R A D
HRVATSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNOGA RAZREDA
KNJIGA 274 (85) 1942 GOD.

VILIM NIČE

PRILOG KONSTRUKTIVNOJ OBRADBI PRAVČASTIH PLOHA TREĆEGA REDA

U ZAGREBU 1942
NARODNA TISKARA, ZAGREB, KAPTOL 27

Prilog konstruktivnoj obradbi pravčastih ploha trećega reda

(Sa 5 crteža.)

Napisao

Vilim Niče

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda 10. travnja 1940.

Uvod. U ovoj radnji promatrat ćemo neka svojstva harmonijski pridruženih ploha pravčastim plohama 3. reda, koja se mogu zgodno primijeniti u konstruktivne svrhe ovih posljednjih. Na temelju onoga što se u literaturi spominje o takvim plohama,[1] mogle bi se izvoditi konstrukcije u glavnom samo na pravčastim plohama 3. reda sa realnim torzalnim pravcima, dok na onima sa imaginarnim torzalnim pravcima ne bi se to moglo analognim jednostavnim postupkom. Nepoznata svojstva takvih harmonijski pridruženih ploha izvest ćemo baš za pravčaste plohe 3. reda s imaginarnim torzalnim pravcima. Pri rješavanju konstruktivnih zadaća na pravčastim plohama 3. reda uz pomoć ovih svojstava, razlikuju se dosta postupci od dosad uobičajenih, zbog toga što u glavnom baziraju samo na konstrukciji harmonijskog dvoomjera. U našim razmatranjima prijeći ćemo i na Cayleyeve plohe, a riješit ćemo i neke konstruktivne zadaće.

1. Svezak tangencijalnih ravnina neke pravčaste plohe 3. reda, koje prolaze izvodnicom i, siječe tu plohu u čunjosječnicama. Polovi ove izvodnice i obzirom na te čunjosječnice leže na nekom pravcu k, koji siječe jednostruki pravac l i dvostruki pravac d plohe. Jednostruki pravac l križa se s pravcem k u onoj točci, koja je harmonički pridružena sjecištu izvodnice i na torzalnoj

---

[1] L. Cremona: Crelle Jour. 60 (1862) str. 316; Müller-Krames: Vorles. über darst. Geometrie Bd. III str. 187.

involuciji toga jednostrukog pravca. Ovom točkom prolazi izvodnica i_1, koja s izvodnicom i siječe dvostruki pravac d plohe u istoj točci L. Dvostruki pravac siječe pravac k u točci P, koja sa kuspidalnim točkama T_1 T_2 plohe i točkom L na dvostrukom pravcu d čini harmonijski dvoomjer $(T_1\,T_2\,LP) = -1$.

Svakoj izvodnici i plohe pridružen je na taj način neki pravac k, a svi ti pravci čine našoj plohi harmonički pridruženu plohu, koja je opet trećega reda.[2]

2. Kada su kuspidalne točke i torzalni pravci plohe realni, mogu se izvodnice takve harmonijski pridružene plohe zgodno upotrijebiti u konstruktivne svrhe. Pol V neke izvodnice i, obzirom na jednu čunjosječnicu c neke tangencijalne ravnine te izvodnice, može se jednostavno dobiti na taj način da potražimo transverzalu s ove izvodnice i torzalnih pravaca t_1, t_2 plohe, koja ide upravo ovom točkom V. Ova je transverzala s polara čunjosječnice c obzirom na sjecište izvodnice i sa jednostrukim pravcem l plohe kao polom. Ovo slijedi odatle, što torzalne ravnine diraju plohu duž torzalnih pravaca, a prolaze jednostrukim pravcem plohe. Evidentno je, da sve ovakve polare s neke izvodnice i čine hiperboloid (kod konoida hiperbolički paraboloid), kojemu su ta izvodnica i, njoj pridružena izvodnica k na harmonijski pridruženoj plohi i oba torzalna pravca u jednom sistemu njegovih izvodnica, a jednostruki pravac l i dvostruki pravac d plohe u drugom sistemu izvodnica. Ovakav hiperboloid (hiperbolički paraboloid) neke pravčaste plohe 3. reda prozvat ćemo *polarni hiperboloid*. Budući da se pravci i, k, l i d nalaze u polarnom kao i u oskulacionom hiperboloidu plohe duž izvodnice i, to slijedi da su ta četiri pravca presjek tih dvaju hiperboloida. Pravac k pripada na oskulacionom hiperboloidu u onaj sistem izvodnica, u kom se nalazi izvodnica i, jer se duž tog pravca sijeku glavne tangente dirališta duž izvodnice i s opisanim polarama pripadnih čunjosječnica ovim diralištima.

Uz pomoć izloženih razmatranja mogu se jednostavno riješiti neke konstruktivne zadaće, kao što će nam to pokazati slijedeći primjer:

Na zvodnici i pravčaste plohe 3. reda dano je diralište A, treba odrediti dirnu ravninu i glavnu tangentu plohe u toj točci.

---

[2] Müller-Krames: Vorles. über darst. Geometrie Bd. III str. 187.

Izvodnica i neka siječe jednostruki pravac l i dvostruki pravac d plohe u točkama B i C. Pomoću harmonijskog dvoomjera $(C\,A\,B\,S) = -1$ odredit ćemo točku S, u kojoj izvodnicu i siječe polara s, a koju polaru sada lako odredimo kao transverzalu torzalnih pravaca t_1, t_2. Neka ona siječe te pravce u točkama T_1 i T_2. Harmonijskim dvoomjerom $(T_1\,T_2\,S\,Z) = -1$ na polari s dobivamo točku $Z = s \times k$, koja spojena s diralištem A daje glavnu tangentu plohe u točci A. Tangencijalna ravnina u točci A određena je već polarom s i izvodnicom i.

Kao što smo riješili ovu zadaću, mogli bismo ovim postupkom riješiti i mnogo drugih konstruktivnih zadaća. Na pr. tražiti točke krivulje pravih kontura, rastavnicu svijetla i sjene, strikcione linije i t. d.

3. Postavimo sada slijedeće pitanje: Mogu li se ove konstruktivne zadaće rješavati na ovaj ili sličan način kod drugog tipa pravčastih ploha 3. reda, t. j. onih s imaginarnim torzalnim pravcima, kao i kod Cayleyevih ploha? Odgovorom na ovo pitanje zabavit ćemo se u nastavku ove radnje.

Važnu ulogu kod opisanih konstruktivnih operacija imadu izvodnice harmonički pridružene plohe i naprijed u t. 2 spomenuti polarni hiperboloid pojedinih izvodnica plohe. Prvo nam se prema tome nameće pitanje: Kako bi na drugom tipu pravčastih ploha 3. reda odredili nekoj izvodnici te plohe pridruženu izvodnicu na harmonijski pridruženoj plohi, a iza toga kako bi odredili poznatu polaru s nekog dirališta ove izvodnice? Kod prvog tipa ploha sijeku izvodnice i njima pridružene izvodnice na harmonijski pridruženoj plohi dvostruki pravac u hiperboličkom involutornom nizu točaka, kojemu su kuspidalne točke plohe dvostruke. Kod ovih ploha može se to vrlo jednostavno dokazati.[3] Izvesti ćemo sada dokaz, koji će nam to pitanje riješiti i na drugom tipu ploha, t. j. dokazat ćemo da je ta involucija na dvostrukom pravcu u svakom slučaju istovrsna s onom na jednostrukom pravcu plohe.

Označimo točke, u kojima izvodnice plohe i_n sijeku dvostruki pravac d sa L_n, a one, u kojima taj pravac sijeku njima pridružene izvodnice k_n na harmonijski pridruženoj plohi sa P_n. Položimo dvostrukim pravcem d po volji ravninu. Projiciramo li našu plohu u smjeru svake njene izvodnice i_n na tu ravninu,

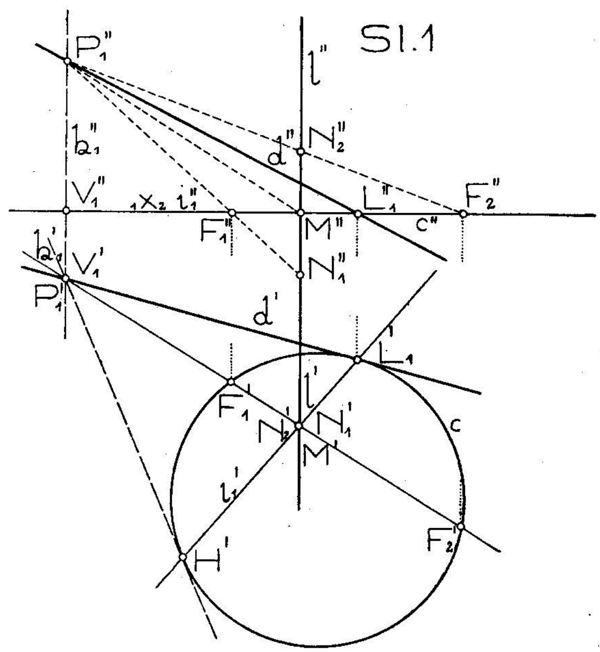
[3] Müller-Krames: Vorles. über darst. Geometrie Bd. III str. 187.

dobit ćemo na toj ravnini čunjosječnice c_n prividnih kontura, koje dvostruki pravac sijeku u iste dvije realne ili imaginarne točke[4] (kuspidalne točke). Svaka izvodnica i_n projicirat će se u neku točku L_n na pravcu d, a pridruženi pravac k_n projicira se kao polara pola L_n obzirom na konturnu čunjosječnicu c_n izvodnice i_n. Taj pravac k_n siječe dvostruki pravac d u točci P_n. Da je pravac k_n polara pola L_n obzirom na čunjosječnicu c_n slijedi iz definicije harmonički pridruženih ploha. Svakoj točci L_n na pravcu d pridružena je dakle na tom pravcu po jedna točka P_n, a jer se točke P_n nalaze na polarama k_n polova L_n, to su po dvije takve pridružene točke konjugirani polovi pripadne konturne čunjosječnice c_n. Sve konturne čunjosječnice c_n sijeku pravac d u iste dvije realne ili imaginarne točke, dakle možemo nizove točaka L_n i P_n na pravcu d uzeti kao involuciju konjugiranih polova pravca d obzirom na bilo koju čunjosječnicu c_n prividnih kontura. Vrsta ove involucije ovisi o kuspidalnim točkama, koje su joj dvostruke točke, dakle je ta involucija na plohama prvog tipa hiperbolička, a na plohama drugoga tipa eliptička, t. j. uvijek jednaka onoj na jednostrukom pravcu l plohe.

4. Vidjeli smo da izvodnice neke pravčaste plohe 3. reda i njima pridružene izvodnice na harmonijski pridruženoj plohi sijeku dvostruki pravac u involutornom nizu. Kod ploha prvog tipa taj je involutoran niz određen kuspidalnim točkama. Kod ploha drugoga tipa morat ćemo potražiti dva para pridruženih točaka, da ta (eliptička) involucija bude određena. Jedan par konjugiranih točaka te involucije lako se može odrediti iz onih elemenata, kojima je zadana ploha, dok se drugi par konjugiranih točaka javlja kao specijalna osebina ploha drugoga tipa. *Drugi par konjugiranih točaka na dvostrukom pravcu d daju nam one točke P_1 i P_2, koje su pridružene centralnoj i beskonačno dalekoj točci (točka P_1) i simetričkim točkama (točka P_2) involucije na jednostrukom pravcu l plohe.* Dokaz za to (ovaj par P_1 P_2 konjugiranih točaka) izvest ćemo indirektnim putem. Pokazat ćemo naime, da izvodnice harmonijski pridružene plohe, pridružene izvodnicama plohe koje prolaze centralnom (M) i neizmjerno dalekom točkom involucije na jednostrukom pravcu, sijeku dvostruki pravac u onoj točci, kojom prolaze izvodnice plohe simetričnih točaka te iste involucije.

[4] Müller-Krames: Vorles. über darst. Geomet. Bd. III str. 74 i 189.

Uzmimo da je neka pravčasta ploha 3. reda zadana tlocrtom i nacrtom jednostrukog i dvostrukog pravca l i d te čunjosječnicom c u ravnini Π_1, a pravac l neka je okomit na Π_1. Projekcija d' dvostrukog pravca d neka dira čunjosječnicu $c = c'$ u njihovoj zajedničkoj točci $L_1 = L'_1$ (slika 1). Na toj plohi odaberimo onu izvodnicu i_1, koja prolazi centralnom točkom M involucije na jednostrukom pravcu l. Budući da pravac d' dira čunjosječnicu $c' = c$, to se ta točka M nalazi u probodištu ravnine čunjosječnice c sa jednostrukim pravcem l, a izvodnica i_1 u ravnini čunjosječnice c. Ta iz-

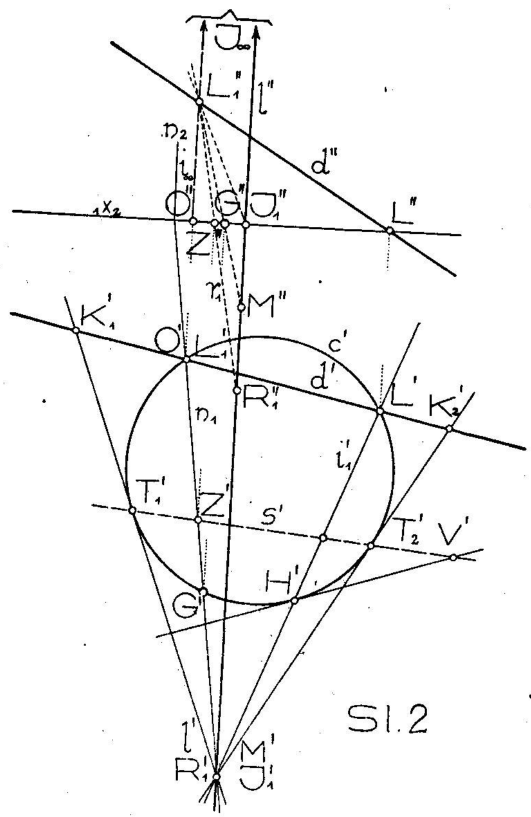


vodnica siječe čunjosječnicu c u diralištu H i točci $L_1 = c \times d \times i_1$. Tangente čunjosječnice c u točkama H i L_1 sijeku se u točci V_1, a tom točkom i beskonačno dalekom točkom jednostrukog pravca l prolazi izvodnica k_1 harmonički pridružene plohe, pridružena izvodnici i_1. Ovaj pravac k_1 siječe dvostruki pravac d u točci P_1. Izvodnice plohe koje prolaze tom točkom P_1 sijeku čunjosječnicu c u točkama F_1 i F_2, a jednostruki pravac u točkama N_1 i N_2. Jer su točke V_1 i M konjugirani polovi čunjosječnice c slijedi harmonijski dvoomjer $(V_1 M F_1 F_2) = -1$. Spojimo li ove četiri točke sa točkom P_1, tada te četiri harmonijske zrake sijeku jednostruki pravac l u točkama N_1, N_2, M i beskonačno dalekoj točci, jer je $k_1 = P_1 V_1 \,||\, l$. Na temelju ovog posljednjega slijedi da je

$N_1M = MN_2$, a time je dokazano da su točke N_1 i N_2 simetrične točke involucije na jednostrukom pravcu l.

Da vrijedi i obrnuto, t. j. da se izvodnicama P_1F_1 i P_1F_2 pridružene izvodnice k na harmonijski pridruženoj plohi nalaze u ravnini $i_1 l$, slijedi već iz involucije nizova L_n i P_n na dvostrukom pravcu. O tome se možemo uvjeriti i konstruktivnim putem tako, da u tlocrtu naše slike potražimo pol D izvodnice P_1F_1 ili P_1F_2, obzirom na čunjosječnicu u tangencijalnoj ravnini točaka F_1 ili F_2, pomoću Pascalova pravca.

Nakon što smo odredili involuciju nizova L_n i P_n na dvostrukom pravcu d, lako nam je svakoj izvodnici i konstruktivno odrediti pridruženu izvodnicu k na harmonijski pridruženoj plohi. Preostaje nam još pitanje, možemo li za neko dirалište na izvodnici i konstruirati poznatu polaru s (t. 2). Onu točku na izvodnici i u kojoj bi ju sjekla ta polara s znali bismo odrediti pomoću harmonijskog dvoomjera, ali da odredimo onu točku u kojoj ta polara siječe pridruženi pravac k trebali bi barem još jedan realan torzalan pravac, jer bi polara s bila transverzala tog torzalnog pravca sa izvodnicama i, k, koja bi prolazila čvrstom točkom na izvodnici i. Mjesto ovog realnog torzalnog pravca kojega nema, uzeti ćemo jedan drugi pravac, a do njega ćemo doći vrlo jednostavnim postupkom.



Sl. 2

5. Zadajmo neku pračastu plohu 3. reda posvema analogno kao u slici 1, samo neka je ploha tipa prvoga, a projekcija d' ne mora dirati čunjosječnicu $c' = c$. Točka L_1 na dvostrukom

pravcu d neka je opet ona točka, kojom prolaze izvodnice centralne točke M i beskonačno daleke točke I_∞ involucije na jednostrukom pravcu. Tom točkom i jednostrukim pravcem l položimo ravninu $\Sigma(n_1, n_2) \perp \Pi_1$ (slika 2). Polarni hiperboloidi (t. 2) svih izvodnica plohe sijeku tu ravninu Σ u pramenu pravaca, čiji je centar na dvostrukom pravcu. Zrake r_n tog pramena λ u ravnini Σ mogu se vrlo jednostavno odrediti.

Označimo sa r_1 onu zraku u pramenu λ koja je pridružena nekoj izvodnici i_1. Drugim riječima, polarni hiperboloid izvodnice i_1 siječe ravninu Σ u pravcu r_1. Ovaj pravac neka siječe jednostruki pravac l plohe u točki R_1, dok ga izvodnica i_1 siječe u točci I_1. Pokazat ćemo sada, da na pravcu l vrijedi:

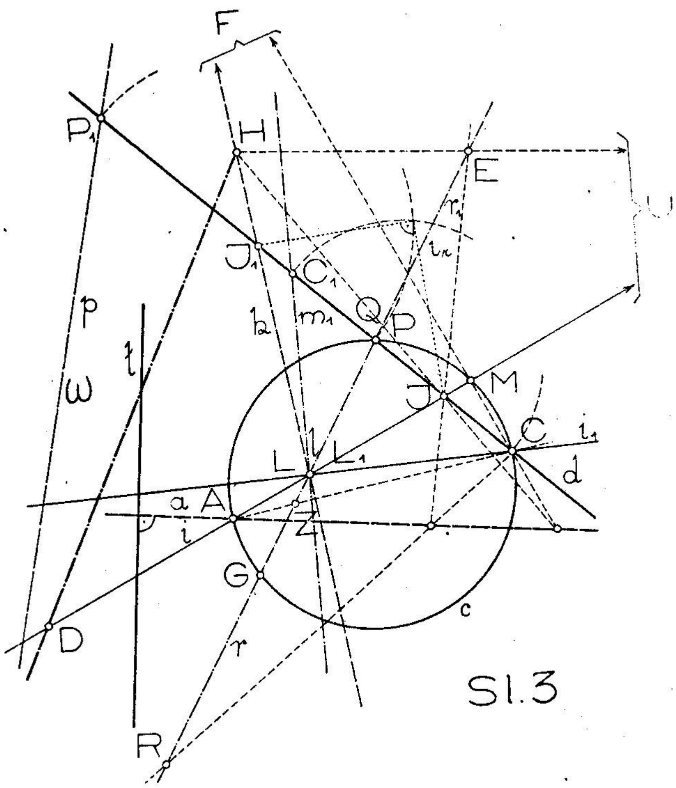
$$I_1 M = M R_1$$

Ravnina Σ siječe ravnalicu c plohe u točkama O i G. Izvodnicu i_1 uzmimo onu u ravnini čunjosječnice c. Polara s točke I_1 obzirom na čunjosječnicu c, a pridružena diralištu H, probada ravninu Σ u točci Z, za koju vrijedi harmonijski dvoomjer $(OGZI_1) = -1$. Spojnica točaka L_1 i Z daje zraku r_1 pramena λ. Spojnice točaka O, G, Z i I_1 sa točkom L_1 sijeku pravac l u točkama I_∞, M, R_1 i I_1, za koje vrijedi opet harmonijski dvoomjer $(I_1 R_1 M I_\infty) = -1$. Jer je $i_\infty (L_1 I_\infty) \parallel l$, nalazi se točka I_∞ u beskonačnosti, pa izlazi da je $I_1 M = MR_1$. Iz samih izvoda vidi se da je posvema svejedno, da li ih vršimo na plohama tipa prvoga ili drugoga.

Svakoj izvodnici možemo dakle vrlo jednostavno naći pridružen pravac r u ravnini Σ, koji nam može zamijeniti jedan realan torzalan pravac, jer svaku polaru s možemo odrediti kao transverzalu pravaca r i k te izvodnice i, kad na njoj znademo pripadno diralište. Otkrivši pravce k i r primijenit ćemo ih sada kod rješavanja jedne konstruktivne zadaće.

6. Zadajmo neku pravčaktu plohu 3. reda analogno kao do sada jednostrukim pravcem (l), dvostrukim pravcem (d) i čunjosječnicom ravnalicom c. Citavu konstrukciju izvest ćemo u jednoj normalnoj projekciji, a jednostruki pravac l neka je okomit na ravnini projekcija. Ploha neka pripada drugom tipu. U takvom slučaju znademo, da jednostruki pravac l probada svaku čunjosječnicu plohe na unutarnjoj strani. Ravnina ravnalice c neka je usporedna sa ravninom projekcija.

Odaberimo neku izvodnicu i koja čunjosječnicu c siječe u točci A, a dvostruki pravac d u točci I (slika 3). Toj izvodnici potražit ćemo najprije pridružene pravce k i r. Spojnica točaka $P = i_\infty \times \times d (i_\infty \| l)$ i $L = i \times l$ probada ravninu čunjosječnice c u točci Z. Označimo li probodište izvodnice i_∞ sa ravninom čunjosječnice c sa Q, tada nam harmonijski dvoomjer $(QGZR) = -1$ daje točku R, u kojoj nam traženi pravac r probada ravninu čunjosječnice c. Točkama R i P određen je traženi pravac r.



Sl. 3

Involucija na dvostrukom pravcu bit će određena s točkama $C = c \times d$ i P i njima pridruženim točkama C_1 i P_1. Treba odrediti točke C_1 i P_1. Točku C_1 dobit ćemo kao probodište dvostrukog pravca d sa ravninom jednostrukog pravca l i pola izvodnice i_1 u ravnini čunjosječnice c obzirom na tu čunjosječnicu. Tamo gdje je ravnina $\Omega (\perp \Pi_1)$ dana polarom p pola $L_1 = i_1 \times l$ obzirom na čunjosječnicu c, a paralelna sa jednostrukim pravcem l, siječe pravac d, nalazi se točka P_1, kojom prolaze izvodnice simetričnih točaka involucije na jednostrukom pravcu l. Parovima točka C, C_1 i P, P_1 određena je involucija na dvostrukom pravcu, pa znademo poznatim postupkom u toj involuciji odrediti točci I pridruženu točku I_1, kojom prolazi traženi pravac k. Taj pravac probada ravninu čunjosječnice c u točci F, koja leži na pravcu $C\,M$ te ravnine. Ona izvodnica plohe, koja se s izvodnicom i križa na dvostrukom pravcu, siječe čunjosječnicu c u točci M. Točkama I_1 i F određen je pravac k.

Neka je pravcem t dana neka okomita ravnina na ravninu crtnje. Na izvodnici i neka se odredi točka D one krivulje prave konture, koja nastaje okomitom projekcijom naše plohe na tu ravninu. Diralište tangencijalne ravnine izvodnice i okomite na ravninu t dati će nam traženu točku D. Trag a te tangencijalne ravnine, u ravnini čunjosječnice c, okomit je na pravac t ($a \perp t$), a pravce r i k siječe ta ravnina u točkama E i H. Spojnica tih točaka siječe izvodnicu i u točci U, koja nam uz pomoć harmonijskog dvoomjera $(U\,L\,I\,D) = -1$ daje traženo diralište D. Spojnica točaka H i D je glavna tangenta plohe u točci D.

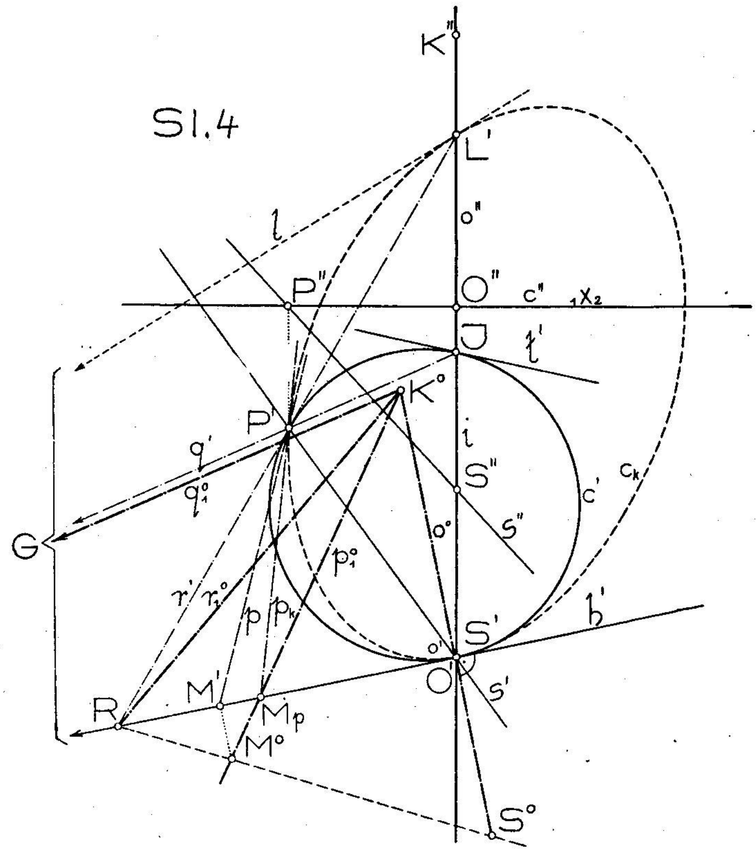
7. *Cayleyeve plohe.* Naša razmatranja proširit ćemo i na ovu vrstu pravčastih ploha 3. reda, jer one posjeduju također neka zanimiva svojstva, koja se mogu zgodno primijeniti u konstruktivne svrhe.

Zadajmo neku Cayleyevu plohu u ortogonalnoj projekciji dvostrukim pravcem o, ravnalicom c i s tri para pridruženih točaka (slika 4). Pravac o neka bude okomit na tlocrtnu ravninu ($o \perp \Pi_1$), čunjosječnica c neka je u tlocrtnoj ravnini Π_1, a u njenoj ravnini je izvodnica $i \perp \Pi_2$. Točci $O = c \times o$ na čunjosječnici c neka je na pravcu o pridružena točka K, koja će biti kuspidalna točka plohe.[5] Točci O na pravcu o pridružena je točka $I = i \times c$ na čunjosječnici c, jer se u ravnini te čunjosječnice nalazi izvodnica i. Konačno nekoj točci P na čunjosječnici c neka pripada neka točka S na pravcu o. Spojnica s tih dviju točaka je izvodnica plohe. Ostale izvodnice plohe znademo naći pomoću nadopunjivanja projektivnih nizova na o i c. Torzalna ravnina projicira se na tlocrtnu ravninu kao tangenta h' čunjosječnice c' u točci O'. U toj točci tangiraju projekcije svih čunjosječnica plohe pravac h', jer sve čunjosječnice plohe diraju njenu torzalnu ravninu na pravcu o. Tangencijalna ravnina plohe u točci P siječe plohu u čunjosječnici c_1, čija tangenta p u točci P daje glavnu tangentu plohe

---

[5] E. Weyr: Geom. der räum. Erz. ein-zweideut. Geb. insb. der Regelfl. dritter Ordnung str. 111.

u toj točci. Točkom P te izvodnicom i položena ravnina siječe plohu u čunjosječnici c, a tangira ju u točci I. Spojnicu točaka P, I označimo sa q, a tangentu čunjosječnice c u točki P sa r. Pridružimo li svakoj točci izvodnice s takve pravce r, p i q, tada svaka vrsta takvih pravaca probada torzalnu ravninu opet duž jednog pravca, a te pravce označimo sa r_1, p_1 i q_1. Ovi pravci pro-



laze kuspidalnom točkom K, a sa dvostrukim pravcem o čine harmonijski dvoomjer $(r_1\, o\, p_1\, q_1) = -1$. Ispravnost ovih naših tvrdnja dokazat ćemo sada.

Dvostruki pravac o naše plohe spada u onaj sistem izvodnice oskulacionog hiperboloida neke izvodnice te plohe, u kom se nalaze glavne tangente plohe duž te izvodnice. Torzalna ravnina plohe siječe prema tome oskulacioni hiperboloid izvodnice s osim pravca o u još jednoj izvodnici drugog sistema. Naš pravac p_1 u torzalnoj ravnini jest ta izvodnica drugog sistema.

Sjetimo se na ovom mjestu naših ranijih razmatranja. Znademo da se sve glavne tangente i njima pridružene polare (t. 2) neke izvodnice i_1 na općoj plohi 3. reda sijeku duž izvodnice k_1 na harmonijski pridruženoj plohi. Jednostruki pravac l površine siječe pravac k_1, u točki $I_2 = i_2 \times l$, a dvostruki pravac d plohe u točki P, koja sa kuspidalnim točkama $K_1 K_2$ i točkom $L = i_1 \times i_2 \times d$ daje harmonijski dvoomjer $(K_1 K_2 L P) = -1$. Za naše svrhe moramo još naglasiti, da ravnina $i_2 d$ siječe oskulacioni hiperboloid izvodnice i_1 duž pravca k_1. Kod Cayleyeve plohe padaju jednostruki i dvostruki pravac skupa, a i obje kuspidalne točke K_1, K_2 stežu se u jednu realnu kuspidalnu točku K.[6] Involucija jednostrukog pravca postaje ovdje parabolička s dvostrukom točkom K, a isto takva postaje i involucija točaka L_n i P_n dvostrukog pravca. Svakoj točci dvostrukog pravca o pridružena je dakle uvijek točka K, a svakoj tangencijalnoj ravnini dvostrukog pravca o pridružena je torzalna ravnina. Slijedi prema tome da svi poznati pravci k moraju prolaziti kuspidalnom točkom K, i da se moraju nalaziti u torzalnoj ravnini. H a r m o n i j s k i p r i d r u ž e n a p l o h a C a y l e y e v o j p l o h i s t e ž e s e d a k l e u p r a m e n p r a v a c a u t o r z a l n o j r a v n i n i, s v r h o m u k u s p i d a l n o j t o č c i. Naš pravac p_1 zraka je tog pramena, dakle prolazi kuspidalnom točkom K.

Pravci r i q neke izvodnice čine također hiperboloide. Pravce r možemo uzeti kao presječnice pridruženih ravnina dvaju projektivnih pramenova, čiji su nosioci izvodnice i, s. Niz točaka P_n na izvodnici s projektivan je sa sveskom njenih tangencijalnih ravnina, a točke P_n s izvodnicom i daju drugi svezak ravnina, koji je perspektivan s nizom točaka P_n. Ovaj drugi svezak projektivan je dakle sa sveskom tangencijalnih ravnina izvodnice s.

Sve pravce q možemo pak uzeti kao spojnice pridruženih točaka projektivnih nizova P_n i I_n na pravcima s i i. Niz I_n projektivan je sa sveskom svojih tangencijalnih ravnina, a niz P_n je s njima perspektivan, dakle su i ta dva niza međusobno projektivna. Da dvostruki pravac o pripada kao izvodnica u oba ova hiperboloida, vidi se iz njihove definicije. Torzalna ravnina siječe dakle svaki onaj hiperboloid u još jednoj izvodnici, koje smo izvodnice prozvali r_1 i q_1.

[6] E. Weyr: Geom. der räum. Erz. ein-zweideut. Geb. insbes. der Regelfl. dritter Ordnung str. 112.

Pokažimo još da te izvodnice prolaze kuspidalnom točkom K. Svakom točkom P na izvodnici s prolaze njoj pridruženi pravci r i p. Točke, u kojima ti pravci probadaju torzalnu ravninu, označimo sa R i M. Na taj način pridružili smo nizu točaka P_n izvodnice s nizove R_n i M_n na pravcima r_1 i p_1. Odaberimo u nizu P_n onu točku P_0 u kojoj izvodnica s siječe dvostruki pravac o. Toj točci pridruženi pravci r^0 i p^0 padnu u dvostruki pravac o, a prema tome se moraju poklapati na tom pravcu i pripadne točke R_0 i M_0. Za točku M_0 znademo da u tom slučaju pada u kuspidalnu točku K, dakle se u toj točci nalazi i točka R_0. Odavle slijedi da pravac r_1 prolazi kuspidalnom točkom K plohe.

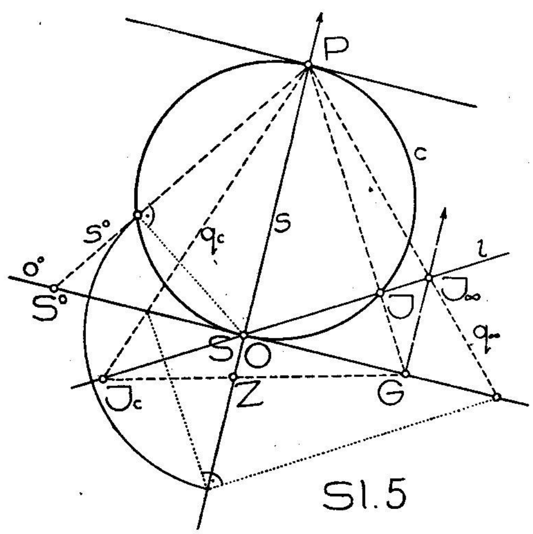
Posvema analogno dokazat ćemo to i za pravac q_1. Svakom pravcu q_n pridružimo glavnu tangentu t_n u točci $I_n = q_n \times c_n \times i$. Znademo, da sve glavne tangente t_n probadaju torzalnu ravninu duž nekog pravca, koji prolazi kuspidalnom točkom, dok ju pravci q_n probadaju duž pravca q_1. Uzmemo li opet točku P_0 izvodnice s na dvostrukom pravcu o, tada će i pripadna točka I_0 izvodnice i pasti u dvostruki pravac o, a prema tome i pridruženi pravci q_0 i t_0 padaju u taj pravac. Slijedi dakle, da se moraju poklapati i probodišta tih pravaca s torzalnom ravninom, t. j. da pravac q_1 prolazi kuspidalnom točkom K.

Pokazali smo da pravci r_1, p_1 *i* q_1 prolaze kuspidalnom točkom, a sada ćemo još dokazati, da oni čine s dvostrukim pravcem o harmonijski dvoomjer $(r_1\, o\, p_1\, q_1) = -1$.

Tangencijalna ravnina plohe u točci P siječe našu plohu u čunjosječnici c_1, koju centralno projicirajmo iz kuspidalne točke K zajedno sa čitavom plohom u ravninu čunjosječnice c. Centralnu projekciju čunjosječnice c_1 označimo sa c_k. Točka P sa pravcima r, q i s' ostaje na miru, jer se nalaze u ravnini čunjosječnice c. Pravac p projicira se u pravac p_k koji ide probodištem M_r pravca p_1 s ravninom čunjosječnice c. Tangencijalna ravnina plohe u točci P siječe izvodnicu i u točci L. Presječnica tangencijalnih ravnina u točkama L i P je tangenta one čunjosječnice u točci L, koja se nalazi u tangencijalnoj ravnini točke P. Ta presječnica mora prolaziti probodištem N izvodnice s s tangencijalnom ravninom u točci L. Točke N i L pridružene su na isti način kao i točke P i I na pravcu q, dakle spojnica tih točaka mora sjeći pravac q_1. Centralna projekcija l te spojnice bit će tangenta čunjosječnice c_k u točci L, a mora prolaziti točkom G, koja je probodište pravca q_1 sa ravninom čunjosječnice c. Pravci b' i p_k tangiraju čunjosječnicu c_k u točkama O' i P'. Točka G nalazi se na pravcu b', pa odavle slijedi, da su pravci i, q dvije konjugirane zrake čunjosječnice c_k. Dalje iz toga slijedi, da pravci r, p_k, s' i q čine harmonijski dvoomjer $(r\, s'\, p_k\, q) = -1$, a na temelju ovoga slijedi i ovaj:

$$(r_1\, o\, p_1\, q_1) = -1 .$$

8. Pomoću gornjih izvoda riješit ćemo ovu konstruktivnu zadaću: Na zadanoj izvodnici s Cayleyeve plohe treba odrediti točku strikcione linije.



Sl. 5

Neka je ploha zadana samo tlocrtnom projekcijom analogno kao u slici 4, samo neka je točci $O = o \times c \times i$ pridružena kuspidalna točka u beskonačnosti (slika 5). Poznati pravci r_1, p_1 i q_1 bit će u ovom slučaju paralelni s dvostrukim pravcem o. Izvodnica s siječe pravac o u točci S, koja je od točke O udaljena za po volji zadanu dužinu d. Neizmjerno dalekoj točci P_∞ izvodnice s pridružena je točka I_∞ izvodnice i, a spojnica te točke sa točkom $P = s \times c$ daje trag q_∞ asimptotske ravnine izvodnice s u ravnini čunjosječnice c. Centralna ravnina te izvodnice okomita je na asimptotsku, a njen trag q_c siječe izvodnicu i u točci I_c. Toj točci pridružena točka Z na izvodnici s je centralna točka te izvodnice.

Sličnim postupkom mogli bismo riješiti sve važnije zadaće na Cayleyevim plohama, a da je taj konstruktivni postupak vrlo jednostavan, pokazuje nam gornji primjer.

7.

Beitrag zur konstruktiven Behandlung der Regelflächen dritter Ordnung.

Auszug aus »Rad«, Bd. 274, S. 286.

Von Vilim Niče.

Mittels der den Regelflächen 3. Ordnung harmonisch zugeordneten Regelflächen wird auf jenen eine leichte Lösung der konstruktiven Aufgaben ermöglicht, weil die Lösung fast nur von harmonischem Doppelverhältnis abhängig ist. Mit bisher bekannten Mitteln kann aber eine derartige konstruktive Behandlung nur auf den Regelflächen 3. Ordnung mit reellen Kuspidalpunkten durchgeführt werden. In dieser Arbeit werden die Regelflächen 3. Ordnung mit imaginären Kuspidalpunkten und die Cayleyschen Flächen auf die eben genannte Weise betrachtet. Auf diesen werden einige bisher nicht bemerkte Eigenschaften entwickelt, die die konstruktive Behandlung in den meisten Fällen sehr vereinfachen.

Zuerst werden die Regelflächen mit reellen Kuspidalpunkten betrachtet. Die Regelfläche 3. Ordnung wird von den Ebenen des Ebenenbüschels einer ihrer Erzeugenden tangiert und in Kegelschnitten geschnitten. Der Schnittpunkt dieser Erzeugenden mit der einfachen Leitgeraden der Fläche soll der gemeinsame Pol aller Schnittkegelschnitte ihres Ebenenbüschels sein. Die zugeordneten Polaren dieses gemeinsamen Poles bilden ein Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid, das in dieser Arbeit als *Polarhyperboloid* bezeichnet wird. Die Erzeugenden dieser Fläche sind für die konstruktive Behandlung der Regelflächen 3. Ordnung sehr nützlich verwendbar. Es wird auch eine konstruktive Aufgabe gelöst.

Die angeführten Betrachtungen werden auf die Regelflächen 3. Ordnung mit imaginären Kuspidalpunkten übertragen. Es wird bewiesen, dass die Schnittpunktinvolution der Erzeugenden der Regelfläche und der harmonisch zugeordneten Regelfläche, auf der gemeinsamen Doppelgeraden gleichartig mit der Involution der einfachen Leitgeraden der Regelfläche ist. Auf der ersten Art der Regelflächen 3. Ordnung wird die Involution der Doppelgeraden mit reellen Kuspidalpunkten als Doppelpunkten bestimmt. Auf der zweiten Art dieser Regelflächen wird gewöhnlich nur ein Paar konjugierter Punkte der Involution bekannt. Ein zweites Paar der konjugierten Punkte dieser Doppelgeradeninvolution wird in dieser Arbeit bestimmt. *Das zweite Paar wird gebildet von den Punkten, die den symmetrischen Punkten und dem Zentralpunkt mit dem unendlichen Punkt der Involution der einfachen Leitgeraden zugeordnet sind.* Damit ist auch die harmonisch zugeordnete Fläche bestimmt.

Die Doppelgerade soll von der Ebene $\sum$, der einfachen Leitgeraden und der Erzeugenden des Zentralpunktes M dieser Leitgeraden in dem Punkte L geschnitten werden. Die oben erwähnten Polarhyperboloide aller Erzeugenden der Regelfläche werden von der Ebene $\sum$ in einem Strahlenbüschel des Punktes L geschnitten. Einer Erzeugenden i_1 soll der Strahl r_1 dieses Strahlenbüschels zugewiesen werden. Die einfache Leitgerade soll weiter mit den Geraden i_1, r_1 die Punkte I_1, R_1 gemeinsam haben. Es wird bewiesen, dass immer

$$I_1 M = M R_1$$

ist.

Auf der harmonisch zugeordneten Fläche sei der Erzeugenden i_1 der Regelfläche die Erzeugende k_1 zugeordnet. Mittels des Geradenpaares r_1, k_1 kann die konstruktive Behandlung der Regelflächen 3. Ordnung sehr vereinfacht werden. Als Beweis dafür wird wieder eine konstruktive Aufgabe gelöst.

Cayleysche Flächen. Die Geraden s, i sollen zwei beliebige Erzeugenden einer Cayleyschen Fläche sein. Von einer beliebigen Ebene der Erzeugenden i wird die Erzeugende s in dem Punkte P und die Regelfläche in dem Kegelschnitte c geschnitten. Die Regelfläche wird auch von dieser Ebene in dem Punkte $I = (c \times i)$ tangiert. Die Haupttangente des Punktes P soll mit p bezeichnet werden, die Verbindungsgerade der Punkte P, I mit q, und die Tangente des Kegelschnittes c in dem Punkte P mit r. Bewegt sich der Punkt P auf der Erzeugenden s, wird in der Torsalebene der Regelfläche von den Stützpunkten aller Geraden p_s eine Gerade p_1 gebildet, die den Kuspidalpunkt durchläuft. Ebenso werden die Geraden q_1, r_1 der Torsalebene von den Geraden q_s, r_s gebildet, die wieder durch den Kupsidalpunkt laufen. In dieser Arbeit wird bewiesen, dass die Doppelgerade o der Fläche mit den Geraden p_1. r_1, q_1 der Torsalebene das harmonische Doppelverhältnis bildet:

$$(r_1 \, o \, p_1 \, q_1) = -1$$

Die konstruktive Behandlung der Cayleyschen Regelflächen wird mit diesem Doppelverhältnis sehr vereinfacht. Eine konstruktive Aufgabe wird auch da als Beweis dafür gelöst.