RAD
HRVATSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
RAZREDA MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNOGA
KNJIGA 278 (86) 1945 GOD.

Poklon od pisca

Dr. VILIM NIČE

DOPRINOS ZAJEDNIČKIM SVOJSTVIMA RAVNIH KRIVULJA 3. I 4. REDA RODA NULTOGA

U ZAGREBU 1945
NARODNA TISKARA, KAPTOL 27

Doprinos zajedničkim svojstvima ravnih krivulja 3. i 4. reda roda nultoga

Napisao

Dr. V. Niče,

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Hrvatske akademije znanosti i umjetnosti 23. lipnja 1943.

Zadamo li kakovugod čunjosječnicu c i neku točku O, pa iz te točke povlačimo okomice na tangente ove čunjosječnice, tada će sva nožišta tih okomica ležati na nekoj bicirkularnoj krivulji k 4. reda ili cirkularnoj krivulji 3. reda (c-parabola),[1] koje u točki O imaju dvostruku točku.

Bicirkularne krivulje 4. reda mogu se uzeti kao anvelope kružnica, koje prolaze dvostrukom točkom, a središta su im na nekoj čunjosječnici s.[2] Za unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda vriedi to isto, samo je čunjosječnica s parabola.[3]

U ovoj ćemo radnji iztražiti međusobni odnos čunjosječnica c i s, a paralelnim i centralnim projiciranjem preniet ćemo naša razmatranja na sve krivulje roda nultoga 4. i 3. reda. Za njih ćemo naći dvie zajedničke definicije, kojih će međusobna povezanost omogućiti vrlo jednostavno rješavanje nekih konstruktivnih zadaća na takovim krivuljama.

Na gore spomenutoj nožištnoj krivulji k odaberimo jedno nožište N, a pripadno diralište na čunjosječnici c označimo s D. (Vidi sliku). Nanesemo li dužinu ON na isti pravac do točke M tako, da bude $ON = NM$, i to na svakoj zraci, koja ide točkom O, tada će sve točke M ležati na nekoj novoj bicirkularnoj, odnosno cirku-

---

[1] Dr. H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, str. 4. i 35.

[2] Michael W.: Die Konstruktion des singulären Punktes der bizirkularen Quartik und der durch ihn gehenden Tangentialkreise. Arch. Elektrotech. 30, 199.—206. (1936.).

[3] G. Loria: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, I. str. 36.

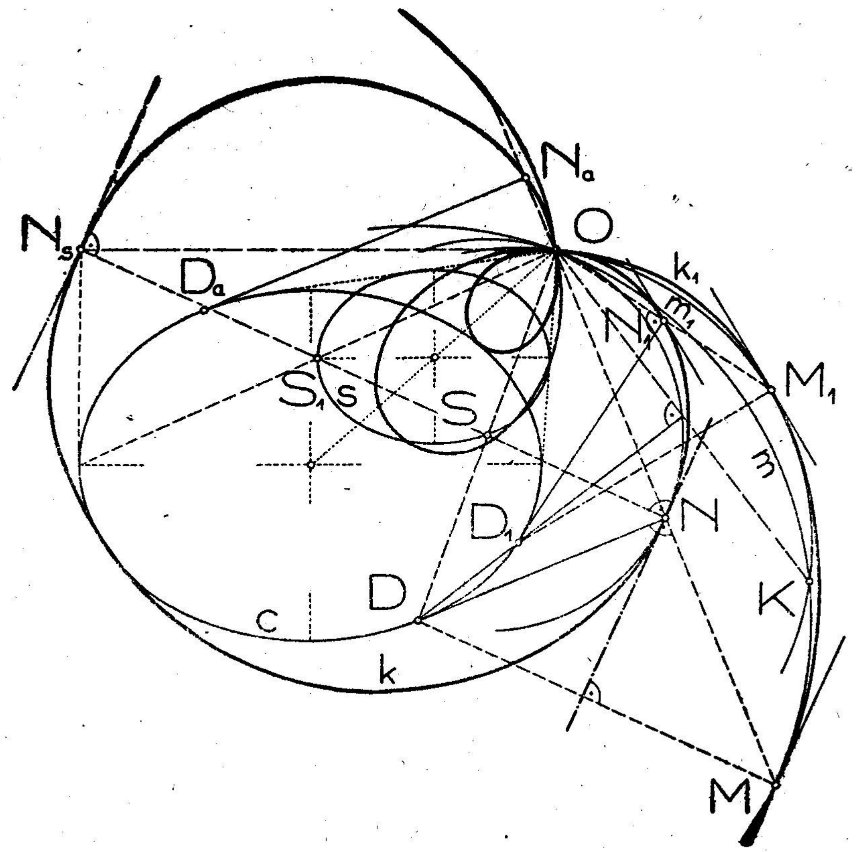
larnoj, krivulji k_1 istoga reda, s istom dvostrukom točkom i istim tangentama u ovoj te istim neizmjerno dalekim točkama. Tangente krivulja k i k_1 u točkama N i M bit će uzporedne, jer krivulje k i k_1 možemo smatrati ortogonalnim projekcijama paralelnih presjeka stožca 4. odnosno 3. reda.

Opišimo oko točke D s polumjerom DO kružnicu m. Zraku ON sieče ova kružnica u točki M, jer je $DN \perp ON$. Budući da je krivulja k_1 bicirkularna, to ju kružnica m može sjeći samo u 4 realne točke. Ona prolazi točkom O, dakle ostaju još samo dvie točke. Jedna ova točka je M, a mi ćemo pokazati, da se u njoj nalazi i druga točka, t. j. tangenta kružnice m u točki M bit će i tangenta krivulje k_1.

Odaberimo na čunjosječnici c novu točku D_1, a njoj pripadne točke na krivuljama k i k_1 neka su N_1 i M_1. Opišemo li kružnice m_i oko svake točke D_i čunjosječnice c, a kroz točku O, tada će sve te kružnice omatati neku krivulju (anvelopu), koju ćemo sada pobliže promotriti. Iztražit ćemo najprije, gdje se nalazi dirалište kružnice m s tom anvelopom, odnosno u kojoj točki sieče ovu kružnicu m njoj neizmjerno bliza kružnica.

Oko točke D_1 a kroz točku O opisanu kružnicu označimo s m_1, a ona neka sieče kružnicu m u točki K. Spojnica DD_1 bit će simetrala zajedničke tetive OK kružnica m i m_1. Pustimo li sada, da središte D_1 putuje po čunjosječnici c u točku D, putovat će i tetiva OK u tetivu OM, odnosno točka K u točku M po kružnici m. Dođe li kružnica m_1 neizmjerno blizu kružnici m, odnosno dođe li središte D_1 bezkonačno blizu središtu D po čunjosječnici c, primit će u graničnom položaju pravac DD_1 smjer tangente DN. Tetiva OK prieći će u tetivu OM, odnosno točka će K prieći u točku M. Kružnica m sieče se dakle sa svojom neizmjerno blizom kružnicom u točki M, pa je ta točka na anvelopi svih kružnica m_i, a tangenta kružnice m u točki M je tangenta i ove anvelope. Točka M nalazi se međutim i na našoj krivulji k_1, a što vriedi za točku M, vriedi i za sve ostale točke krivulje k_1. Vidimo dakle, da je krivulja k_1 identična s anvelopom kružnica m_i, a prema tome kružnica m tangira krivulju k_1 u točki M. Tangenta krivulje k_1 u točki M okomita je prema tome na spojnici DM. Znademo, da je tangenta krivulje k u točki N uzporedna s tangentom krivulje k_1 u točki M, dakle je tangenta krivulje k u točki N okomita na spojnici DM, a time smo izveli vrlo jednostavnu konstrukciju tangente u nekoj točki nožištne krivulje.

Čunjosječnicu c i točku O uzeli smo posvema po volji kod naših razmatranja. Uzmemo li sada krivulje c i k_1 kao baze stožaca, kojima je zajednički vrh na okomici dignutoj u točki O na ravninu tih krivulja, pa te stožce presiečemo paralelno s ravninom baza u polovici visine u krivuljama s i k i okomito projiciramo na ravninu baza, tada na temelju dosadanjih zaključaka sliedi za krivulje k i s sliedeći stavak:



Nožištne krivulje svake čunjosječnice c s obzirom na svaki pol O jesu anvelope kružnica, koje prolaze polom O, a središta su im na čunjosječnici s, koju čine polovišta spojnica točke O s točkama čunjosječnice c.

Tangencialna kružnica krivulje k u točki N ima središte u polovištu S spojnice OD.

Bicirkularne krivulje 4. reda možemo uzeti i kao anvelope kružnica, koje neku kružnicu sieku okomito, a središta im se nalaze na nekoj čunjosječnici.[4] Reducira li se ona kružnica, koju sve kružnice sieku okomito na točku, tada dobivamo našu gore spomenutu definiciju nožištnih krivulja čunjosječnice.

Postavimo li točku O u fokus čunjosječnice c, prieći će krivulja k u kružnicu nad velikom osi čunjosječnice c kao promjerom, a krivulja k_1 u kružnicu svih suprotišta fokusa O. Obrnemo li u ovom slučaju našu definiciju nožištnih krivulja, dobit ćemo sliedeću poznatu definiciju čunjosječnice c: Čunjosječnica c jest geometrijsko mjesto središta kružnica, koje prolaze točkom O, a tangiraju kružnicu k_1.[5]

Pustimo li, da se točka N putujući po krivulji k neograničeno približava dvostrukoj točki O, tada će središte S putovati po čunjosječnici s prema diralištu tangente čunjosječnice s, povučene točkom O. Padne li točka N u točku O, imat će pripadna kružnica s krivuljom k u točki O tri točke zajedničke, dakle će ju oskulirati. Sliedi dakle:

S r e d i š t a o s k u l a c i o n i h k r u ž n i c a u d v o s t r u k o j t o č k i O n o ž i š t n e k r i v u l j e č u n j o s j e č n i c e c n a l a z e s e u p o l o v i š t i m a d u ž i n a o m e đ e n i h t o č k o m O i d i r a l i š t i m a t a n g e n a t a č u n j o s j e č n i c e c, k o j e p r o l a z e t o m t o č k o m.

Uzmemo li, da je čunjosječnica c parabola, tada je nožištna krivulja k unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda. Sva naša dosadanja razmatranja vriede prema tome i za ovakove krivulje 3. reda, samo je u tom slučaju i krivulja s prabola. Osi parabola s i c su uzporedne, dakle obje okomite na asimptotu nožištne krivulje. Smjer osi parabole daje nam njenu neizmjerno daleku točku, a smjer asimptote krivulje k daje njenu neizmjerno daleku realnu točku, koja je nožište neizmjerno daleke tangente parabole c. Ta su dva smjera okomita, dakle konjugirana, s obzirom na absolutne točke krivulje na neizmjerno dalekom pravcu.

Bacimo li pogled na našu sliku, vidjet ćemo, da su isto tako konjugirani smjerovi, s obzirom na absolutne točke, tangenta krivulje k u točki N i spojnica SN, te spojnice ON i DN. Smjeru ON konjugiran je smjer i tangenti $D_a N_a$, jer je $D_a N_a \parallel DN$. Produ-

[4] G. Loria: Op. cit. str. 119.

[5] Müller — Kruppa: Lehrbuch der darstellenden Geometrie, (1936.), str. 105.—107.

žimo li spojnicu NS preko točke S_1 sve do točke N_1 na krivulji k, bit će tangenta krivulje k u ovoj točki uzporedna s tangentom u točki N, jer je njen smjer konjugiran smjeru $N_1S_1 = NS$, opet s obzirom na absolutne točke.

Svaku eliptičnu krivulju 3. reda roda nultoga možemo smatrati kosom projekcijom neke cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga a prema tome sliedi, da svaku eliptičnu krivulju 3. reda roda nultoga možemo smatrati anvelopom homotetičnih elipsa, koje prolaze njenim imaginarnim neizmjerno dalekim točkama i njenom dvostrukom točkom, a središta im se nalaze na nekoj paraboli. Smjer osi ove parabole konjugiran je smjeru asimptote krivulje, s obzirom na neizmjerno daleke točke krivulje.

Budući da je posvema svejedno u projektivnoj geometriji, radimo li s parom imaginarnih ili realnih točaka, to možemo ovaj zaključak proširiti i na sve ostale unikurzalne krivulje 3. reda. Mjesto homotetičnih elipsa spominjali bismo tada homotetične čunjosječnice.

Prenesemo li perspektivnim preslikavanjem neizmjerno daleki pravac, sa sve tri točke krivulje, koje na njemu leže, u konačnost, možemo za unikurzalne krivulje 3. reda izreći i ovaj stavak:

Odaberemo li po volji dvie točke O_1, O_2 na unikurzalnoj krivulji k 3. reda, pa tim točkama i dvostrukom točkom konstruiramo čunjosječnice, koje tu krivulju k tangiraju, tada polovi spojnice zadanog para točaka s obzirom na sve takove čunjosječnice leže na nekoj novoj čunjosječnici s, koja spojnicu zadanih točaka dira u konjugiranoj točki njena trećeg sjecišta, s obzirom na prve dvie zadane točke.

Prenesavši perspektivnim preslikavanjem neizmjerno daleki pravac u konačnost zajedno s obje realne ili imaginarne točke možemo za unikurzalne krivulje 3. reda izreći ovu definiciju:

Zadamo li točku O i čunjosječnicu c s jednom njenom tangentom t, a na ovoj dvie realne ili imaginarne točke njihovom hiperboličnom ili eliptičnom involucijom, tada sjecišta tangenata čunjosječnice c s onim zrakama točke O, koje s pripadnom tangentom sieku involuciju tangente t u paru konjugiranih točaka, daju unikurzalnu krivulju 3. reda.

Vratimo se našoj slici, na kojoj je prikazana bicirkularna krivulja k kao nožištna krivulja čunjosječnice c s obzirom na pol O. Projiciramo li ovu sliku paralelno na neku ravninu, dobit ćemo krivulju 4. reda roda nultoga s dvie imaginarne neizmjerno daleke dvostruke točke. Projiciramo li tu sliku perspektivno, dobit ćemo opet krivulju 4. reda roda nultoga, ali je neizmjerno daleki pravac zajedno s parom imaginarnih dvostrukih točaka došao u konačnost. Centralne projekcije tangenata krivulje k u točkama N i N_s sa spojnicom NS, kao i spojnice ND i $N_a D_a$ sa spojnicom NO, prolazit će parovima konjugiranih točaka eliptične involucije para imaginarnih dvostrukih točaka na pravcu prenesenom u konačnost. Ovime smo zapravo dobili poznatu konstrukciju krivulja 4. reda roda nultoga s dvie imaginarne dvostruke točke.[6]

Uzmemo li mjesto para imaginarnih dvostrukih točaka par realnih dvostrukih točaka (hiperbolična involucija), konstrukcija ostaje posvema ista, samo krivulja dobiva tri realne dvostruke točke mjesto jedne. Na temelju naših prijašnjih razmatranja mogli bismo ovoj konstrukciji dodati sliedeću definiciju ovakovih krivulja:

Zadamo li neku točku O, čunjosječnicu s i pravac p s dvie realne ili imaginarne točke O_1, O_2, tada spojnice t_1, t_2 točaka S čunjosječnice s s točkama O_1, O_2, uzevši ih kao tangente, a točke O_1, O_2 kao dirališta, odredjuju s točkom O čunjosječnice, koje omataju krivulju 4. reda roda nul'toga s dvostrukim točkama O, O_1, O_2.

Uzporedimo li sva naša razmatranja kod unikurzalnih krivulja 3. reda s onima kod krivulja 4. reda roda nultoga, tada možemo za obje ove vrste izreći sliedeće zajedničke definicije:

1. Zadamo li točku O, čunjosječnicu c i pravac p s dvie realne ili imaginarne točke O_1, O_2, koje su dvostruke točke hiperbolične ili eliptične involucije, a iz neke točke P pravca $O_1 O_2$ vučemo tangente na čunjosječnicu c, tada sjecišta ovih tangenata sa spojnicom točke O i točke P, konjugirane točki P u ovoj involuciji, leže na krivulji 4. ili 3. reda roda nultoga; ovo posljednje, ako pravac p dira čunjosječnicu c.

[6] W. Binder: Theorie der unicursalen Plancurven vierter bis dritter Ordnung in synthetischer Behandlung. Str. 214.

2. Zadamo li točku O, čunjosječnicu s i par realnih ili imaginarnih točaka O_1 i O_2, pa pojedine točke čunjosječnice s spajamo pravcima t_1, t_2 s točkama O_1 i O_2, tada čunjosječnice određene točkama O, O_1, O_2 i tangentama t_1 i t_2 omataju krivulju 4. ili 3. reda roda nultoga; ovo posljednje, ako spojnica točaka O_1, O_2 dira čunjosječnicu s.

Ako su krivulje dobivene pod 1. i 2., dakle i točke O, O_1, O_2, identične, tada su čunjosječnice c i s u perspektivnom položaju. Točka O je centar, a pravac $p = O_1 O_2$ os perspektiviteta tako, da pripadna sjecišta D, S, P svake zrake točke O s čunjosječnicama c i s i pravcem p stoje u harmoničkom dvoomjeru $(DOSP) = -1$.

Budući da se tangente čunjosječnica c i s u pridruženim točkama D i S sieku na pravcu p, to na temelju dosadanjih razmatranja možemo vrlo jednostavno odrediti točke krivulje pod 2., kao i tangente pod 1. i 2., ako je zadana samo čunjosječnica c ili samo čunjosječnica s. U početku izvedena konstrukcija tangente nožištne krivulje u točki N je posve specialan slučaj ovakove posveobćene konstrukcije.