Prof. dr. Vilim Niče:

KONSTRUKCIJA ČETVEROSTRUKOG FOKUSA CIRKULARNIH KRIVULJA 3. I NEKIH 4. REDA, RODA NULTOGA

Imamo li u ravnini po volji uzetu kružnicu c sa središtem P i neki pravac k, pa svaku točku ovog pravca spojimo s točkom P i na toj spojnici odredimo ovim točkama konjugirane točke obzirom na kružnicu c, tada sve te konjugirane točke leže na nekoj kružnici k_c. Mi kažemo, da je kružnica k_c inverzna slika pravca k obzirom na kružnicu c. Proširimo li ovu našu inverziju tako, da mjesto kružnice c uzmemo bilo kakvu čunjosječnicu, a točku P odaberemo po volji, tada dobivamo istovrstnu kvadratnu transformaciju kao što je inverzija, a mi ćemo je nazvati posveobćena kvadratna inverzija.[1]) Dirališta tangenata, povučenih iz točke P na čunjosječnicu c, označimo s P_1, P_2. Svakom pravcu k bit će pridružena u ovoj transformaciji neka čunjosječnica k_c, koja će prolaziti točkama P, P_1 i P_2, a čunjosječnicu c će sjeći u istim točkama kao i pravac k, jer sve točke čunjosječnice c ostaju u ovoj transformaciji invarijantne. Ako je k krivulja 2. reda, tada će k_c biti krivulja 4. reda, kojoj će točke P, P_1 i P_2 biti dvostruke, a ona će opet prolaziti sjecištima krivulja c i k. Ako je krivulja k 2. reda i prolazi točkom P, tada se krivulja k_c razpada u krivulju k_c 3. reda, opet roda nultoga, jer je točka P dvostruka, i polaru $p = P_1 P_2$ pola P obzirom na čunjosječnicu c, jer su sve njene točke pridružene točki P. Točke P_1, P_2 su dvostruke točke cjelokupne krivulje k_c, a prema tome jednostruke za samu krivulju k_c koja je 3. reda.

Uzmimo sada da su krivulje k, c kružnice. Nastala krivulja k_c prolazi sjecištima kružnica k, c, dakle će biti cirkularna. Potražit ćemo u ovoj radnji konstruktivni postupak, kako bismo došli do četverostrukog fokusa cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga, jer sve ovakve krivulje možemo dobiti pomoću posveobćene kvadratne inverzije, obzirom na neku kružnicu c i dvostruku točku te krivulje, iz neke kružnice k. Četverostruki fokus kod cirkularnih krivulja 4. reda roda nultoga potražit ćemo konstruktivno samo kod onih, koje mogu nastati u našoj spomenutoj kvadratnoj transformaciji.

---

[1]) R. Sturm: Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften, Bd. IV. str. 64.

Kada bismo imali zadanu kružnicu c, točku P i cirkularnu krivulju k_c recimo 3. reda, roda nultoga, koja je nastala iz neke kružnice k, a koju sada uzmimo kao krivulju k^0, tada bi ovoj krivulji k morala biti pridružena neka krivulja k_c^0 6. reda. Budući da krivulja $k_c = k^0$ dva puta prolazi točkom P i jedanput točkama P_1, P_2, to se krivulja k_c^0 razpada u dvostruki pravac $p = P_1 P_2$, jednostruke pravce PP_1, PP_2 (svaka točka ovih dvaju pravaca pridružena je točki P_1 odnosno P_2) i kružnicu $k = k_c^0$. Ako bi cirkularna krivulja $k_c = k^0$ bila 4. reda s dvostrukim točkama P, P_1, P_2, tada bi se pridružena krivulja $k_c{}^0$ ovoj razpala u dvostruke pravce $p = P_1 P_2$, PP_1 i PP_2 i čunjosječnicu $k_c{}^0 = k$, koja mora prolaziti absolutnim točkama (dakle kružnica), jer ovima prolaze krivulje c i k_c.

Budući da je čunjosječnica c kružnica, mora biti $PP_1 = PP_2$. Imamo li pred sobom neku cirkularnu krivulju k 3. reda roda nultoga, tada možemo uzeti za svaku takvu krivulju, da je nastala posveobćenom kvadratnom inverzijom iz neke kružnice k. Treba na toj krivulji samo odabrati dvie jednako udaljene točke P_1, P_2 od njene dvostruke točke P, i tim točkama povući kružnicu c, koja će pravce PP_1, PP_2 dirati u točkama P_1, P_2. Uzmemo li sada krivulju $k_c = k^0$ i potražimo njoj pridruženu krivulju $k_c^0 = k$ obzirom na kružnicu c i točku P, tada se krivulja k_c^0 razpada u pravce PP_1, PP_2, dvostruki pravac $p = P_1 P_2$ i neku čunjosječnicu k, koja prolazi sjecištima krivulja c, k_c, dakle i absolutnim točkama ravnine, t. j. ona je kružnica. Vidimo dakle, da su kružnica k i krivulja k_c pridružene u posveobćenoj kvadratnoj inverziji kružnice c i točke P.

Kod cirkularnih krivulja k_c 4. reda roda nultoga vriedi ovo isto samo za one, gdje je $PP_1 = PP_2$, ako su P, P_1 P_2 njene dvostruke točke. Točke P_1 P_2 mogu biti i imaginarne.

Postavimo li i sada kružnicu c kao gore, tada će u posveobćenoj kvadratnoj inverziji ove kružnice i točke P biti krivulji k_c pridružena neka krivulja 8. reda, koja se razpada u tri dvostruka pravca $p = P_1 P_2$, PP_1, PP_2 i neku čunjosječnicu k, koja prolazi absolutnim točkama ravnine, jer njima prolaze krivulje c, k_c. U posveobćenoj kvadratnoj inverziji kružnice c i točke P međusobno su pridružene prema tome kružnica k i krivulja k_c.

Neka su zadane kružnice c, k, koje se osim u absolutnim točkama sieku i u realnom paru točaka M, N. Točka P neka je također uzeta po volji, a može biti na, izvan ili unutar kružnica c ili k. Posveobćena kvadratna inverzija obzirom na kružnicu c i točku P dati će nam kružnica k, kao što znademo, neku cirkularnu krivulju k_c 3. ili 4. reda roda nultoga.

Povucimo točkom P po volji neku zraku u blizini točke M i spojimo sjecišta C_1, C_2, K, K_c ove zrake s krivuljama c, k i k_c s ovom točkom. Iz definicije posveobćene kvadratne inverzije sliedi, da je $(C_1\, C_2\, K\, K_c) = -1$. Uzmemo li, da je $MC_1 = a_1$, $MC_2 = a_2$, $MK = a_3$ i $MK_c = a_4$, tada vriedi i ovaj harmonijski dvoomjer $(a_1\, a_2\, a_3\, a_4) = -1$. Vrtimo li mi sada neprekinuto ovu zraku oko točke P sve do točke M, tada će sekante a_2, a_3 i a_4 prieći u ovoj točki u tangente krivulje c, k i k_c, a spojnica a_1 prieći će u samu zraku, t. j. u spojnicu PM. Ako je krivulja k_c 4. reda, tada na krivuljama k, k_c odaberimo one točke K, K_c, koje vrtnjom zrake oko točke P dolaze u točku M. Vrtnjom ove zrake oko točke P spomenuti harmonijski dvoomjer $(C_1\, C_2\, K\, K_c) = -1$ se ne mienja, a odavle direktno sliedi, da spojnica $MP = b_1$ i tangente b_2, b_3 i b_4 krivulja c, k i k_c u točki M čine harmonijski dvoomjer $(b_1, b_2, b_3, b_4) = -1$.

Posvema analogno vriedi i za tangente b_2^0, b_3^0, b_4^0 krivulja c, k i k_c u točki N i njenu spojnicu b_1^0 s točkom P. Označimo sjecišta zraka $b_1\, b_1^0$, $b_2\, b_2^0$ i $b_3\, b_3^0$ s S_1 $(= b_1 \times b_1^0) = P$, S_2 $(= b_2 \times b_2^0)$ i S_3 $(= b_3 \times b_3^0$, a tim točkama i točkama M, N određenu čunjosječnicu označimo s f. Iz harmonijskih dvoomjera $(b_1, b_2, b_3, b_4) = -1$ i $(b_1^0, b_2^0, b_3^0, b_4^0) = -1$ direktno sliedi, da i sjecište $S_4 = b_4 \times b_4^0$ mora ležati na čunjosječnici f, jer spojimo li četiri harmonijske točke na nekoj čunjosječnici s bilo kojom točkom te čunjosječnice, dobivamo četiri harmonijske zrake.[2])

Mjesto realnog para točaka M, N uzmimo sada par absolutnih točaka ravnine, u kojima se također sieku kružnice c i k. Točka $P = S_1$ ostaje ista, dok će točkama S_2, S_3 odgovarati središta O_1, O_2 kružnica c, k, jer su ova središta sjecišta imaginarnog para tangenata ovih kružnica, koje ih diraju u absolutnim točkama.[3]) Točki S_4 odgovarat će ovdje četverostruki fokus F krivlje k_c, jer se u toj točki sieče imaginaran par tangenata krivulje k_c u absolutnim točkama. Postavimo li sada absolutnim točkama ravnine i točkama P, O_1 i O_2 čunjosječnicu

---

[2]) Th. Reye: Die Geometrie der Lage, Abt. I. str. 72.

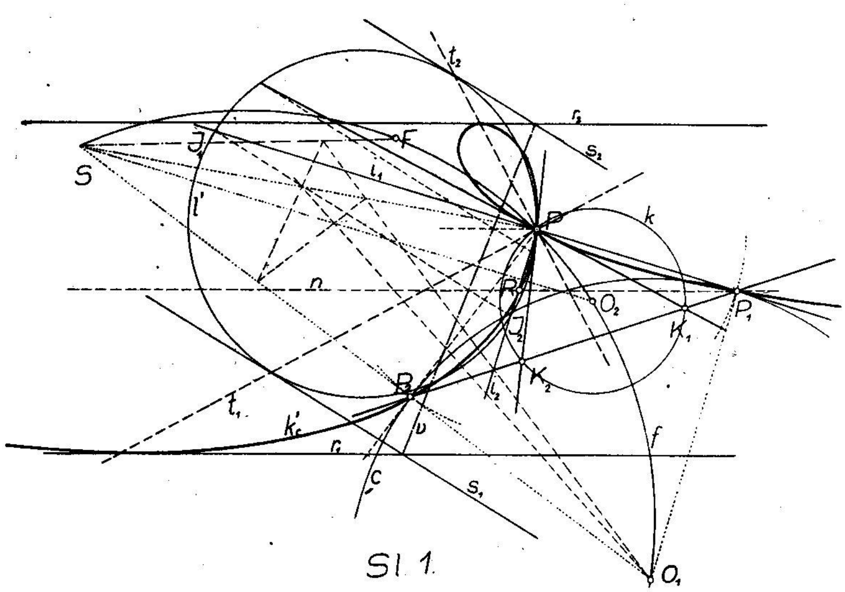
[3]) Müller-Kruppa: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. I. str. 34.

f, dakle kružnicu točaka P, O_1 i O_2, i pomoću harmoniiskog dvoomjera $(P, O_1 O_2 F) = -1$ odredimo na toj kružnici točku F, tada je ova točka četverostruki fokus krivulje k_c.

Ovo vrijedi bez obzira, da li je cirkularna krivulja k_c 3. ili 4. reda roda nultoga, odnosno sasma je svejedno, da li kružnica k prolazi ili ne prolazi točkom P.

Ako su kružnice c, k namještene tako, da im se središta O_1, O_2 i točka P nalaze na jednom pravcu, t. j. kružnica f prelazi u pravac, onda je dobivena cirkularna krivulja k_c simetrična obzirom na taj pravac. Pomoću harmonijskog dvoomjera $(P, O_1 O_2 F) = -1$ lako se može konstruktivno odrediti četverostruki fokus F krivulje k_c.

1. Naše dosadanje izvode primienit ćemo na nekoliko konkretnih primjera. Neku cirkularnu krivulju 3. reda roda nultoga uzet ćemo kao presječnu krivulju Plückerovog konoida, projiciranu okomito na jednu direkcionu ravninu. Ravnina crtnje neka je jedna torzalna ravnina ovog konoida. Točka P neka je okomita projekcija dvostrukog pravca, a kružnica l' okomita projekcija neke elipse l na ravninu crtnje. Sl. 1. Pravci s_1, s_2



Sl. 1.

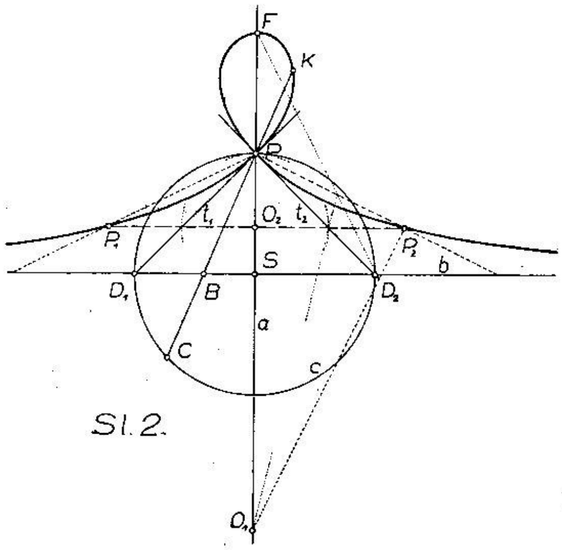
neka su tragovi ravnine elipse l u torzalnim ravninama, a spojnice dirališta tih tragova na kružnici l s točkom P bit će torzalni pravci t_1, t_2 tog konoida. Uzporedni pravci r_1, r_2 neka su tragovi u torzalnim ravninama po volji uzete ravnine, kojom ćemo sjeći ovaj Plückerov konoid. Ravnina elipse l i ova ravnina sieku se u pravcu v. Neka po volji uzeta direkciona ravnina sieče ravninu $(r_1\, r_2)$ u pravcu n, a elipsu l u točkama I_1, I_2. Spojnice i_1, i_2 ovih točaka sa sjecištem dvostrukog pravca i te direkcione ravnine su izvodnice ovog konoida. Sjecišta ovih izvodnica R, P_1 s pravcem n leže na presječnoj krivulji k_c ovog Plückerovog konoida s ravninom $(r_1\, r_2)$. Projekcija k'_c ove krivulje na našoj ravnini crtnje je cirkularna krivulja. Analognim postupkom mogu konstruktivno odrediti sve ostale točke ove krivulje. Tangente krivulje k_c u točki P dobit ćemo istim postupkom, samo valja pravac n uzeti točkom P.

Na gotovoj krivulji k'_c odaberimo po volji točku P_1 i odredimo na toj krivulji još jednu točku P_2, koja je od točke P jednako udaljena. Kružnica c, postavljena točkama P_1, P_2 tako, da ju u tim točkama diraju pravci PP_1, PP_2, ima središte u točki O_1 $(O_1 P_1 \perp PP_1, O_1 P_2 \perp PP_2)$. Tangente krivulje k'_c u točki P sieku spojnicu $P_1\, P_2$ u točkama K_1, K_2, a ov m točkama i točkom P postavljena kružnica k ima središte u točki O_2. Postavimo li sada točkama O_1, O_2 i P kružnicu f, i na toj kružnici odredimo pomoću harmonijskog dvoomjera $(P\, O_1\, O_2\, F) = -1$ točku F, tada je ta točka četverostruki fokus cirkularne krivulje k_c. Konstruktivno se ta točka odredi tako, da se bilo koja točka kružnice f, recimo S, spoji s točkama O_1, O_2 i P, a četvrta harmonijska zraka SF sieče kružnicu f u traženoj točki F. Konstruktivna točnost za ovaj fokus je samo približna, jer smo na krivulji k'_c samo približno odredili točku P_2 tako, da bude $PP_1 = PP_2$.

2. Kod simetričnih cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga taj je konstruktivni postupak mnogo jednostavniji i matematski točan, jer se točke P_1, P_2 mogu uviek lako odrediti tako, da bude matematski točno $PP_1 = PP_2$. Uzmimo na pr. uzpravnu strofoidu.

Zadajmo si po volji kružnicu c i dva okomita pravca a, b kroz njeno središte S. Sl. 2. Pravac a neka sieče kružnicu c u točki P. Svaka zraka točke P sieče kružnicu c u točki C, a pravac b u točki B. Nanašamo li na svakoj ovoj zraci dužinu PC od točke B na istu stranu, tada će sve dobivene točke K $(PC = KB)$ ležati na krivulji, koja se zove uzpravna strofoida. Sjecišta D_1, D_2 kružnice c s pravcem b, spojena s točkom P, daju tangente t_1, t_2 ove krivulje u dvostrukoj točki P, pravac b bit će asimptota, a pravac a simetrala te krivulje. Uzmimo na toj krivulji bilo koji par simetričnih točaka P_1, P_2, spojimo te točke s točkom

P i odredimo središte O_1 kružnice, koja prolazi tim točkama i u njima dira spojnice PP_1, PP_2. Središte O_2 kružnice, koja prolazi točkom P i sjecištima spojnice $P_1 P_2$ s tangentama t_1, t_2, ležat će u sjecištu simetrale a sa spojnicom $P_1 P_2$, jer je $t_1 \perp t_2$. Kružnica točaka P, O_1, O_2 prelazi ovdje u simetralu a, a četverostruki fokus F ove krivulje određen je na toj simetrali opet harmonijskim dvoomjerom $(P\, O_1\, O_2\, F) = -1$. Pustimo sada par simetričnih točaka P_1, P_2 neka odu u bezkonačnost. Točka



Sl. 2.

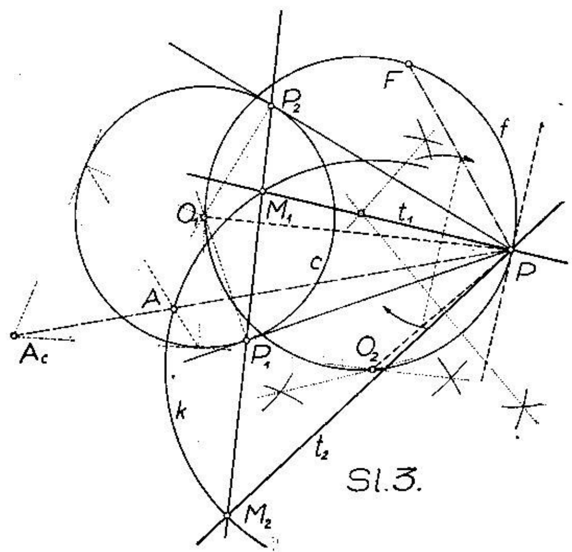
O_1 otiči će na simetrali a također u bezkonačnost, jer postaje središte kružnice, koja se pretvara u pravac, a točka O_2 past će upravo u središte S kružnice c, jer spojnica točaka P_1, P_2 prelazi u asimptotu b. Budući da je točka O_1 otišla u bezkonačnost, sliedi direktno iz harmonijskog dvoomjera $(P\, O_1\, O_2\, F) = -1$, da je $SP = PF$, t. j. fokus uzpravne strofoide nalazi se u tjemenu te krivulje, a to je poznata činjenica na ovakvoj krivulji[4].

3. Cirkularna krivulja 4. reda roda nultoga neka bude zadana dvostrukim točkama P, P_1, P_2 tako, da bude $PP_1 = PP_2$, tangentama t_1, t_2 te krivulje u točki P i još jednom točkom A_c. Sl. 3. Svaka krivulja 4. reda određena je s 14 elemenata, jer je krivulja n-toga reda određena s $\frac{n\,(n+3)}{2}$ točaka. Dvostruke točke P, P_1, P_2 daju devet elemenata, jer r-struka točka krivulje

[4] H. Wieleitner: Spezielle ebene Kurven, (Sammlug Schubert LVI) str. 35.—40.

određuje $\frac{r(r+1)}{2}$, elemenata. Tangente t_1, t_2, točka A_c i absolutne točke ravnine daju daljnjih pet elemenata.

Točkama P_1, P_2 postavimo kružnicu c, koja u tim točkama dira spojnice PP_1, PP_2, a točku A_c spojimo s točkom P i njoj odredimo na toj spojnici konjugiranu točku A obzirom na kružnicu c. Sjecištima M_1, M_2 tangenata t_1, t_2 sa spojnicom $P_1 P_2$,

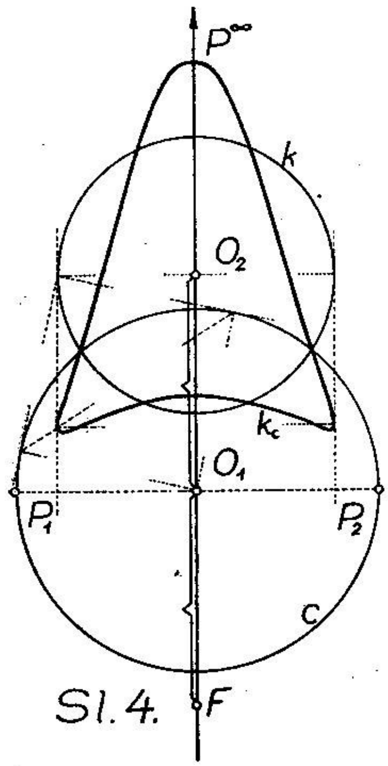


Sl.3.

te točkom A postavimo kružnicu k. Vidimo prema napried izvedenim razmatranjima, da je kružnica k u posveobćenoj kvadratnoj inverziji, obzirom na kružnicu c i točku P, pridružena zadanoj cirkularnoj krivulji 4. reda roda nultoga. Postavimo li prema tome točkom P i središtima O_1, O_2 kružnica c, k kružnicu f i na njoj pomoću harmonijskog dvoomjera $(P\, O_1\, O_2\, F) = -1$ konstruiranmo točku F, tada je ta točka F četverostruki fokus zadane krivulje. Odredivši kružnice c, k, otvoren nam je i konstruktivni postupak za nadopunjivanje zadane krivulje s povoljnim brojem točaka.

4. Uzet ćemo još i ovaj primjer. Točke O_1, O_2 neka su središta kružnica c, k, a bezkonačno daleko na spojnici $O_1\, O_2$ neka se nalazi točka $P = P^{\infty}$. Pomoću posveobćene kvadratne inverzije obzirom na kružnicu c i bezkonačno daleku točku P^{∞}, bit će iz kružnice k nastala krivulja k_c cirkularna 4. reda, kojoj su točke P^{∞}, P_1 P_2 dvostruke. Mienjamo li polumjere

kružnica c, k, a središta im O_1, O_2 i bezkonačno daleku točku P^∞ ostavljamo na miru, dobit ćemo ∞^2 raznih simetričnih cirkularnih krivulja 4. reda, kojima dvostruke točke P^∞, P_1, P_2 mogu biti, ili ne biti, izolirane. Sve ove (∞^2) cirkularne krivulje



Sl. 4.

4. reda roda nultoga imaju zajednički četverostruki fokus F, koji se radi harmonijskog dvoomjera $(P\ O_1\ O_2\ F) = -1$ i bezkonačno daleke točke P^∞ nalazi na simetrali ovih krivulja udaljen od središta O_1 isto toliko kao i središte O_2, samo na suprotnu stranu, t. j. $FO_1 = O_1O_2$, a ne kao što to tvrdi dr. Heinrich Wieleitner, da se četverostruki fokus nalazi u polovici dužine $O_1\ O_2$, t. j. $O_1\ F = F\ O_2$[5].

[5] H. Wieleitner: Op. cit. str. 80.

ZUSAMMENFASSUNG:

Konstruktion des vierfachen Brennpunktes zirkulärer Kurven 3. Ordnung und einiger 4. Ordnung vom Geschlecht Null

Verallgemeinert man die gewöhnliche Inversion an einem Kreis c so, dass der Mittelpunkt P der Inversion aus dem Mittelpunkt des Kreises c in irgendeinen Punkt der Ebene verlegt wird, so bekommt man eine zur nversion analoge quadratische Transformation, bei der wieder jedem Kegelschnitt eine Kurve 3. oder 4. Ordnung vom Geschlecht Null zugeordnet sein wird, je nachdem, ob der Kegelschnitt durch den Mittelpunkt dieser verallgemeinerten quadratischen Inversion geht oder nicht.

In unserer Arbeit nahmen wir zwei Kreise c und k und einen Punk P irgendwo in der Ebene als gegeben an. In der verallgemeinerten quadratischen Inversion bezüglich des Punktes P und des Kreises c wird dem Kreise k eine zirkuläre Kurve 4. oder 3. Ordnung vom Geschlecht Nul zugeordnet sein, weil alle reellen und imaginären gemeinsamen Punkte der Kreise c, k bei einer solchen Transformation invariant bleiben d. h. sich auf der Kurve k_c befinden. Die Kreise c, k mögen sich im reellen Punktepaar M, N schneiden. Verbinden wir den Punkt M mit dem Punkt P (a_1) und legen wir in diesem Punkt M die Tangenten a_2, a_3 und a_4 an die Kurven c, k und k_c, so wird für diese Geraden das harmonische Doppelverhältnis $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4) = -1$ gelten, was aus der Definition det verallgemeinerten quadratischen Inversion folgt. Dasselbe Doppelverhältnis bilden solche Geraden b_1, b_2, b_3 und b_4 im Punkte N. Die Strahlen a_1, b_1 schneiden sich im Punkte P, und die Strahlenpaare a_2, b_2, a_3 b_3 und a_4 b_4 mögen sich in den Punkten S_2, S_3, S_4 schneiden. Legen wir durch die Punkte M, N, P, S_2 und S_3 den Kegelschnitt f, so liegt auf diesem Kegelschnitt auch der Punkt S_4 wegen der harmonischen Doppelverhältnisse $(a_1\ a_2\ a_3\ a_4) = -1$ und $(b_1\ b_2\ b_3\ b_4) = -1$, durch die ja dieser Punkt bestimmt ist.

Statt des reellen Punktepaares M, N nehmem wir nun das imaginäre Paar der absoluten Punkte der Ebene, in denen sich die Kreise c, k ebenfalls schneiden, und durch die auch die Kurve k_c geht. Der Punkt P bleibt derselbe, den Punkten S_2, S_3 werden die Mittelpunkte O_1, O_2 der Kreise c, k entsprechen, und dem Punkt S_4 entspricht der vierfache Brennpunkt der zirkulären Kurve k_c. Der Kegelschnitt, der durch die absoluten Punkte der Ebene, den Punkt P und die Mittelpunkte O_1, O_2 gelegt ist, ist ein Kreis. Auf diesem Kreise befindet sich also auch der vierfache Brennpunkt F der Kurve k_c und ist durch das harmonische Doppelverhältnis $(PO_1\ O_2F) = -1$ bestimmt.

Das Konstruktionsverfahren zur Bestimmung eines solchen vierfachen Brennpunktes ist in dieser Arbeit an vier konkreten Beispielen durchgeführt. Beim ersten Beispiel wird der vierfache Brennpunkt der Projektion eines ebenen Schnittes des Plückerschen Konoides konstruiert, wobei dieser Schnitt in der Richtung der Doppelgeraden auf die Direktionsebene projiziert ist. Diese Projektion ist eine zirkuläre Kurve, da sie die absoluten Punkte der Ebene enthält, durch die auch das Paar unendlich ferner Minimalerzeugenden dieses Konoides geht.

Beim zweiten Beispiel wird der vierfache Brennpunkt der aufrechten Strophoide konstruiert. Auf Grund der Betrachtungen in unserer Arbeit wird auf rein projektivem Wege die bekannte Tatsache bestätigt, dass sich der vierfache Brennpunkt dieser Kurve in ihrem einfachen Schnittpunkt mit ihrer Achse, d. h. in ihrem Scheitel befindet.

Beim dritten Beispiel sind die Doppelpunkte P, P_1, P_2 einer zirkulären Kurve 4. Ordnung gegeben, so zwar, dass $PP_1 = PP_2$ ist. Ferner sind die Tagenten t_1, t_2 dieser Kurve im Doppelpunkt P und ein Punkt A_c der Kurve gegeben, so dass die Kurve vollkommen bestimmt ist. Auf Grund der Betrachtungen unserer Arbeit sind die Kreise c, k derart konstruiert, dass die gegebene zirkuläre Kurve in der verallgemeinerten quadratischen Inversion bezüglich des Kreises c und des Punktes P dem Kreis k zugeordnet ist. Durch den Punkt P und die Mittelpunkte O_1, O_2 dieser Kreise wird der Kreis f gelegt, und auf ihm der vierfache Brennpunk F der gegebenen zirkulären Kurve 4. Ordnung vom Geschlecht Null mit Hilfe des bekannten harmonischen Doppelverhältnisses $(PO_1O_2F) = -1$ bestimmt.

Beim vierten Beispiel sind die Kreise c, k mit ihren Mittelpunkten O_1, O_2 gegeben, und der Punkt P ist unendlich fern auf der Verbindungsgeraden O_1O_2 angenommen. Die dem Kreis k zugeordnete zirkuläre Kurve 4. Ordnung wird zwei im Endlichen gelegene Doppelpunkte (P_1, P_2) und einem unendlich fernen Doppelpunkt P^∞ haben. Verändern wir die Halbmesser der Kreise c, k beliebig, während die Punkte O_1, O_2 und P^∞ ungeändert bleiben, so bekommen wir ∞^2 solcher besonderer zirkulärer Kurven 4. Ordnung vom Geschlecht Null, die eigentlich verallgemeinerte Kappa-Kurven sind. Aus den Betrachtungen unserer Arbeit, d. h. wegen $(PO_1O_2F) = -1$ folgt offenbar, dass diese Kurven einen gemeinsamen vierfachen Brennpunkt haben, der vom Punkt O_1 ebensoweit entfernt ist, wie der Punkt O_2, nur in der entgegengesetzten Richtung, d. h. $FO_1 = O_1O_2$. Er befindet sich also nicht etwa im Hälftungspunkt der Strecke O_1O_2, d. h. es ist nicht $O_1F = FO_2$, wie das offenbar versehentlich von Dr. Heinrich Wieleitner in seinem Buche „Spezielle ebene Kurven" S. 52 (Sammlung Schubert LVI, Leipzig 1908) behauptet wird.
