Nastavni vjesnik 50(1942), 360-362

VANJSKA OZNAKA UNIKURZALNE CIRKULARNE KRIVULJE 3. REDA

Vilim Niče, Zagreb.

Elipsa i kružnica srodne su krivulje 2. reda, a mogu se po svome obliku razlikovati tako malo, da se to okom ne može ni opaziti. Posvema su analogno srodne i eliptične unikurzalne krivulje 3. reda s cirkularnim unikurzalnim krivuljama 3. reda, a njihova razlika po vanjskom obliku može biti upravo tolika, kolika je između elipse i kružnice. Razlika u obliku između elipse i kružnice je očita, ali razlika između obične eliptične unikurzalne krivulje 3. reda i cirkularne unikurzalne krivulje 3. reda nije baš tako očita. Postoji li kakav vanjski znak za cirkularne unikurzalne krivulje 3. reda, po kojem bismo ih mogli raspoznati? Ovim problemom bavit ćemo se u ovoj radnji.

Odaberimo na nekoj unikurzalnoj cirkularnoj krivulji 3. reda k po volji točku Z tako, da možemo njome položiti dvije realne tangente na tu krivulju! Dirališta tih tangenata označimo s M i N. Svaka zraka točke Z siječe krivulju k u paru točaka A, B, a spojnice tih točaka s točkom O daju involutoran pramen zraka, kojemu su zrake OM i ON dvostruke.[1] Uzmemo li sada zrake OA i OB kao dvostruke zrake nekog novog involutornog pramena, tada će par zraka OM, ON biti konjugirani par zraka i ovakve involucije. Uzmimo sada umjesto točke Z beskonačno daleku točku Z_∞ krivulje k! Beskonačno daleki pravac siječe krivulju k u apsolutnim točkama A_∞ i B_∞, jer tim točkama krivulja prolazi, a odavle direktno slijedi, da točki Z_∞ pridružena dirališta M_n i N_n, spojena s točkom O, daju par okomitih zraka ($OM_n \perp ON_n$). Vidimo dakle: Ako spojimo dvostruku točku cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga s diralištima njenih tangenta usporednih s asimptotom, bit će te spojnice uvijek međusobno okomite.

Krivulja k, koja ima navedeno svojstvo, ne mora biti cirkularna, jer je to za cirkularnu krivulju k samo nuždan, a nije i dovoljan uvjet. Potražit ćemo još jednu vanjsku oznaku naše krivulje k, koja će zajedno s navedenom dati nuždan i dovoljan uvjet, da ta krivulja bude cirkularna.

Svaka presječna krivulja Plückerovog konoida projicira se u smjeru dvostrukog pravca na direkcionu ravninu kao cirkularna krivulja 3. reda roda nultoga, koje je asimptota usporedna s ravninom presjeka. Ovo slijedi iz poznatog svojstva tog konoida, da se njegove čunjosječnice projiciraju u smjeru dvostrukog pravca na direkcione ravnine kao kružnice.[2]

Uzmimo sada neku cirkularnu krivulju 3. reda roda nultoga k'_1 kao bazu uspravnog valjka, koji presijecimo u krivulji k_1 ravninom usporednom s asimptotom krivulje k'_1! Siječemo li sada krivulju k_1 ravninama usporedno s ravninom krivulje k'_1, tada spojnica tih sjecišta s probodištem dvostruke izvodnice tog stošca daje Plückerov konoid, jer te spojnice daju konoid 3. reda, čiji je dvostruki pravac okomit na direkcionoj ravnini, torzalni pravci su međusobno okomiti, a u beskonačnosti na dvostrukom pravcu ima kružnu točku,[3] odnosno par minimal-

[1] Dr. E. Weyr: Theorie der mehrd. geom. Elementargeb. und der alg. Curv. und Flächen als deren Eerzeugnisse. Theil II., str. 91.

[2] Müller-Krames: Vorlesungen über darstellende Geometrie. Bd. III, str. 207.

[3] Vidi moju radnju: O čunjosječnicama na pravčastim plohama 3. i 4. reda. Nastav. Vjes. Knjiga L. Str. 50.

nih beskonačno dalekih izvodnica. Presiječemo li taj konoid direkcionom ravninom, koja raspolavlja udaljenost između torzalnih ravnina, dobit ćemo par izvodnica, koje raspolavljaju pravi kut torzalnih pravaca, dakle su također okomite. Na tom paru izvodnica nalazi se par točaka krivulje k_1, a taj se par projicira u par točaka krivulje k'_1, koji leži na usporednici s njenom asimptotom, koja je u sredini između tangenata krivulje k'_1, spuštenih na nju iz njene beskonačno daleke točke. Te su tangente presječnice ravnine krivulje k_1 s torzalnim ravninama, a dirališta su sjecišta te ravnine s torzalnim pravcima.

Budući da ovakvu operaciju možemo izvesti sa svakom cirkularnom krivuljom 3. reda roda nultoga, to za sve te krivulje možemo izreći slijedeći stavak:

N u ž d a n i d o v o l j a n u v j e t, d a n e k a e l i p t i č n a k r i v u l j a 3. r e d a r o d a n u l t o g a b u d e c i r k u l a r n a, d a j u j o j o v e v a n j s k e o z n a k e: 1) S p o j n i c e d v o s t r u k e t o č k e s d i r a l i š t i m a t a n g e n a t a u s p o r e d n i h s a s i m p t o t o m t e k r i v u l j e m o r a j u b i t i m e đ u s o b n o o k o m i t e. 2) S j e c i š t e k r i v u l j e s a s i m p t o t i n o m p a r a l e l o m u s r e d i n i n a v e d e n i h u s p o r e d n i h t a n g e n a t a, s p o j e n a s n j e n o m d v o s t r u k o m t o č k o m, m o r a j u d a t i t a k o đ e r p a r o k o m i t i h p r a v a c a.

Ova vanjska oznaka unikurzalnih crkularnih krivulja 3. reda daje nam i putokaz za konstruktivnu izvedbu poznate činjenice, da svaku eliptičnu krivulju 3. reda roda nultoga možemo paralelno projicirati na neku ravninu u isto takvu cirkularnu krivulju.

ZUSAMMENFASSUNG

Zwischen den unikursalen zirkularen Kurven 3. Ordnung und den gewöhnlichen elliptischen unikursalen Kurven 3. Ordnung besteht derselbe Unterschied, wie zwischen Kreisen und Ellipsen. Der Unterschied zwischen Ellipse und Kreis ist offensichtlich. Bei den zirkularen und den gewöhnlichen elliptischen, unikursalen Kurven 3. Ordnung ist der Unterschied fast unmerklich.

In dieser Arbeit ist eine aüssere Eigenschaft der unikursalen zirkularen Kurven 3. Ordnung gefunden, die ihre Unterscheidung von den gewöhnlichen elliptischen unikursalen Kurven 3. Ordnung ermöglicht. Diese Eigenschaft wird in folgendem Satze zum Ausdruck gebracht:

E i n e n o t w e n d i g e u n d h i n r e i c h e n d e B e d i n g u n g d a f ü r, d a s s e i n e e l l i p t i s c h e u n i k u r s a l e K u r v e 3. O r d n u n g z i r k u l a r s e i n m u s s, b e s t e h t i n f o l g e n d e r a ü s s e r e n E i g e n s c h a f t d i e s e r K u r v e: 1. D i e V e r b i n d u n g s g e r a d e n d e s D o p p e l p u n k t e s m i t d e n B e r ü h r u n g s p u n k t e n d e r m i t d e r A s y m p t o t e p a r a l l e l e n T a n g e n t e n m ü s s e n s e n k r e c h t s e i n. 2. W e r d e n d i e S c h n i t t p u n k t e e i n e r G e r a d e n, d i e p a r a l l e l m i t d e r A s y m p t o t e i n d e r M i t t e d e r g e n a n n t e n T a n g e n t e n l ä u f t, m i t d e m D o p p e l p u n k t e v e r b u n d e n, s o m ü s s e n d i e s e V e r b i n d u n g s g e r a d e n a u c h s e n k r e c h t s e i n.