prodora bit će ta čunjosječnica realna i ne izolirana. Ako je točka P na plohi Ψ, tada će ploha Φ^4_ψ dirati sama sebe u toj točki. S obzirom na dvostruku točku P i dvostruku čunjosječnicu Π mogli bismo plohe Φ^4_ψ razvrstati u sliedećih 10 vrsta:

a) Točka P i čunjosječnica Π su realne, a nisu izolirane.

b) Točka P nije izolirana, a čunjosječnica Π je djelomično izolirana (ima realne kuspidalne točke).

c) Točka P nije izolirana, a čunjosječnica Π je podpuno izolirana.

d) Točka P nije izolirana, a čunjosječnica Π je imaginarna.
e) Točka P je izolirana, a čunjosječnica Π nije izolirana.
f) Točka P je izolirana, a čunjosječnica Π je djelomično izolirana.
g) Točka P i čunjosječnica Π su izolirane.
h) Točka P je izolirana, a čunjosječnica Π jc imaginarna.
i) Ploha Φ_ψ^4 dotiče sama sebe u točki P realno.
j) Ploha Φ_ψ^4 dotiče sama sebe u točki P imaginarno.

Vrstama d) i h) mogli bismo dati i podvrste, ako čunjosječnica Π ode u bezkonačnost, osobito ako postane absolutnom kružnicom. Ovaj posljednji slučaj nastaje inverzijom na kugli. U prva četiri slučaja može u točki P nastati biplanarna točka. U zadnjem i predzadnjem slučaju može u točki P također nastati biplanarna točka, ali skrivena, kod koje se par realnih ili imaginarnih tangencialnih ravnina plohe Φ_ψ^4 u dvostrukoj točki P stisnuo u ravninu τ.

Na temelju naših dosadanjih izvoda u I. i II. dielu ove radnje znademo, da će ove plohe biti četvrtoga reda. Mi to međutim možemo i ovdje vrlo jednostavno dokazati. Ploha Φ_ψ^4 bit će onolikog reda, u koliko ju točaka probada svaki pravac prostora. Uzmimo neki pravac u prostoru X_ψ, a njime i točkom P položimo ravninu. U prostoru X odgovarat će tom pravcu neka čunjosječnica (toč. 1, dio I), koja plohu Φ probada u 4 točke. Dakle i njoj pridruženi pravac probada plohu Φ_ψ^4 u četiri točke. Sliedi prema tome, da je ploha Φ_ψ^4 četvrtoga reda.

Plohu Φ_ψ^4 možemo uzeti, da je nastala i kao proizvod dvaju projektivnih pramenova ploha 2. i 3. reda i to ovako: Uzmimo točkom P po volji ravninu σ, a u točki P neka ju diraju sve plohe 2. reda pramena γ, koje prolaze čunjosječnicom Π_k na plohi Φ. Sve plohe pramena γ sieku plohu Φ u još jednoj čunjosječnici, a ravnine svih tih čunjosječnica sieku se u jednom pravcu ravnine σ, dakle čine neki pramen ravnina δ. Ovo posljednje možemo dokazati tako, da pramen γ siečemo s dvie ravnine točke P. Promotrimo li presječne pramenove čunjosječnica[1], vidjet ćemo, da sliedi navedeno.

Obćenito pramen ravnina i s njim projektivan pramen ploha 2. reda daju plohu 3. reda (Steiner). No jer se ova dva naša pramena nalaze u reduciranom položaju, t. j. os pramena ravnina je u

[1] Izporedi: H. Durège: Die ebenen Curven dritter Ordnung, str. 75.

zajedničkoj tangencialnoj ravnini pramena γ ploha 2. reda, proizvod se razpada u plohu Φ drugoga reda i ravninu σ.

Pramenu γ pridružen je u prostoru X_ψ pramen γ_ψ specialnih ploha 3. reda sa zajedničkom dvostrukom točkom, a pramenu δ pridružen je pramen δ_ψ ploha 2. reda. Proizvod pramenova γ_ψ i δ_ψ je ploha Φ^4_ψ.

2. Tangencialnu ravninu plohe Φ^4_ψ u nekoj njezinoj točki, kao i direkcioni stožac njezine neizmjerno daleke krivulje, možemo odrediti posvema jednako kao na plohi Φ^3_ψ trećega reda. (Vidi toč. 5, dio II).

3. Vidjeli smo kod ploha Φ^3_ψ 3. reda, da broj pravaca dvostruke točke P daju u prvom redu presječne točke čunjosječnica Π i Π_k u ravnini τ. Zajedničke točke čunjosječnica Π i Π_k označimo opet s B_1, B_2, B_3 i B_4. Spojnice tih točaka $b_1 = PB_1$, $b_2 = PB_2$, $b_3 = PB_3$ i $b_4 = PB_4$ s točkom P pravci su plohe Φ^4_ψ, jer su točkama B_1, B_2, B_3 i B_4 na plohi Φ pridruženi čitavi pravci b_1, b_2, b_3 i b_4 na plohi Φ^4_ψ. Sliedi prema tome sliedeće:

N a o b ć o j p l o h i 4. r e d a s j e d n o m d v o s t r u k o m t o č k o m i d v o s t r u k o m č u n j o s j e č n i c o m m o g u b i t i n a j v i š e č e t i r i p r a v c a, k o j i p r o l a z e n j e n o m d v o s t r u k o m t o č k o m.

Ovi pravci mogu biti u parovima imaginarni, jer takove mogu biti i točke B_1, B_2, B_3 i B_4.

Uzmimo, da su sva ova četiri pravca realna. U ravninama pramena svakoga toga pravca nalaze se krivulje 3. reda roda nultoga. Tri ravnine svakog ovakva pramena prolaze ostalim pravcima dvostruke točke, dakle se takova presječna krivulja razpada u čunjosječnicu i dva pravca. Jer dvostrukom točkom prolaze 4 pravca, postoji 6 takovih ravnina, pa sliedi:

N a o b ć o j p l o h i 4. r e d a s j e d n o m d v o s t r u k o m t o č k o m i d v o s t r u k o m č u n j o s j e č n i c o m p o s t o j i n a j v i š e š e s t č u n j o s j e č n i c a, k o j i h r a v n i n e i d u d v o s t r u k o m t o č k o m, a u n j i m a s e n a l a z e j o š d v a p r a v c a p l o h e, k o j i s e s i e k u u t o j d v o s t r u k o j t o č k i.

Ako su jedan ili oba para pravaca dvostruke točke imaginarni, tada postoje samo dvie takove čunjosječnice.

Na plohi Φ^4_ψ ima još čunjosječnica, ali se u njihovoj ravnini nalazi ili još jedna čunjosječnica ili dva pravca, koji se ne sieku u dvostrukj točki P. Potražimo te ostale čunjosječnice i pravce.

Odaberimo par realnih ili imaginarnih pravaca b_1, b_2 plohe Φ^4_ψ u dvostrukoj točki P. Dvostrukom čunjosječnicom Π i tim pravcima b_1, b_2 dan je pramen ploha 2. reda. Svaka ploha ovog pramena sieče plohu Φ^4_ψ u pravcima b_1, b_2 i dvostrukoj čunjosječnici Π. Presječna krivulja je međutim osmoga reda, dakle od svake presječne krivulje ostaje još jedna čunjosječnica. Takav pramen (b_1, b_2, Π) ploha 2. reda daje dakle na plohi Φ^4_ψ sistem od ∞^1 čunjosječnica. U pramenu (b_1, b_2, Π) ploha 2. reda nalazi se samo jedan stožac, a taj daje drugi par pravaca b_3, b_4 dvostruke točke P. Siečemo li ravninom pravaca b_1, b_2 ravninu τ, onda tom presječnicom s_{12} prolaze sve ravnine prostora X, koje su pridružene plohama pramena (b_1, b_2, Π) u prostoru X_ψ. Čunjosječnice plohe Φ^4_ψ onog sistema, što ih daje pramen ploha 2. reda (b_1, b_2, Π), pridružene su dakle čunjosječnicama plohe Φ, koje se nalaze u pramenu ravnina presječnice s_{12}. Takvih pramenova s čunjosječnicama plohe Φ ima najviše šest, a osi su im pravci $s_{12} = (\tau \times b_1\, b_2)$, $s_{13} = (\tau \times b_1\, b_3)$, $s_{14} = (\tau \times b_1\, b_4)$, $s_{23} = (\tau \times b_2\, b_3)$, $s_{24} = (\tau \times b_2\, b_4)$, i $s_{34} = (\tau \times b_3\, b_4)$. U ravnini svake ovakove čunjosječnice plohe Φ^4_ψ nalazi se još jedna čunjosječnica, a obje se sieku na dvostrukoj čunjosječnici Π.

Uzmimo jednu ovakovu čunjosječnicu c_ψ na plohi Φ^4_ψ s još jednom čunjosječnicom c^1_ψ u njenoj ravnini. Čunjosječnicom c na plohi Φ, koja je pridružena čunjosječnici c_ψ, te čunjosječnicom Π i točkom P položimo plohu W 2. reda. Ovo je moguće, jer se čunjosječnice c i Π sieku u dvie točke. Ova ploha W sieče plohu Φ u još jednoj čunjosječnici c_1, a ovoj je na plohi Φ^4_ψ pridružena čunjosječnica c^1_ψ. Ravnina čunjosječnica c_ψ i c^1_ψ plohe Φ^4_ψ prolazi presječnicom tangencialne ravnine plohe W u točki P s ravninom τ. Čunjosječnica c_1 ne može prolaziti točkama B_1, B_2 jer je sastavni dio prodorne krivulje (c, c_1) ploha Φ, W, na kojoj se presječnoj krivulji nalaze i točke B_3, B_4. Prema tome ona mora prolaziti točkama B_3, B_4. Odavle nadalje sliedi, da čunjosječnicama plohe Φ u ravninama pramenova pravaca s_{12}, s_{34} pridružene čunjosječnice na plohi Φ^4_ψ leže u jednom sistemu ravnina tako, da se u svakoj ravnini nalazi jedna čunjosječnica plohe Φ^4_ψ pridružena čunjosječnici plohe Φ u jednoj ravnini pravca s_{12} i jedna čunjosječnica plohe Φ^4_ψ pridružena čunjosječnici plohe Φ u jednoj ravnini pravca s_{34}. Posvema analogno vriedi i za čunjosječnice u ravninama spojnica s_{13}, s_{24} i s_{14}, s_{23}, pa smo tako dobili sliedeće:

Na svakoj plohi Φ^4_ψ s jednom dvostrukom točkom i dvostrukom čunjosječnicom postoje najviše tri sistema po ∞^1 ravnina, u kojima se nalaze po dvie čunjosječnice te plohe, a da te ravnine ne prolaze dvostrukom točkom.

Neka je ploha Φ pravčasta, a pravci b_1, b_2, b_3 i b_4 neka su realni. Realnim točkama B_1, B_2, B_3 i B_4 na dvostrukoj čunjosječnici Π prolaze po dvie izvodnice plohe Φ, a tim izvodnicdma bit će pridruženi na plohi Φ^4_ψ opet pravci, koji prolaze probodištima tih izvodnica s plohom Ψ i sieku dvostruku čunjosječnicu (vidi točku 10, dio I). Vidimo dakle, da ploha Φ^4_ψ može imati daljnjih osam pravaca. Četiri od ovih mogu se pojaviti kao presječna krivulja ploha Ψ i Φ, ako je i ploha Ψ pravčasta. Budući da ploha Φ ne prolazi točkom P, to na plohi Φ^4_ψ ne može biti više od do sada navedenih pravaca, jer bi svaki drugi pravac te plohe u prostoru X_ψ prešao u prostoru X u pravac ili čunjosječnicu, koji ne bi bio na plohi Φ. Sliedi prema tome ovaj stavak:

Na obćoj plohi 4. reda s dvostrukom točkom i dvostrukom čunjosječnicom može se nalaziti najviše 12 pravaca. Četiri od tih prolaze dvostrukom točkom i sieku dvostruku čunjosječnicu (binarni pravci)[2], a ostalih osam u parovima sieku dvostruku čunjosječnicu Π.

Na temelju ovog stavka možemo odmah proširiti i napried izvedeni stavak o čunjosječnicama plohe Φ^4_ψ, kojih ravnine idu dvostrukom točkom P, a koji glasi:

Osim šest ravnina dvostruke točke P, u kojima se nalazi po jedna čunjosječnica i par pravaca te plohe, koji se sieku u dvostrukoj točki, prolazi tom točkom daljnjih osam ravnina, u kojima se nalazi čunjosječnica i dva pravca te

[2] R. Sturm: Ueber die Flächen mit einer endlichen Zahl von (einfachen) Geraden, vorzugsweise die der vierten und fünften Ordnung, Math. Annalen, sv. IV, str. 268.

plohe, ali dvostrukom točkom prolazi samo jedan od tih pravaca i čunjosječnica.

Svaka izvodnica plohe Φ u točki B_1 sieče po jednu od onih u točkama B_2, B_3 i B_4, dakle će i toj izvodnici pridružen pravac na plohi Φ^4_ψ sjeći tri ostala pravca te plohe, koji ne prolaze dvostrukom točkom P. Svaki pravac izvan dvostruke točke sieče jednoga dvostruke točke P, pa za naše plohe Φ^4_ψ vriedi prema tome i ovaj stavak:

Svaki pravac plohe Φ^4_ψ, koji ne prolazi dvostrukom točkom sieče daljnja četiri pravca te plohe, od kojih jedan uviek prolazi dvostrukom točkom. A svaki pravac dvostruke točke P plohe Φ^4_ψ sieče osim preostala tri pravca dvostruke točke još dva izvan dvostruke točke.

Obćeno kod ploha 4. reda s dvostrukom čunjosječnicom sieče svaki njezin pravac pet ostalih. No jer se naši pravci dvostruke točke broje dvostruko, to je opet tome zahtjevu udovoljeno, a time se i naši izvodi posvema poklapaju s izvodima R. Sturma.[3]

Na temelju dosadanjih razmatranja možemo o krivuljama 3. reda roda nultoga na plohama Φ^4_ψ, izreći sliedeći stavak:

Na obćenoj plohi 4. reda s dvostrukom točkom i dvostrukom čunjosječnicom ima najviše 12 pramenova ravnina, u kojima se nalaze krivulje 3. reda roda nultoga te plohe. U osam pramenova postoje po 4 ravnine, a u četiri pramena po pet ravnina, u kojima se ta krivulja razpada u čunjosječnicu i pravac. Posljednja četiri pramena dana su pravcima dvostruke točke P.

Uzmimo, da ravnina dviju izvodnica i_1, i_2 različitih sistema plohe Φ, koje prolaze točkama B_1, B_2, sadržava dvostruku točku P. U toj ravnini bit će na plohi Φ^4_ω osim pravaca b_1, b_2 još i pravci i^1_ψ, i^2_ψ, koji također prolaze točkama B_1, B_2. Točkom B_1 prolaze pravci b_1, i^2_ψ, a točkom B_2 pravci b_2, i^1_ψ. Vidimo dakle:

Četiri pravca plohe Φ^4_ψ mogu se nalaziti u jednoj ravnini, ali u tom slučaju uviek dva prolaze dvostrukom točkom.

---

[3] R. Sturm: Op. cit. str. 264. i 268.

Sjecištu izvodnica i_1, i_2 odgovarat će točka I_ψ na plohi Φ^4_ψ. Uz mimo sada, da je točka I upravo u točki B_1. Drugim riečima to znači, da se tangencialne ravnine ploha Φ i Ψ u točki $B_1 = I$ sieku u pravcu b_1. Izvodnicama i_1, i_2 točke $B_1 = I$ odgovarat će na plohi Φ^4_ψ pravci $\overset{1}{i}_\psi$, $\overset{2}{i}_\psi$, koji će se sjeći u točki I_ψ na dvostrukoj čunjosječnici Π. U pramenu ravnina pravca b_1 na ovakovoj plohi Φ^4_ψ nalazit će se krivulja 3. reda roda nultoga, koja će pravac b_1 dirati u točki B_1. U ravnini izvodnica i_1, i_2 toga pramena razpada se ta krivulja 3. reda u pravce $\overset{2}{i}_\psi$, $\overset{1}{i}_\psi$ i pravac b_1, a odavle sliedi, da je pravac b_1 zapravo torzalan pravac plohe Φ^4_ψ.

Za plohe 4. reda s dvostrukim pravcem dokazano je, da na njima ima 16 jednostavnih pravaca[4], a obćeno za plohe m-toga reda, koje imaju m-2 struki pravac, izveo je broj λ jednostavnih pravaca R. Sturm i to: $\lambda = 6m - 8$[5]. U istoj radnji pokazao je R. Sturm da na plohi 4. reda sa δ-strukom linijom ($\delta = 1, 2$) ima $\lambda = 8\,\delta\,(3 - \delta)$ jednostavnih pravaca, a za oba slučaja je opet $\lambda = 16$. Naše plohe Φ^4_ψ s dvostrukom točkom i dvostrukom čunjosječnicom imaju 12 jednostavnih pravaca, od kojih su četiri dvoznačna (binarni pravci).

Vidjeli smo do sada, da na našoj plohi Φ^4_ψ može biti 6 čunjosječnica, kojih ravnine prolaze dvostrukom točkom, a u njihovim se ravninama nalazi par pravaca te plohe, koji se sieku u dvostrukoj točki. Ovi pravci sieku dvostruku čunjosječnicu Π u istim točkama, u kojima i čunjosječnica njihove ravnine, jer tu moraju biti dvostruke točke. Nadalje ih ima 12, u kojih ravninama se također nalaze po dva pravca, a njihova ravnina ne prolazi dvostrukom točkom. To su ravnine onih parova pravaca, koji su pridruženi parovima izvodnica plohe Φ u točkama B_1, B_2, B_3 i B_4, koje se sieku izvan tih točaka. Osim ovih čunjosječnica ima ih još 8, u kojih se ravninama nalaze dva pravca, a njihova ravnina prolazi dvostrukom točkom, ali tom točkom prolazi samo jedan pravac i ta čunjosječnica. Te su čunjosječnice u zajedničkim ravninama pramenova pravaca b_1, b_2, b_3 i b_4 i onih izvan dvostruke točke P. Uzmemo li ravninu dvostruke čunjosječnice Π kao ravninu, u kojoj se nalazi samo jedna čunjosječnica, tada za naše plohe Φ^4_ψ možemo izreći i ovaj zanimivi stavak:

---

[4] J. Majcen: Die Fläche vierter Ordnung mit einer Doppelgeraden e. t. c. Sitzungsb. der k. Ak. der Wiss. in Wien, Bd. CXXI, Abt. II a.

[5] R. Sturm: Op. cit. str. 250.

Za obćenu plohu 4. reda s dvostrukom točkom i dvostrukom čunjosječnicom postoji najviše 27 ravnina u prostoru, u kojima će se nalaziti samo jedna čunjosječnica te plohe; druga se čunjosječnica razpada ili u par pravaca, ili se poklapa s prvom (dvostruka čunjosječnica).

Vidjet ćemo odmah, da na našim plohama Φ^4_ψ može biti osim navedenih još i drugih čunjosječnica, ali u njihovim ravninama se nalazi još jedna čunjosječnica. Takva tri sistema smo izveli već napried, a sada ćemo odkriti još jedan, kojega će ravnine umatati stožac 2. reda s vrhom u dvostrukoj točki plohe.

Ploha Φ neka bude opet pravčasta. Sve tangencialne ravnine ove plohe, koje prolaze dvostrukom točkom P umataju stožac 2. reda, a u svakoj se toj ravnini nalaze dvie njezine izvodnice. Ove ravnine, odnosno čitavi stožac ostaje tangencialan i za plohu Φ^4_ψ, a izvodnice plohe Φ prelaze u čunjosječnice plohe Φ^4_ψ. Obje čunjosječnice u jednoj ravnini sieku se u dvostrukoj točki P i na dvostrukoj čunjosječnici Π. Dakle sve ovakove čunjosječnice prolaze dvostrukom točkom P. Ovakove čunjosječnice na plohi Φ^4_ψ čine opet dva sistema. Svaki sistem izvodnica plohe Φ daje sistem čunjosječnica plohe Φ^4_ψ. Odavle direktno sliedi, da svaka čunjosječnica jednog sistema sieče svaku čunjosječnicu drugog sistema u jednoj točki i obratno, i to izvan dvostruke točke i dvostruke čunjosječnice. Nadalje svakom točkom takove plohe Φ^4_ψ prolaze po dvie njezine čunjosječnice, koje sieku dvostruku čunjosječnicu i prolaze dvostrukom točkom. Čunjosječnice jednog ovakovog sistema sieku svake dvie čunjosječnice drugog sistema u dva projektivna niza.

Naše plohe Φ^4_ψ mogli bismo prema tomę razdieliti u dva razreda. One, koje su nastale iz pravčastih ploha Φ, i one, koje su nastale iz nepravčastih. Nazovimo one prve koničnim plohama. Iz naših prijašnjih razmatranja vidimo, da samo na koničnoj plohi Φ^4_ψ može postojati svih 12 realnih pravaca. Uobće pravci plohe Φ^4_ψ, koji ne prolaze dvostrukom točkom, mogu se nalaziti samo na koničnim plohama Φ^4_ψ. Na plohama, koje nisu konične, mogu postojati najviše 4 realna pravca, a ti prolaze dvostrukom točkom. U svezi s tim postoji na njima i samo 6 čunjosječnica, u kojih se ravninama druga čunjosječnica razpada u pravce. To su ravnine parova pravaca dvostruke točke.

Osim toga jasno je, da samo na koničnim plohama može točka P postati hiperbolički biplanarna.

Ravnine parova čunjosječnica, koji prolaze dvostrukom točkom, umataju stožac $(P\Phi)$ 2. reda. Svaku tangentu plohe Φ^4_ψ u dvostrukoj točki P tangiraju dvie čunjosječnice plohe Φ^4_ψ. Ove su dvie čunjosječnice pridružene onim izvodnicama plohe Φ, koje prolaze probodištem spomenute tangente s ravninom τ. Uzmemo li sada točku P na plohi Ψ, t. j. ploha Φ^4_ψ sama sebe dira u toj točki, tada će svaki pravac točke P u ravnini τ dirati u toj točki dva para čunjosječnica konične plohe Φ^4_ψ, jer tim pravcem možemo položiti dvie tangencialne ravnine na poznati stožac, a u svakoj se nalaze dvie čunjosječnice, koje moraju tangirati ravninu τ kao splošteni tangencialni stožac dvostruke točke P. Ako još uzmemo, da i pravčasta ploha Φ dira ravninu τ, t. j. u točki P dobivamo skrivenu hiperboličku biplanarnu točku, tada svaki navedeni pravac u ravnini τ dira samo jedan par čunjosječnica konične plohe u točki P, jer stožac 2. reda, što ga umataju ravnine ovakovih parova čunjosječnica, dira ravninu τ.

4. Neizmjerno daleka krivulja plohe Φ^4_ψ sieče absolutnu kružnicu u četiri para konj. imaginarnih točaka, a svaki od tih parova daje realnu spojnicu. Svaka od ovih daje u konačnosti pramen paralelnih ravnina. Te ravnine sieku plohu Φ^4_ψ u krivuljama, koje prolaze pripadnim absolutnim točkama, prema tome za obću plohu 4. reda ne mogu postojati više od četiri pramena paralelnih ravnina, koje tu plohu sieku u cirkularnim krivuljama 4. reda. Kod naših ploha Φ^4_ψ bit će te cirkularne krivulje 4. reda roda prvoga. Budući da su kod naših ploha Φ^4_ψ samo one ravnične krivulje 4. reda roda nultoga, kojih ravnine prolaze dvostrukom točkom P, sliedi:

N a p l o h a m a Φ^4_ψ s d v o s t r u k o m t o č k o m i d v o s t r u k o m č u n j o s j e č n i c o m n e m o g u s e n a l a z i t i v i š e o d č e t i r i c i r k u l a r n e k r i v u l j e 4. r e d a r o d a n u l t o g a.

Svaka spojnica para absolutnih točaka sieče neizmjerno daleku krivulju plohe 4. reda u daljnje dvie realne ili imaginarne točke. Ako se prema tome u nekoj ravnini ovakovog pramena nalazi obična čunjosječnica, tada se u njoj nalazi još i jedna kružnica ili par minimalnih pravaca. Prolazi li kojom od posljednjih točaka pravac plohe Φ^4_ψ, tada ova neizmjerno daleka spojnica daje u pramenu ravnina toga pravca plohe Φ^4_ψ onu ravninu, koja plohu Φ^4_ψ

sieče u cirkularnoj krivulji 3. reda roda nultoga. Navedene spojnice absolutnih točaka sieku neizmjerno daleku krivulju plohe Φ_ψ^4 osim u osam absolutnih točaka još u drugih osam točaka, dakle:

Na plohi Φ_ψ^4 s jednom dvostrukom točkom i dvostrukom čunjosječnicom ne može biti više od osam ravničnih cirkularnih krivulja 3. reda, ako ih nema neizmjerno mnogo.

Postoje naime plohe 4. reda s dvostrukom točkom i dvostrukom čunjosječnicom s neizmjerno mnogo cirkularnih krivulja 3. reda.

Svaki pravac plohe Φ_ψ^4 sieče njezinu dvostruku čunjosječnicu Π, dakle i svaka ravnina svakog tog pravca sieče tu čunjosječnicu u još jednoj točki. Odavle sliedi:

Na plohama 4. reda s dvostrukom točkom i dvostrukom čunjosječnicom nema ravničnih krivulja 3. reda roda prvoga.

5. Kod izvođenja naših ploha uzmimo kao u II. dielu, da su plohe Φ i Ψ kugle. Znademo, da svaka ploha Φ_ψ^8 i Φ_ψ^4 prolazi presječnom krivuljom ploha Φ i Ψ, jer točke te krivulje ostaju kod prelaza iz prostora X u X_ψ invariantne. Kugle Φ i Ψ prodiru se u nekoj konačnoj kružnici i absolutnoj kružnici, a prema tome će ovom prolaziti i izvedena ploha $\Phi_\psi^4 = \Phi_c^4$. Budući da su čunjosječnice Π i Π_k u ravnini τ kružnice, sieku se one u dvie konačne realne ili imaginarne točke i u absolutnim točkama ravnine τ. Na plohama Φ_c^4 mogu dakle biti najviše dva realna pravca, dok je drugi par pravaca par minimalnih pravaca. Ravnina ovih posljednjih paralelna je s ravninom τ dvostruke čunjosječnice Π. Svi ravni presjeci plohe Φ_c^4 su cirkularni. Ravničnih krivulja 3. reda roda nultoga ima na plohi Φ_c^4 ili neizmjerno mnogo, u dva pramena ravnina, ili niti jedna. Na plohi Φ_c^4 nalazi se jedan par realnih ili imaginarnih i jedan par minimalnih pravaca, u kojih se ravninama nalazi još jedna čunjosječnica. Odavle sliedi:

Na plohama Φ_c^4 nalaze se samo dvie kružnice, u kojih se ravninama nalazi par realnih ili imaginarnih pravaca te plohe, koji prolaze njenom dvostrukom točkom.

Ravnine ovih dviju kružnica sieku ravninu τ u pravcima s_1 i s_∞, od kojih je s_∞ neizmjerno daleki pravac ravnine τ. Kružnice kugle Φ koje se nalaze u ravninama pramenova pravaca s_1 i s_∞, daju na plohi Φ_c^4 dva sistema pridruženih čunjosječnica. Kružnice pramena s_∞ na kugli Φ dat će na plohi Φ_c^4 sistem običnih čunjosječnica, jer one ne sieku absolutnu kružnicu. Ravnine tih čunjosječnica umataju neki valjak, kojega će izvodnice biti okomite na simetralnu ravninu plohe Φ_c^4. Simetralna ravnina ove plohe određena je dvostrukom točkom P i središtima kugala Φ i Ψ. Kružnice kugle Φ u ravninama pramena pravca s_1 sieku absolutnu kružnicu u dvie točke, koje ostaju invariantne za pridružene čunjosječnice na plohi Φ_c^4. Čunjosječnice ovog sistema bit će dakle kružnice, a ravnine su im paralelne s ravninama pripadnih kružnica na kugli Φ. Dakle su opet okomite na simetralnu ravninu i umataju neki valjak. U ravnini svake čunjosječnice od oba sistema nalazi se još jedna čunjosječnica. Uzmimo, da kružnici c kugle Φ u jednoj ravnini pramena s_1 odgovara kružnica c_ψ na plohi Φ_c^4. Ravnina čunjosječnice c_ψ u prostoru X_ψ pridružena je u prostoru X plohi 2. reda određenoj točkom P i kružnicama c i Π. Ova ploha sieče kuglu Φ u još jednoj kružnici c_1, jer je kružnica c već jedan dio presječne krivulje. Ova druga kružnica c_1 pripada drugom sistemu kružnih presjeka te plohe, a u tom je i kružnica Π, dakle je ona paralelna s kružnicom Π. Vidimo dakle, da kružnica c_1 pripada u kružnice pramena ravnina pravca s_∞, a njoj pridružena čunjosječnica c_ψ^1 na plohi Φ_c^4 bit će u ravnini kružnice c_ψ. Sliedi dakle, da se po jedna čunjosječnica iz svakog sistema čunjosječnica plohe Φ_c^4 nalazi u istoj ravnini, t. j. nema dva sistema ravnina nego samo jedan. Budući da plohe Φ_c^4 ne mogu biti konične, to za njih prema tome vriedi ovaj stavak:

Na plohama Φ_c^4 postoji samo jedan sistem ravnina parova čunjosječnica. Ove ravnine ne prolaze dvostrukom točkom, a u svakoj se nalazi jedna obična čunjosječnica i jedna kružnica.

Po volji uzeta ravnina prostora X_ψ prelazi u prostoru X u plohu 2. reda, koja ide točkom P i čunjosječnicom Π u ravnini τ. Presječna krivulja ove plohe s kuglom Φ, projicirana iz točke P na tu ravninu, daje presječnu krivulju te ravnine s plohom Φ_c^4. Ako ta ploha 2. reda dira kuglu Φ u jednoj točki, imat će ta krivulja jednu dvostruku točku. Izveli smo dakle poznatu činjenicu, da ravnična cirkularna krivulja 4. reda nastaje centralnom projekcijom prostorne krivulje 4. reda prve vrste na kugli, iz neke po volji uzete točke.

Dvostruka točka P plohe Φ_c^4 može ali i ne mora biti izolirana, a može u njoj ploha i sama sebe dirati. Ako kugla Φ dira ravninu τ dvostruke čunjosječnice Π, imat će ploha Φ_c^4 eliptički biplanarnu točku P.

6. Čunjosječnica Π na plohi Ψ je dvostruka čunjosječnica plohe Φ_c^4. Kod inverzije s obzirom na kuglinu plohu Ψ prelazi ta čunjosječnica u absolutnu kružnicu, dakle svaka ploha Φ_ψ^4, nastala inverzijom plohe 2. reda, prolazi dva puta absolutnom kružnicom. Označimo ovakve plohe s Φ_{2i}^4. Odavle direktno sliedi, da su svi ravnični presjeci tih ploha bicirkularne krivulje 4. reda. Na plohama Φ_{2i}^4 nema prema tome niti jedne ravnične krivulje 3. reda, t. j. niti jednog realnog pravca.

Svaka ravnina prelazi inverzijom na kugli opet u kuglu, koja prolazi centrom inverzije. Presječna krivulja ove kugle s plohom Φ projicirana iz točke P na tu ravninu daje presječnu krivulju ove ravnine s plohom Φ_{2i}^4. Sliedi dakle poznata činjenica, da se svaki ravničan presjek plohe Φ_{2i}^4, koji ne ide dvostrukom točkom, javlja kao centralna projekcija prostorne krivulje 4. reda prve vrste na kugli, iz jedne točke (P) na toj kugli. Spojnica centra inverzije sa središtem kugle okomita je kod inverzije na onu ravninu, iz koje je ta kugla inverzijom nastala. Vidimo dakle, da je ta centralna projekcija zapravo stereografska projekcija, koja projiciranjem prostorne krivulje 4. reda prve vrste s plohe svoje kugle daje bicirkularnu krivulju 4. reda.[6]

Ploha Φ_{2i}^4 može biti konična, jer ploha Φ može biti pravčasta. Inverzijom prelazi svaka izvodnica plohe Φ u kružnicu, koja prolazi centrom inverzije, t. j. dvostrukom točkom plohe Φ_{2i}^4. Položimo dvostrukom točkom P obje ravnine kružnih presjeka plohe Φ. Ove kružnice inverzijom prelaze opet u kružnice, a sieku absolutnu kružnicu u dvie točke. Spojnice ovih točaka s dvostrukom točkom daju pravce plohe Φ_{2i}^4. Za plohe Φ_{2i}^4 sliedi dakle sliedeći stavak:

N a s v a k o j p l o h i Φ_{2i}^4 p o s t o j e d v a p a r a m i n i m a l n i h p r a v a c a, k o j i s e s i e k u u d v o s t r u k o j t o č k i, a u č i j i m r a v n i n a m a s e n a l a z e k r u ž n i c e.

Ove će kružnice biti imaginarne, ako su imaginarni presjeci plohe Φ s ravninama tih kružnica.

---

[6] G. Loria: Spez. alg. und transz. Kurven. Theorie und Geschichte, Bd. I, str. 117—118.

Ravnine kružnih presjeka plohe Φ u centru inverzije P sieku neizmjerno daleku ravninu dvostruke absolutne kružnice u pravcima s_1^∞ i s_2^∞. U ravninama pramenova ovih dvaju pravaca nalaze se kružni presjeci plohe a inverzijom s obzirom na kuglu Ψ prieći će te kružnice u kružne presjeke plohe Φ^4_{2i}, jer kružnica inverzijom na kugli opet prelazi u kružnicu. Položimo jednim kružnim presjekom plohe Φ i centrom inverzije P neku kuglinu plohu. Ova kugla prodire plohu Φ u još jednoj kružnici drugog sistema njenih kružnih presjeka. Ova kugla inverzijom prelazi u ravninu, a oba kružna presjeka plohe Φ prelaze u kružne presjeke plohe Φ^4_{2i}. Dakle po jedan kružni presjek plohe Φ iz svakog sistema daje na plohi Φ^4_{2i} par kružnica, koje se nalaze u jednoj ravnini. Sliedi dakle:

Za svaku plohu Φ^4_{2i} postoji jedan sistem ravnina, koje tu plohu sieku u po dvie kružnice, a ne prolaze dvostrukom točkom.

Ako je ploha Φ^4_{2i} konična; postoji na njoj još jedan takav sistem, ali sve kružnice tog sistema prolaze dvostrukom točkom. Ove su kružnice nastale iz izvodnica plohe Φ, pa su na temelju prijašnjih razmatranja poznate sve osebine tih kružnica i njihovih ravnina (toč. 3.).

Koničnu plohu Φ^4_{2i} mogli bismo na temelju naših dosadanjih razmatranja izvesti i na sliedeći način: Uzme se stožac 2. reda s vrhom P i u prostoru po volji ravnina s dvie kružnice c_1 i c_2. Svaka tangencialna ravnina stožca sieče kružnice c_1, c_2 u točkama U_1, V_1 i U_2, V_2. (Ove točke mogu biti i imaginarne). Povučemo li točkama U_1, U_2, P i V_1, V_2, P kružnice, tada sve takove kružnice leže na nekoj plohi Φ^4_{2i}.

Budući da plohe Φ^4_{2i} mogu biti i konične i nekonične, to one mogu imati u točki P ili hiperboličku ili eliptičku biplanarnu točku. Vrsta ove točke ovisi o tome, da li je ploha Φ hiperbolički ili eliptični paraboloid.

Uzmemo li, da je ploha Φ stožac ili valjak 2. reda, tada pridružena ploha Φ^4_ψ ima dvie dvostruke točke P, P^I kao i analogna ploha Φ^8_ψ 3. reda. Dvostruka točka P^I pridružena je vrhu stožca Φ. Svaka ravnina ovih dviju dvostrukih točaka sieče plohu Φ^4_ψ u dvie čunjosječnice, koje su pridružene paru izvodnica stožca Φ u toj ravnini, a sieku se u tim dvostrukim točkama i na dvostrukoj čunjosječnici. Prema tome, da li se točka P nalazi unutar ili izvan stožca, odnosno valjka Φ, imat će ploha Φ^4_ψ dvie imaginarne ili realne torzalne ravnine s jednom torzalnom čunjosječnicom u svakoj, a obje prolaze i drugom dvostrukom točkom. Svaka ovakva čunjosječnica ima dvie realne ili imaginarne kuspidalne točke na dvostrukoj čunjosječnici Π. Čunjosječnice Π i Π_k u ravnini τ sieku se u četiri točke, kojima prolaze pravci plohe Φ^4_ψ dvostruke točke P. Svakom ovom točkom prolazi i po jedna izvodnica stožca Φ. Svakoj ovoj izvodnici bit će na plohi Φ^4_ψ pridružen neki pravac, koji prolazi dvostrukom točkom P^I, jer je ona pridružena vrhu stožca Φ. Odavle se odmah vidi, da na ovakovim plohama ima najviše 8 realnih dvoznačnih pravaca, t. j. u svemu 16. Četiri ili svih osam mogu biti imaginarni, ali uviek prolazi isti broj realnih svakom dvostrukom točkom.

Analogno kao kod ploha s jednom dvostrukom točkom (toč. 1) mogli bismo i ovdje izvesti razne variante s obzirom na izoliranost točke P, podpunu ili djelomičnu izoliranost dvostruke čunjosječnice, kao i dvostrukog dodira plohe Φ^4_ψ u točki P. Ako stožac ili valjak Φ dira ravninu τ, dobit će nastala ploha Φ^4_ψ u točki P biplararnu točku, ali paraboličku, t. j. obje ravnine razpadnutog tangencialnog stožca u dvostrukoj točki P pale su skupa.

Uzmemo li plohu Ψ kao kuglu, a točku P u njenu središtu, tada dobijemo poznatu plohu Φ^4_{2i}, ali s dvie dvostruke točke.[7] U pramenu ravnina tih dviju točaka nalazi se jedan sistem kružnica te plohe, a po dvie u istoj ravnini sieku se u dvostrukim točkama. Ako je stožac Φ uzpravan i kružni, tada svaka njegova izvodnica sieče svaku njegovu kružnicu pod pravim kutem. Inverzijom na kuglu ne mienja se veličina kuta[8], dakle će na plohi Φ^4_{2i}, izvedenoj iz tog stožca, sjeći svaka njezina kružnica jednog sistema okomito svaku kružnicu drugog sistema.

Neka je ploha Φ uzpravan kružni valjak. Obje dvostruke točke kod ovakove plohe Φ^4_{2i} padaju skupa, a i oba sistema kružnih presjeka nalaze se u dva pramena ravnina. Ovakova ploha ima dvie izrazite kružnice. Te dvie kružnice su torzalne, jer duž njih njihova ravnina dira plohu. One također diele hiperboličke točke plohe Φ^4_{2i} od eliptičkih. Te dvie torzalne kružnice mogu biti i imaginarne. Os pramena ravnina, u kojima se nalaze kružnice, što prolaze točkom P, je pravac točke P paralelan s osi valjka Φ. Os pramena ravnina drugog sistema kružnica dobit ćemo ovako: Točkom P

[7] Izporedi: R. Sturm: Op. cit. t. 26 b, str. 268.
[8] G. Peschka: Op. cit. str. 234.

položimo okomitu ravninu na valjak Φ, a probodište osi tog valjka s tom ravninom označimo s o. Opišemo li oko ove točke O u toj ravnini kružnicu c, koja prolazi točkom P, tada je inverzijom dobiveni pravac c_ψ tražena os pramena. To sliedi odatle, što je pramen kugala kružnice c u prostoru X pridružen u prostoru X_ψ pramenu ravnina s traženom osi. Postanak ovakove plohe Φ^4_{2i} može usliediti i ovako: U prostoru je dana po volji kružnica k i neki pravac t, koji je okomit na ravnini ove kružnice. Pravac t probada ravninu k u točki T. Siečemo li ravninama pravca t kružnicu k u točkama K_1, K_2, a u tim ravninama povučemo dvie kružnice tako, da one prolaze točkom K_1, odnosno K_2, i diraju pravac t u točki T, tada sve takve kružnice čine našu osobitu plohu Φ^4_{2i}. Ako je centar inverzije P na osi valjka Φ, tada je ploha Φ^4_{2i} anuloid, kojemu se je grlena kružnica stegnula u točku. Svaka kružnica jednog sistema sieče opet okomito svaku kružnicu drugog sistema i obratno, a u posljednjem slučaju (kod anuloida) su im štoviše i ravnine okomite.

Kad bismo plohu Φ uzeli kao hiperbolički ili parabolički valjak, tada bi iz njih nastala ploha Φ^4_{2i} imala hiperboličku odnosno paraboličku biplanarnu točku.

8. Uzmemo li, da se je ploha Ψ razpala u par realnih ili imaginarnih ravnina, kao u toč. 11, dio II, tada nam svaka obična ploha Φ daje plohu Φ^4_ψ III. vrste. Ravnine razpadnute plohe Ψ označimo kao i prije s ξ_1, ξ_2, a njihovu presječnicu s p_ψ. Ravnina τ pridružena je u involuciji ravnina ξ_1, ξ_2 opet ravnini (Pp_ψ). Svaka ravnina dvostruke točke P sieče plohu Φ u čunjosječnici k, a ravnine ξ_1, ξ_2 u pravcima, koji se sieku u probodištu P_ψ pravca p_ψ s tom ravninom. Čunjosječnici k bit će u toj ravnini pridružena neka krivulja 4. reda, koja u točki P_ψ dira presječnicu ravnine τ i samu sebe (toč. 5, dio I). Odavle sliedi, da čitava ploha Φ^4_ψ dira duž pravca p_ψ ravninu τ i sama sebe, dakle je pravac p_ψ dvostruki torzalan pravac, a ravnina τ dvostruka torzalna ravnina takove plohe Φ^4_ψ. Pravac p_ψ može biti djelomice i podpuno izoliran. Taj je pravac za plohu Φ^4_ψ i dvostruk, a na njemu postoje uviek dvie realne ili imaginarne kruspidalne točke. Ove točke su probodišta pravca p_ψ s tangencialnim stožcem plohe Φ^4_ψ iz dvostruke točke P. U probodištima P^I i P^{II} pravca p_ψ s plohom Φ nalaze se opet višestruke točke plohe Φ^4_ψ. Jedno krilo plohe u tim točkama dira ravninu τ, dok drugo krilo umata dvostruku točku. Ove dvie višestruke točke mogu biti i imaginarne, a mogu pasti i skupa. Svaka ravnina prav-

ca p_ψ sieče plohu Φ^4_ψ u čunjosječnici, a sve te čunjosječnice prolaze točkama P^I, P^{II}. Tangente tih čunjosječnica u tim točkama su izvodnice tangencialnog stožca 3. reda plohe Φ^4_ψ, a zajednička izvodnice tih stožaca je pravac p_ψ.

Budući da su točke P^I, P^{II} dvostruke i obične točke na plohi Φ^4_ψ, dakle trostruke, to će svaka ravnina tih točaka sjeći plohu Φ^4_ψ u krivulji 4. reda, kojoj je ta točka trostruka. Pravcima $P\ P^I$ i $P\ P^{II}$ položene ravnine sjeći će plohu Φ^4_ψ u krivuljama 3. reda, koje će u točkama P^I, P^{II} imati dvostruku točku.

Ako je ploha Φ pravčasta, bit će ploha Φ^4_ψ konična, t. j. bit će na njoj ∞^1 čunjosječnica, koje prolaze dvostrukom točkom P, diraju duž pravca p_ψ ravninu τ, a ravnine im umataju stožac 2. reda. Po dvie čunjosječnice se opet nalaze u svakoj ravnini, jer su u njoj i po dvie izvodnice plohe Φ. Ako je ploha Φ^4_ψ konična, postoji na njoj i mogućnost maksimalnog broja realnih pravaca. Izvodnicama plohe Φ u točkama P^I i P^{II} pridružena su četiri pravca plohe Φ^4_ψ, koji opet prolaze tim točkama. Spojnice PP^I i PP^{II} su jednostruki ali četveroznačni pravci, jer su se u njih stegnula po dva pravca dvostruke točke prijašnjih ploha, koji su već bili dvoznačni. Pravci plohe u točkama P^I, P^{II}, koji su pridruženi izvodnicama plohe Φ, također su dvoznačni, dakle je udovoljeno Sturmovu stavku[9], t. j. naša ploha ima uz dvostruki pravac p_ψ daljnjih 16 pravaca.

Ako ovakova ploha Φ^4_ψ nije konična, mogu na njoj biti samo tri realna pravca, od kojih je jedan dvostruk i dvostruko torzalan.

Dvostruka točka P može biti hiperbolički ili eliptički biplanarna. Ovakova ploha Φ^4_ψ ne može se ubrojiti među plohe 4. reda s tri dvostruke točke, koje spominje R. Sturm[10], jer su sve tri spojnice tih točaka pravci plohe, a jedan što više i dvostruk.

9. Neka ploha Ψ ostane kao razpadnuti par realnih ili imaginarnih ravnina ξ_1, ξ_2, a plohu Φ uzmimo kao stožac ili valjak 2. reda. Pridružena ploha Φ^4_ψ imat će tri dosadanje dvostruke, odnosno trostruke točke P, P^I, P^{II} i još jednu četvrtu P^{III}, koja je pridružena vrhu stožca Φ, a koja će biti dvostruka točka ove plohe. Trostruke točke P^I i P^{II} iste su kao kod ploha u toč. 8, dok su dvostruke točke P, P^{III} jednake onima u toč. 7. Dvostrukim točkama P, P^{III} prolaze ovdje kao kod ploha Φ^4_φ II. vrste dvie realne

[9] R. Sturm: Op. cit. str. 263.
[10] R. Sturm: Op. cit. str. 269.

ili imaginarne torzalne ravnine s torzalnim čunjosječnicama, kojih su realne ili imaginarne kuspidalne točke na dvostrukom pravcu p_ψ, koji je i torzalan. Osim dvostrukog pravca $p_\psi \equiv P^I\, P^{II}$ mogu se na ovakvoj plohi Φ^4_ψ nalaziti realni pravci $P\, P^I$, $P\, P^{II}$ i još po jedan pravac u ravninama $P\, P^I\, P^{III}$, $P\, P^{II}\, P^{III}$, u kojima se nalazi i jedna čunjosječnica, koja prolazi ovim točkama. Zadnja dva pravca su spojnice $P^I\, P^{III}$, $P^{II}\, P^{III}$. Četiri moguća pravca ovakove plohe čine dakle vitoperi četverokut $(P\, P^I, P^I\, P^{III}, P^{III}\, P^{II}, P^{II}\, P)$, kojega diagonala $P^I\, P^{II} \equiv p_\psi$ je dvostruki pravac plohe Φ^4_ψ.

10. Uzmemo li sada, da ploha Ψ bude stožac ili valjak 2. reda, a ploha Φ po volji uzeta pravčasta ili nepravčasta ploha 2. reda, dobit će pridružena ploha Φ^4_ψ dva dvostruka pravca, koji će se sjeći u točki P^I, koja je vrh stōžca Ψ. Ova su dva dvostruka pravca razpadnuta čunjosječnica Π. U vrhu P^I dirati će ploha Φ^4_ψ sama sebe kao i ravninu dvostrukih pravaca. Ako je ploha Φ pravčasta, bit će ploha Φ^4_ψ konična, dakle će imati poznati sistem ravnina s po dvie čunjosječnice. Na ovakvim plohama Φ^4_ψ postoji mogućnost hiperboličke ili eliptičke biplanarne točke u točki P.

Ako oba dvostruka pravca probadaju realno plohu Φ, tada na plohi Φ^4_ψ postoji 12 realnih pravaca. Četiri i to dvoznačna, spajaju dvostruku točku P s probodištima dvostrukih pravaca s plohom Φ, a osam jednoznačnih pridruženo je izvodnicama plohe Φ u navedenim probodištima. I na ovakvoj plohi nalazimo prema tome najviše 16 realnih pravaca.

11. Neka je konačno i ploha Φ i ploha Ψ stožac ili valjak 2. reda. Dvostruka čunjosječnica Π razpada se i ovdje u dva dvostruka pravca, koji se sieku u dvostrukoj točki P^I plohe Φ^4_ψ. Ova je točka identična s vrhom stožca Ψ i jednaka onoj u toč. 10. Ovakve plohe Φ^4_ψ imaju još jednu dvostruku točku P^{II}, koja je pridružena vrhu stožca Φ. Tangencialne ravnine točke P na stožac Φ bit će torzalne ravnine plohe Φ^4_ψ, a dodirnim izvodnicama bit će na plohi Φ^4_ψ pridružene torzalne čunjosječnice. Dvostrukim točkama P, P^{II} plohe Φ^4_ψ mogu prolaziti najviše po 4 realna dvoznačna pravca. Svaki pravac točke P sieče jedan pravac točke P^{II}. Kuspidalne točke su četiri, i to ili sve četiri realne ili sve četiri imaginarne. To zavisi o tome, da li je par torzalnih ravnina kroz točku P realan ili imaginaran. Točka P na ovakovim plohama bit će parabolički biplanarna, ako ravnina τ dvostrukih pravaca dira stožac Φ.