RAD
HRVATSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNOGA RAZREDA
KNJIGA 274 (85) 1942 GOD.

VILIM NIČE

O SVEŽNJU PLOHA DRUGOGA REDA

U ZAGREBU 1942
NARODNA TISKARA, ZAGREB, KAPTOL 27

O svežnju ploha drugoga reda

Napisao
Vilim Niče.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda 29. listopada 1940.

Diramo li ravninama nekog pramena plohe svežnja F^2 ploha drugoga reda, određenog s osam asociiranih temeljnih točaka, bit će geometrijsko mjesto svih dirališta opća ploha četvrtoga reda[1]. Temeljne asociirane točke ovoga svežnja bit će obične točke plohe Δ, u koliko os pramena dirnih ravnina ne prolazi kojom od tih točaka. Sve ovakove plohe Δ prolaze prostornom krivuljom c^6 šestoga reda vrhova svih stožaca svežnja F^2. Razne varijante ovakovih ploha Δ razmatrali smo na drugom mjestu[1]. Jednu važnu varijantu smo hotimice izostavili, a tom ćemo se baviti na ovom mjestu.

U ovoj radnji razmotrit ćemo potanje takove plohe Δ. koje nastaju onda kada os pramena dirnih ravnina prolazi dvjema temeljnim točkama svežnja F^2. Uz zanimive singularitete ovakovih ploha, otkriti ćemo pomoću njih i neka važna svojstva prostorne krivulje c^6 povezana uz temeljne točke svežnja F^2.

Temeljne točke svežnja F^2 označimo s T_i, a osovina p pramena dirnih ravnina Π_i neka prolazi temeljnim točkama T_1 i T_2. Ravnine Π_i pravca p sijeku njenu pripadnu plohu Δ u čunjosječnicama, koje prolaze točkama T_1 i T_2, jer sve čunjosječnice presječnih mreža ovih ravnina sa svežnjem F^2 prolaze tim točkama. Općenito je presjek jedne ravnine Π sa plohom Δ krivulja trećega reda roda prvoga, a sačinjavaju ju vrhovi autopolarnih trokuta svih pramenova čunjosječnica unutar presječne mreže ove ravnine sa svežnjem F^2 (Jacobi). U našem slučaju raspadaju se te krivulje trećega reda u pravac p i čunjosječnice. U ravninama pravca p, kroz preostalih šest temeljnih točaka svežnja F^2, raspasti će se i ove čunjosječnice u daljnja dva pravca, t. j. spojnice svake ove točke

[1] Vidi moju radnju: Površine 4 reda kao geom. mjesto dirališta pramena ravnina i svežnja površina drugoga reda. »Rad«, knj. 271.

s točkama T_1 i T_2, jer gore spomenuta krivulja trećega reda vrhova autopolarnih trokuta pramenova presječne mreže u ovim ravninama dobiva tri dvostruke točke.

Budući da je ploha Δ četvrtoga reda, mora pravac p biti za tu plohu dvostruk, jer ju inače ravnine Π_i toga pravca nebi sjekle u krivulji (degeneriranoj) četvrtoga reda. Svaki pravac, koji prolazi točkama T_1 i T_2, probada našu plohu Δ u još samo jednoj točci, dakle su te točke na toj plosi čvorne i to trostruke.

Kazali smo da ravnina Π pravca p siječe plohu Δ u tom pravcu i nekoj čunjosječnici. Spojnice svake točke ove čunjosječnice s točkama T_1 i T_2 jesu izvodnice neke pravčaste plohe drugoga reda u svežnju F^2, jer ravnina Π dira u toj točci neku plohu svežnja F^2 koja prolazi točkama T_1 i T_2. Odavle direktno slijedi, da su tangente čunjosječnica svih ravnina Π_i pravca p u točkama T_1 i T_2 također izvodnice pravčastih ploha svežnja F^2, i to onih koje prolaze pravcem p. Sve ovakove pravčaste plohe svežnja F^2 čine pramen, čija se temeljna krivulja četvrtoga reda raspada u pravac p i neku kubnu čunjosječnicu, kojoj je taj pravac bisekanta. Bisekante ove degenerirane temeljne krivulje četvrtoga reda, koje prolaze točkama T_1 i T_2, jesu izvodnice ploha gore spomenutog pramena odnosno tangente čunjosječnica u ravninama Π_i pravca p. U našem slučaju prelaze te bisekante u unisekante kubne čunjosječnice, dakle sačinjavaju stošce trećega reda s vrhovima T_1 i T_2. Jer je pravac p bisekanta ove kubne čunjosječnice, bit će on zajednička dvostruka izvodnica ovih dvaju stožaca.

U kasnijim razlaganjima vratit ćemo se na ovu našu kubnu čunjosječnicu. Izvest ćemo njen postanak i pokazati vrlo jednostavno, da je pravac p njena biseaknta.

Iz dosadanjih naših razmatranja slijedi:

S p a j a li p r a v a c p d v i j e t e m e l j n e t o č k e s v e ž n j a F^2, b i t ć e o n z a p r i p a d n u p l o h u Δ d v o s t r u k, a n a v e d e n e t e m e l j n e t o č k e t r o s t r u k e č v o r n e. D i r n i m s t o š c i m a t r e ć e g a r e d a o v e p l o h e u t i m č v o r n i m t o č k a m a T_1 i T_2 j e s t p r a v a c p z a j e d n i č k a d v o s t r u k a i z v o d n i c a. S v a k o m o v o m č v o r n o m t o č k o m p r o l a z i š e s t d a l j n j i h p r a v a c a p l o h e Δ, k o j i s e u p a r o v i m a s i j e k u u p r e o s t a l i h š e s t t e m e l j n i h t o č a k a s v e ž n j a F^2.

Uzmimo da ravnina Π pravca $p = T_1 T_2$ prolazi i temeljnom točkom T_3. Presječna krivulja te ravnine s plohom Δ raspada se u dvostruki pravac p i pravce $t_1 = T_1 T_3$ i $t_2 = T_2 T_3$. Ta ravnina siječe prostornu krivulju c^6 u šest točaka. Krivulja c^6 nalazi se na svakoj plohi Δ, dakle i na ovoj našoj, a prema tome se i ovih šest presječnih točaka ravnine Π nalazi na pravcima p, t_1 i t_2.

Pokazati ćemo, da se na svakom ovom pravcu nalaze po dvije navedene točke.

Spojnicu temeljnih točaka $T_1 T_4$ označimo s p_1, a njoj pridruženu plohu s Δ_1. Pravac $t_2 = T_2 T_3$ plohe Δ ne nalazi se na plohi Δ_1 i zato ju probada u četiri točke. Dva su njegova probodišta s plohom Δ_1 točke T_2 i T_3, a preostala dva mogu se nalaziti na prostornoj krivulji c^6. Posve analogno mogli bismo dokazati i za pravce t_1 i p, kao i za sve ostale spojnice parova temeljnih točaka svežnja F^2, da mogu imati najviše dvije točke zajedničke s krivuljom c^6. Vidjeli smo malo prije, da ravnina Π pravaca p, t_1 i t_2 siječe krivulju c^6 u šest točaka, a sve se te točke nalaze na tim pravcima. Budući da na svakom ovom pravcu ne mogu biti više od dva sjecišta s krivuljom c^6, ne mogu tada biti ni manje od dva, jer ima svega zajedno tri pravca. Na svakom ovom pravcu nalaze se prema tome točno dva sjecišta.

Što vrijedi za pravce p, t_1 i t_2, vrijedi i za sve ostale spojnice parova temeljnih točaka svežnja F^2, pa imamo:

Svih dvadeset i osam spojnica parova temeljnih točaka svežnja F^2 jesu bisekante prostorne krivulje c^6 glavnih točaka svih pramenova ploha svežnja F^2.

Znademo da ravnine pravca p sijeku našu plohu Δ u čunjosječnicama, koje prolaze njenim čvornim točkama T_1 i T_2. Ove ravnine sijeku prostornu krivulju c^6 u četiri točke izvan pravca p, koje su također na presječnoj čunjosječnici jer su na plohi Δ. Mjesto temeljnih točaka T_1, T_2 mogli smo uzeti bilo koji par takovih točaka, pa na temelju toga slijedi:

Svaka ravnina, položena dvjema temeljnim točkama svežnja F^2, siječe prostornu krivulju c^6 u šest točaka ovako: dvije su uvijek na spojnici navedenog para temeljnih točaka, dok ostale četiri leže na jednoj čunjosječnici zajedno s parom tih temeljnih točaka. Sve ovakove čunjosječnice, određenih dviju temeljnih točaka svežnja F^2, sačinjavaju opću plohu četvrtoga reda, kojoj su spomenute temeljne točke trostruke čvorne, a spojnica njihova je dvostruki pravac.

Točke prostorne krivulje c^6 su vrhovi svih stožaca svežnja F^2. Naš pravac p siječe tu krivulju u dvije točke, recimo S_1 i S_2, koje su vrhovi također takovih dvaju stožaca. Kada smo izvodili dirne stošce plohe Δ u čvornim točkama T_1 i T_2, pokazali smo da su izvodnice tih stožaca izvodnice onih ploha svežnja F_2, koje prolaze pravcem p. Sve te plohe čine pramen, čija se temeljna krivulja raspada u pravac p i neku kubnu čunjosječnicu. Budući da su spojnice točaka S_1 *i* S_2 s temeljnim točkama svežnja F^2 izvodnice stožaca ovog svežnja, kojima su vrhovi S_1 i S_2, bit će pravac $p = T_1 T_2$ zajednička izvodnica tih stožaca. A odavle slijedi da se ti stošci nalaze u gore navedenom pramenu. Prodorna kubna čunjosječnica tih stožaca bit će s pravcem p temeljna krivulja tog pramena, a pravac p je bisekanta te kubne čunjosječnice.

Točke u kojima pravac p siječe krivulju c^6 označili smo sa S_1 i S_2, a tangente ove krivulje u tim točkama označit ćemo s h_1 i h_2. Pravcem p i tangentom h_1 krivulje c^6 u točci S_1 postavimo ravninu Π_1. Presječna čunjosječnica ove ravnine s plohom Δ raspada se u ovom slučaju u dva pravca, jer ta čunjosječnica prolazi točkama T_1, T_2 i S_1 na pravcu p. U točku S_1 pala je naime jedna točka od onih četiri u kojima ravnina Π_1 siječe krivulju c^6. Preostale tri presječne točke ove ravnine s tom krivuljom nalaze se na drugom dijelu one degenerirane čunjosječnice, t. j. na pravcu, dakle na trisekanti krivulje c^6. Prvi pravac ove degenerirane čunjosječnice pada u pravac p, jer je određen točkama T_1, T_2 i S_1, pa je prema tome pravac p torzalan pravac plohe Δ, a ravnina Π_1 torzalna ravnina. U ovoj ravnini nalazi se jedna trisekanta s_2 krivulje c^6, koja će također biti pravac plohe Δ.

Potpuno analogno vrijedi i za toču S_2. Na temelju svih ovih razmatranja dobivamo slijedeću dopunu ranije navedenoga stavka:

Spaja li pravac p dvije temeljne točke svežnja F^2, imati će pripadna ploha Δ u tom pravcu ne samo dvostruki pravac, nego i dvostruko torzalan pravac, čije su torzalne ravnine određene tangentama krivulje c^6 u njenim sjecištima s pravcem p. Osim dvanaest običnih pravaca ove plohe, koji prolaze njenim trostrukim čvornim točkama, postoje na toj plosi još dva pravca koji se nalaze u torzalnim ravninama pravca p.

Kumer je izveo za opću plohu četvrtoga reda s dvostrukim pravcem, da može imati osim dvostrukog još 16 pravaca[2]. Ovi pravci postoje i na našoj plohi Δ. I to: svakom čvornom točkom prolazi ih šest, po jedan se nalazi u svakoj torzalnoj ravnini, a dva se nalaze u pravcu p, jer po njima postaje dvostruko torzalan.

Uzmemo li neku točku V krivulje c^6 kao vrh stožaca u svežnju F^2, pa tom točkom i jednom trisekantom z položimo ravninu, bit će ta ravnina polarno pridružena spojnici točke V s konjugirano pridruženom točkom Z trisekanti z na krivulji c^6.[3]

Točku Z pomaknimo sada u točku S_1 na pravcu p, a njoj konjugirano pridruženu trisekantu označimo sa z_1. Vrh V odaberimo u točci S_2 pravca p. Spojnica $S_1 S_2 = p$ je izvodnica stošca svežnja F^2 kojemu je vrh S_2, a njoj polarno pridružena ravnina $(S_2 z_1)$ mora taj stožac dirati duž te izvodnice. Drugim riječima znači ovo, da trisekanta z_1, konjugirano pridružena točci S_1, siječe pravac p. Potpuno analogno siječe taj pravac i trisekanta z_2 konjugirano pridružena točci S_2.

Budući da je ploha trisekanata prostorne krivulje c^6 osmoga reda[4], kojoj je ta krivulja trostruka, mogu sjeći pravac p, osim trisekanata točaka S_1 i S_2, još samo dvije trisekante krivulje c^6. Vidjeli smo sprijeda, da se u torzalnim ravninama Π_1 i Π_2 plohe Δ nalazi po jedna trisekanta s_2 i s_1. Jer ravnine Π_1 i Π_2 prolaze pravcem p, slijedi da su trisekante s_1 i s_2 identične s trisekantama z_1 i z_2.

Pomaknemo li vrh V u točku S_1, prelazi spojnica VS_1 u tangentu h_1 krivulje c^6 u točci S_1, a ravnina $(Vz_1) = (Ss_1)$, prolazit će pravcem p. Budući da je pravac p izvodnica i onog stošca svežnja F^2 kojemu je vrh točka S_1, slijedi da se trisekanta $z_1 = s_1$ ne može nalaziti u ravnini $ph_1 = \Pi_1$, nego se mora nalaziti u ravnini

---

[2] Kummer: Berl. Monatsb. 1863 str. 324, J. f. Mathemat. 64, 66 1865.
[3] Dr. Th. Reye: Die Geometrie der Lage Abt. III. str. 139.
[4] Dr. Th. Reye: Op. cit. str. 142.

$ph_2 = \Pi_2$. Analogno se trisekanta s_2 mora nalaziti u ravnini $ph_1 = \Pi_1$. Vidimo dakle:

Točkama S_1, S_2 spojnice $p = T_1$, T_2 i krivulje c^6, konjugirano pridružene trisekante s_1, s_2 sijeku tu spojnicu, a nalaze se u ravninama određenima tom spojnicom i tangentama h_2 i h_1 krivulje c^6 u točkama S_2 i S_1.

Mjesto točaka T_1 i T_2 možemo uzeti ma koji par temeljnih točaka svežnja F_2, pa na temelju navedenog stavka dobivamo još i slijedeće:

Na prostornoj krivulji c^6 postoji 28 parova točaka, čije konjugirano pridružene trisekante sijeku spojnicu tih parova. Ove se trisekante nalaze u dirnoj ravnini krivulje c^6, i to uvijek u suprotnoj točci takovog para. Svaka spojnica takovog para točaka prolazi jednim parom temeljnih točaka svežnja F^2.

Trisekante s_1 i s_2 konjugirano pridružene točkama S_1 i S_2 pravca p neka sijeku taj pravac u točkama Z_1 i Z_2. Budući da sve plohe svežnja F^2 prolaze točkama T_1 i T_2, a polarne ravnine točaka S_1 i S_2, obzirom na sve te plohe, prolaze trisekantama s_1 i s_2, dobivamo još i ovo:

Probodišta spojnica parova temeljnih točaka svežnja F^2 s plohom trisekanata prostorne krivulje c^6, dobivamo kao četvrte harmonijske točke svakog para temeljnih točaka, pridružene obim sjecištima njegove spojnice s krivuljom c^6.

Ako je povoljna bisekanta prostorne krivulje c^6 naš pravac p, imat će tom pravcu pripadna ploha Δ dvostruke čvorne točke u sjecištima pravca p s krivuljom c^6.[5] Uzmemo li nadalje da ta bisekanta p prolazi još i jednom temeljnom točkom T_1 svežnja F^2, morala bi tom pravcu p pripadna ploha Δ imati u toj točci T_1 trostruku čvornu točku, jer bi sve ravnine pravca p sjekle tu plohu Δ u tom pravcu i krivuljama trećega reda, koje bi u toj točci imale dvostruku točku. No to je međutim nemoguće, jer sve te krivulje već imaju na tom pravcu dvije točke, t. j. sjecišta tog pravca s krivuljom c^6. Odavle nužno slijedi da svaka bisekanta

[5] Vidi moju radnju: Op. cit. »Rad«, knj. 271.

krivulje c^6, koja prolazi jednom temeljnom točkom svežnja F^2, prolazi još jednom takovom točkom. A u takovom slučaju dobivamo prije opisanu plohu Δ. Na temelju ovih kao i prijašnjih razmatranja, slijedi da:

Svakom temeljnom točkom svežnja F^2 prolazi najviše sedam bisekanata prostorne krivulje c^6, t. j. svakom preostalom realnom temeljnom točkom po jedna.

Osim ovoga stavka možemo na temelju gornjih razlaganja napisati još i slijedeći:

Prostorna krivulja c^6 nema takovih bisekanata, koje prolaze samo jednom temeljnom točkom svežnja F^2. Svaka bisekanta ove krivulje, koja prolazi jednom temeljnom točkom, mora prolaziti još jednom takovom točkom.