VILIM NIČE

O ČUNJOSJEČNICAMA NA PRAVČASTIM PLOHAMA 3. I 4. REDA

Izvadak iz radnje odobrene kao disertacije za doktorski ispit na VI. sjednici Vijeća Filozofskog fakulteta Nezavisne Države Hrvatske od 5. VI. 1941. godine, prema referatu gg. profesora dra. Rudolfa Cesarca i dra. Đure Kurepe.

ZAGREB 1941

TISAK HRVATSKE DRŽAVNE TISKARE U ZAGREBU

VILIM NIČE

O ČUNJOSJEČNICAMA NA PRAVČASTIM PLOHAMA 3. I 4. REDA

Uvod.

U ovom radu promatrat ćemo neka zajednička svojstva čunjosječnica na pravčastim plohama 3. i 4. reda, koja se temelje na perspektivnom preslikavanju tih ploha, odnosno njihovih čunjosječnica, na ravninu.

Projiciramo li centralno sve kružnice kugle iz jedne njene točke na ravninu paralelnu s tangencijalnom ravninom kugle u toj točki, bit će projekcije ovih kružnica na toj ravnini opet kružnice. To nam daje poznata stereografska projekcija. Odaberimo po volji neku plohu 2. reda pa projicirajmo analogno sve čunjosječnice ove plohe iz jedne njene točke na ravninu paralelnu s tangencijalnom ravninom te točke. Projekcije ovih čunjosječnica na toj ravnini bit će homotetične čunjosječnice, jer prolaze istim dvjema beskonačno dalekim točkama te ravnine[1].

U ovoj radnji bavit ćemo se analognim razmatranjima kod pravčastih ploha 3. i 4. reda. Projicirat ćemo sve čunjosječnice tih ploha iz jedne njihove točke na ravninu paralelnu s jednom ili više tangencijalnih ravnina te točke. Pokazat ćemo, da su projekcije svih tih čunjosječnica opet homotetične čunjosječnice, ako je centar projiciranja u sjecištu dviju izvodnica, a promotrit ćemo i poredak tih homotetičnih čunosječnica u ravnini projiciranja.

[1] G. Peschka: Darst. und proj. Geometrie Bd. III, str. 785.

I. O izvodnicama.

Znademo, da se čunjosječnice neke plohe 2. reda projiciraju iz jedne njene točke kao homotetične na ravninu paralelnu s tangencijalnom ravninom plohe u toj točki, t. j. na onu, koja je paralelna s parom realnih ili imaginarnih izvodnica plohe u toj točki. Da sve projicirane čunjosječnice budu homotetične, bitno je, da centrom projiciranja prolazi par realnih ili imaginarnih izvodnica, koje mogu pasti i zajedno. No pravčaste plohe 3. i 4. reda imaju samo jedan sistem izvodnica. Za naša razmatranja doći će prema tome u obzir u glavnom samo one točke tih ploha, kojima prolaze po dvije ili više izvodnica, t. j. njihove dvostruke ili trostruke linije. Imajući to u vidu, promotrit ćemo sada pravčaste plohe 3. i 4. reda s naročitim obzirom na njihove dvostruke linije, odnosno parove realnih ili imaginarnih izvodnica, koje se u tim linijama sijeku. U ovom radu dolazit će u obzir samo one pravčaste plohe 4. reda, na kojima se nalaze čunjosječnice, a to su III., V., VII., VIII., IX. i XI. vrste.[2]

1. Pravčaste plohe 3. reda.

Svaka pravčasta ploha 3. reda osim Cayleyeve nalazi se u nekoj linearnoj hiperbolnoj kongruenciji, čije ravnalice označimo sa d i l. Pojedinu plohu te kongruencije sačinjava onih ∞^1 zraka, koje sijeku još jednu čunjosječnicu c, a ta mora s jednom od tih ravnalica, recimo d, imati jednu zajedničku točku.[3]

U svakoj ravnini ρ pravca l nalaze se po dvije izvodnice, koje se sijeku u dvostrukom pravcu d, a sijeku i čunjosječnicu c. Parovi ovih izvodnica mogu biti realni, mogu biti imaginarni, a mogu pasti i zajedno. U posljednjem slučaju imademo torzalne pravce i ravnine sa kuspidalnim točkama na pravcu d.

Parovi ovih izvodnica mogu se uzeti kao dvostruke zrake hiperboličnog, eliptičnog ili paraboličnog involutornog pramena zraka konjugiranih dijametara stošca, kojemu je ravnalica kružnica c, a vrh sjecište tih parova.

Padnu li pravci d i l u jedan, t. j. kad navedena linearna kongruencija postane parabolična, prelazi naša ploha u Cayleyevu plohu 3. reda. Svakom točkom dvostrukog pravca prolazi po jedna izvodnica, a u njemu se nalazi i jedan torzalni pravac.

---

2 Müller-Krames: Vorles. üb. darst. Geometrie, Bd. III, str. 268.
3 Müller-Krames: ibid., str. 175.

Torzalna ravnina dira čunjosječnicu c, dok je kuspidàlna točka u sjecištu dvostrukog pravca d s torzalnom izvodnicom, koja se s njim poklapa.

2. Pravčaste plohe 4. reda.

Odaberimo najprije one pravčaste plohe 4. reda, koje se nalaze u nekoj linearnoj hiperboličnoj kongruenciji. Svaku plohu u takvoj kongruenciji sačinjavaju one njezine zrake, koje sijeku još jednu čunjosječnicu c. Ova čunjosječnica i ravnalice kongruencije ne smiju imati zajedničkih točaka.[4]

Svaka ravnina vrha nekog stošca 2. reda siječe taj stožac u paru njegovih realnih ili imaginarnih izvodnica, a te izvodnice mogu se uzeti i kao dvostruke zrake involutornog pramena konjugiranih dijametara tog stošca u toj ravnini. Odaberimo na ravnalici d_1, linearne hiperbolične kongruencije neku točku V, pa tom točkom i drugom ravnalicom d_2, položimo ravninu ρ. Ova ravnina siječe stožac (cV), u dvije njegove izvodnice. Ovaj par realnih ili imaginarnih zraka su izvodnice pravčaste plohe 4. reda VII. vrste. Ako ravnina ρ dira stožac (cV), padaju obje izvodnice zajedno, involucija konjugiranih dijametara u ravnini ρ postaje parabolična, t. j. imademo slučaj torzalnog pravca i ravnine.

Neki pravac d neka je ravnalica linearne parabolične kongruencije, a čunjosječnica c neka je čunjosječnica-ravnalica neke pravčaste plohe 4. reda VIII. vrste u toj kongruenciji.[5]

Nekoj ravnini ρ pravca d pridružena je na tom pravcu točka V. Ravnina ρ siječe stožac (cV) u dvije realne ili imaginarne izvodnice, koje su u isti mah izvodnice naše plohe, a mogu se opet uzeti kao dvostruke zrake involutornog pramena konjugiranih dijametara stošca (cV) u ravnini ρ. Ako ravnina ρ dira stožac (cV), bit će ona kao i ranije torzalna, a par izvodnica će se stegnuti opet u torzalan pravac.

Pravčaste plohe linearne eliptične kongruencije ne dolaze u obzir kod naših razmatranja, jer su im dvostruki pravci imaginarni.

Kao dalju vrstu pravčastih ploha 4. reda uzmimo one plohe III. vrste. Plohe ove vrste nalaze se u kongruenciji bisekanata kubne čunjosječnice (1. reda 3. razreda). Svaka ploha ove vrste određena je kubnom čunjosječnicom k kao ravnalicom i još nekom čunjosječnicom c, koja ravnalicu k siječe u dvije točke.[6] Odaberimo na ravnalici k neku točku V. Bisekante ravnalice k u točki V čine stožac 2. reda,[7] a isto takav stožac (cV) čine spojnice točke V s točkama čunjosječnice c.

---

[4] Müller-Krames: ibid., str. 262.
[5] Müller-Krames: ibid., str. 262.
[6] Th. Reye: Geometrie der Lage Bd. II, str. 196.
[7] Th. Reye: ibid., str. 161-162.

Dva stošca 2. reda sa zajedničkim vrhom prodiru se u dva para realnih ili imaginarnih izvodnica, a nalaze se uvijek u barem dvije realne ravnine. Svaki taj par može se uzeti opet kao dvostruke zrake involutornog pramena konjugiranih dijametara obzirom na oba stošca.

Kod naših stožaca sa zajedničkim vrhom V jedan par takvih prodornih izvodnica uvijek je realan, radi zajedničkih točaka ravnalice k i čunjosječnice c, ali to nisu izvodnice plohe. Drugi par može biti realan, imaginaran i može pasti zajedno. Ovaj drugi par su izvodnice plohe određene ravnalicom k i čunjosječnicom-ravnalicom c.

Posve analogno vrijedi kod pravčastih ploha 4. reda V. vrste. Takve plohe nalaze se u kongruenciji 1. reda 2. razreda, čija je ravnalica k čunjosječnica i pravac, koji se sijeku u jednoj točki (degenerirana kubna čunjosječnica). Neka je ploha ove vrste zadana ravnalicom k i nekom čunjosječnicom c, koja čunjosječnicu ravnalice siječe u dvije točke. Uzmemo li na pravcu ravnalice k točku V, možemo posve analogno kao malo prije zaključiti, da tom točkom prolazi par realnih ili imaginarnih izvodnica plohe, koje se opet mogu stegnuti u torzalan pravac.

Ako je točka V na čunjosječnici ravnalice k, tada ravnina točke V i pravca ravnalice siječe stožac (cV) opet u paru realnih ili imaginarnih izvodnica, ili dira duž torzalne izvodnice takve plohe.

Preostale pravčaste plohe 4. reda, na kojima su čunjosječnice, jesu one IX. i XI. vrste. Budući da ovakve plohe imaju samo trostruki pravac kao višestruku liniju, to se ne nalaze ni u jednoj od navedenih kongruencija, a možemo ih zadati tim trostrukim pravcem d i dvije čunjosječnice c_1 i c_2, koje s tim pravcem imaju po jednu točku zajedničku.[8]

Neka je na pravcu d opet po volji uzeta točka V. Stošci $(c_1 V)$ i $(c_2 V)$ prodiru se opet u četiri izvodnice, a pravac d je već takva jedna igvodnica. U svakom slučaju mora dakle biti još jedna realna, dok preostale dvije mogu biti realne, imaginarne ili mogu pasti zajedno. Kod pravčastih ploha 4. reda XI. vrste nalazi se ona uvijek realna izvodnica u pravcu d, tako da je on u isti mah trostruk i torzalan pravac tih ploha. Stošci $(c_1 V)$ i $(c_2 V)$ imadu zajedničku tangencijalnu ravninu duž pravca d.[9] Dakle svakom točkom trostrukog pravca pravčastih ploha 4. reda IX. vrste prolaze po tri izvodnice. Jedna od tih je uvijek realna, dok ostale dvije mogu biti realne, imaginarne ili mogu pasti zajedno.

Svakom točkom trostrukog pravca d kod ploha XI. vrste prolaze samo dvije izvodnice.

Na plohama ostalih vrsta nema čunjosječnica, dakle one ne ulaze u naša razmatranja.

---

[8] Müller-Krames: ibid., str. 258.

[9] Müller-Krames: ibid., str. 265.

II. Projekcije čunjosječnica pravčastih ploha 3. i 4. reda iz jedne točke njihove plohe.

1. Pravčaste plohe 3. reda.

Na po volji uzetoj pravčastoj plohi 3. reda odaberimo neku točku A. Ovom točkom neka prolazi izvodnica i, a njen par, koji je siječe na dvostrukom pravcu d, označimo s i_1. Tangencijalna ravnina ρ plohe, u točki A, siječe tu plohu u izvodnici i i još u nekoj čunjosječnici c. Svakom točkom čunjosječnice c prolazi ∞^1 čunjosječnica plohe, a svaka ta čunjosječnica siječe također izvodnicu i. Postavimo sada u prostoru po volji ravninu α usporednu s ravninom ρ. Na čunjosječnici c uzmimo neku točku P, a svih ∞^1 čunjosječnica koje prolaze tom točkom, projicirajmo centralno iz točke A na ravninu α. Točka P projicira se u jednu beskonačno daleku točku ravnine α, a točke svih čunjosječnica na izvodnici i u drugu. Svih ovih ∞^1 čunjosječnica projicira se dakle na ravninu α u sistem sa ∞^1 sličnih i usporednih hiperbola, jer projekcije tih čunjosječnica sijeku beskonačno daleki pravac ravnine α u iste dvije realne točke. Odavle također slijedi, da sve te hiperbole imadu paralelne asimptote Što vrijedi za točku P, vrijedi i za sve druge točke čunjosječnice c. Sve čunjosječnice plohe projiciraju se iz neke njene točke na ravninu paralelnu s dirnom ravninom te točke u ∞^1 takvih sistema c_α^i čunjosječnica, a čunjosječnice svakog sistema c_α homotetične su, dok čunjosječnice svih sistema imadu jednu asimptotu paralelnu s izvodnicom i. Da su sve te čunjosječnice u ravnini α hiperbole, to već znademo.

Pokazat ćemo još, kako izgleda svaki takav sistem c_α hiperbola u ravnini α. Središte projekcije neke čunjosječnice plohe na ravnini α, koja prolazi točkom P, nalazi se u probodištu konjugiranog dijametra ravnini čunjosječnice c obzirom na stožac vrha A i te čunjosječnice plohe. Takvi konjugirani dijametri ravnini čunjosječnice c, obzirom na svih ∞^1 stožaca čunjosječnica točke P, nalaze se u jednoj ravnini, jer tangencijalne ravnine tih stožaca duž njihovih zajedničkih izvodnica i i (AP) čine dva projektivna sveska ravnina, a ravnina čunjosječnice c međusobno im je pridružena. Produkt tih dvaju svezaka raspada se dakle u tu i još jednu ravninu. Da su dva navedena sveska projektivna, lako se može dokazati pomoću presječne čunjosječnice ravnine izvodnica i, i_1 sa stošcem tangenata plohe iz točke A.

Središta projekcija čunjosječnica plohe u točki P bit će dakle na jednom pravcu. Projekcije tih čunjosječnica u ravnini α dirat će također onu čunjosječnicu, u koju se projicira ploha iz točke A na tu ravninu, a uz poznate beskonačno daleke točke određen je time svaki takav sistem. Da je tome tako izlazi odatle, što svakom točkom svake izvodnice prolazi po jedna čunjosječnica točke P, dakle jedna mora prolaziti i onom točkom, u čijoj projekciji dira projekcija izvodnice projekciju plohe. Budući da svaki pravac točke A probada plohu u još dvije točke, prolazit će svakom točkom ravnine α izvan čunjosječnice, u koju se projicira površina, po dvije čunjosječnice sistema c_α.

Neka druga izvodnica l naše plohe neka siječe dvostruki pravac d u točki L. Sve čunjosječnice pramena tangencijalnih ravnina izvodnice l prolaze točkom L, a sijeku dabome i izvodnicu i. Postavimo sada u prostoru ravninu β paralelnu s pravcima i, d. Točka L projicirat će se iz točke A u jednu beskonačno daleku točku ravnine β, a izvodnica i u drugu takvu točku. Čunjosječnice sveska tangencijalnih ravnina izvodnice l projicirat će se dakle opet iz točke A na ravninu β u sistem homotetičnih hiperbola. Sve čunjosječnice plohe projicirat će se iz iste točke na istu ravninu u ∞^1 takvih sistema, a svih ∞^2 hiperbola u toj ravnini imat će jednu asimptotu paralelnu s izvodnicom i. Svaki ovakav sistem sličnih i paralelnih čunjosječnica bit će istovrstan s onim prijašnjim, što se može i posvema analogno dokazati.

Postavimo konačno u prostoru još neku ravninu γ paralelnu s bilo kojom ravninom g sveska tangencijalnih ravnina izvodnice i. Ravnina g siječe plohu opet u izvodnici i i nekoj čunjosječnici c, a svakom točkom P_i te čunjosječnice prolazi ∞^1 čunjosječnica plohe. Posve analogno kao i prije izlazi, da će se skupine čunjosječnica svake točke P projicirati na ravninu γ opet u sistem homotetičnih hiperbola. Lako se može primijetiti, da se u ovom slučaju čunjosječnice dvaju skupina točaka P projiciraju na ravninu γ kao homotetične. Na temelju naših zaključaka mogli bismo dakle izreći ovaj stavak:

Sve čunjosječnice pravčaste plohe 3. reda možemo centralno projicirati iz svake točke njene plohe na svaku ravninu prostora usporednu s izvodnicom te točke u ∞^1 sistema, a svaki sa ∞^1 homotetičnih hiperbola. Hiperbole svih sistema imadu jednu asimptotu paralelnu s izvodnicom centra projiciranja.

Za točku A na torzalnom pravcu postoje u prostoru samo dva sveska paralelnih ravnina, na koje će se čunjosječnice plohe projicirati kao do sada iz te točke. Ravnine prvog sveska paralelne su s torzalnom ravninom točke A, a one drugog sveska s ravninom dvostrukog pravca d i torzalnog pravca točke A. Na svaku ravninu prvog sveska projicirat će se čunjosječnice plohe iz točke A u same usporedne parabole, jer se dodiruju u beskonačno dalekoj točki, a sve su međusobno slične[10]. Čitava ploha projicira se iz točke A opet u neku čunjosječnicu, a nju tangira u ovom slučaju ∞^2 usporednih parabola, u koje se projiciraju čunjosječnice plohe. To su sve moguće usporedne parabole, koje tu čunjosječnicu tangiraju. Čunjosječnica, u koju

---

[10] Salmon-Fiedler: Analytische Geometrie der Kegelschnitte Bd. I, str. 418.

se projicira ploha iz točke A, također je parabola, jer pravu konturu u tom slučaju čini jedna čunjosječnica plohe[11].

Na ravninu drugog sveska projiciraju se sve čunjosječnice iz točke A opet u ∞^1 sistema sa ∞^1 homotetičnih hiperbola, a svih ∞^2 hiperbola imadu jednu zajedničku asimptotu. Ova asimptota je presječnica torzalne ravnine točke A s ravninom, na koju projiciramo. Projekcije čunjosječnica svezaka tangencijalnih ravnina svake izvodnice daju opet po jedan poznati sistem homotetičnih hiperbola.

2. Pravčaste plohe 4. reda.

Svaka čunjosječnica pravčaste plohe 4. reda siječe svaku izvodnicu te plohe u jednoj točki, a svakom točkom prolazi samo jedna čunjosječnica. To ne vrijedi za točke na dvostrukim linijama. To izlazi odatle, što svakom točkom plohe prolaze barem dvije ravnine parova izvodnica, koje se sijeku, ili ravnina dvostruke izvodnice, odnosno dvostrukog pravca (VIII. vrsta). Svih čunjosječnica na takvim plohama imade ∞^1. Projiciramo li sve čunjosječnice plohe iz jedne točke neke izvodnice na neku ravninu prostora paralelnu s tom izvodnicom, imat će projekcije tih čunjosječnica jednu realnu točku u beskonačnosti zajedničku. Kada beskonačno daleki pravac siječe projekciju svake čunjosječnice u jednoj realnoj točki, mora i druga biti realna, dakle su projekcije svih čunjosječnica hiperbole, kojima je jedna asimptota paralelna s izvodnicom centra projiciranja.

Iz točke na torzalnom pravcu projiciraju se čunjosječnice, na ravnine paralelne s pripadnom torzalnom ravninom, u sistem od ∞^1 usporednih parabola. Te su parabole usporedne s istog razloga kao kod pravčastih ploha 3. reda.

III. Projekcije čunjosječnica pravčastih ploha 3. i 4. reda iz točaka dvostruke linije.

1. Pravčaste plohe 3. reda.

a) Centar projiciranja na dvostrukom pravcu s realnim izvodnicama.

U prošlom smo poglavlju odabirali centar projiciranja u bilo kojoj točki naših ploha. U ovom poglavlju odabrat ćemo centar projiciranja na višestrukoj liniji tih ploha, i to najprije na pravčastim plohama 3. reda.

Na dvostrukom pravcu d pravčaste plohe 3. reda odaberimo neku točku S tako, da njome prolaze dvije realne izvodnice i_1, i_2. U prostoru pak postavimo neku ravninu α paralelnu s ravninom izvodnica i_1, i_2. Svaka čunjosječnica plohe siječe

---

[11] Müller-Krames: ibid., str. 189—190.

izvodnice i_1, i_2 u jednoj točki, dok ih čunjosječnice svezaka njihovih tangencijalnih ravnina sijeku dva puta.

Centralna projekcija izvodnica i_1, i_2 iz točke S na ravninu α bit će u beskonačno dalekim probodištima tih izvodnica s tom ravninom, a tim beskonačno dalekim točkama ravnine α prolazit će centralne projekcije svih čunjosječnica plohe, jer te čunjosječnice sijeku izvodnice i_1, i_2. Projekcije čunjosječnica plohe iz točke S na ravninu α bit će dakle homotetične hiperbole, jer sijeku beskonačno daleki pravac te ravnine u istim točkama. Možemo prema tome izreći ovaj stavak:

Centralna projekcija svih čunjosječnica pravčaste plohe 3. reda iz točke dvostrukog pravca, kojom idu dvije realne izvodnice, na ravninu paralelnu s tim izvodnicama, bit će homotetične hiperbole, čije su asimptote usporedne s tim izvodnicama.

Projekcije čunjosječnica u tangencijalnim ravninama izvodnica i_1, i_2 bit će presječnice tih ravnina s ravninom α, a te su presječnice asimptote svih tih homotetičnih hiperbola u ravnini α. Svakom točkom izvodnice i_1 ili i_2 prolazi ∞^1 čunjosječnica plohe, a sve te čunjosječnice dodiruju u toj točki njenu tangencijalnu ravninu. Prema tome centralne projekcije tangenata svih čunjosječnica u tim točkama, iz točke S na ravninu α, padaju u presječnicu te dirne ravnine s ravninom α. Dakle je ta presječnica asimptota projekcije svih ovih ∞^1 čunjosječnica plohe.

Svih ∞^2 homotetičnih hiperbola u ravnini α prolazi probodištem D dvostrukog pravca d s tom ravninom, jer sve čunjosječnice plohe sijeku njen dvostruki pravac. Onih ∞^1 čunjosječnica, koje se nalaze u svesku tangencijalnih ravnina neke izvodnice l_1, sijeku dvostruki pravac d u točki $L = l_1 \times d$, a sve te čunjosječnice tangiraju u toj točki ravninu pravca d i izvodnice l_2, koja također prolazi točkom L. Tangente svih tih čunjosječnica u točki L projiciraju se iz točke S na ravninu α u njenu presječnicu s ravninom (dl_2), dakle će se tih ∞^1 čunjosječnica izvodnice l_1 projicirati na ravninu α u pramen homotetičnih hiperbola. Taj je pramen određen točkom D, presječnicom ravnine (dl_2) kao zajedničkom tangentom i poznatim dvjema beskonačno dalekim točkama. Svakoj izvodnici plohe odgovara jedna takva presječnica u točki D, dakle i jedan takav pramen hiperbola, a svi takvi pramenovi određeni su pramenom pravaca točke D.

Projekcije onih ∞^1 čunjosječnica, koje prolaze jednom točkom izvodnice i_1 ili i_2, dat će u ravnini α pramen homotetičnih hiperbola s jednom zajedničkom asimptotom. Te hiperbole prolaze opet točkom D, a zajednička asimptota paralelna im je s izvodnicom i_1, odnosno i_2.

Znademo, da sve čunjosječnice pravčaste plohe 3. reda sijeku njen dvostruki pravac. Odaberemo li u prostoru neku ravninu β paralelnu s ravninom izvodnice i_1 i dvostrukog pravca

d, bit će centralne projekcije svih čunjosječnica iz točke S na tu ravninu opet homotetične hiperbole, jer prolaze beskonačno dalekim probodištima pravaca i_1 i d s ravninom β. Sve te hiperbole prolaze i probodištem I_2 izvodnice i_2 s ravninom β, jer sve čunjosječnice sijeku i tu izvodnicu. Čunjosječnice sveska tangencijalnih ravnina neke izvodnice l_1 projiciraju se iz točke S na ravninu β u pramen homotetičnih hiperbola s jednom zajedničkom asimptotom. Ova asimptota je presječnica ravnine β s ravninom pravaca $(l_2\, d)$, jer se u nju projiciraju tangente svih čunjosječnica izvodnice l_1 u točki $L = l_1 \times l_2 \times d$. Taj pramen određen je s tri beskonačno daleke točke ravnine β i njenim probodištem I_2 s izvodnicom i_2. Isto takav pramen dobili bismo, ako bismo projicirali onih ∞^1 čunjosječnica, koje prolaze jednom točkom izvodnice i_1.

Postavimo li u prostoru neku ravninu γ paralelnu s ravninom pravaca i_2, d, tada za nju vrijedi sve isto kao za ravninu β. Možemo prema tome napisati i ovaj stavak:

Za svaku točku dvostrukog pravca pravčaste plohe 3. reda, kojom prolaze dvije realne izvodnice, postoje u prostoru tri sveska paralelnih ravnina, na koje će se čunjosječnice te plohe projicirati iz te točke u homotetične hiperbole.

b) Centar projiciranja u kuspidalnoj točki.

Naša pravčasta ploha 3. reda neka ima realne kuspidalne točke K_1, K_2 s torzalnim pravcima t_1 i t_2 i torzalnim ravninama τ_1 i τ_2. Pomaknimo sada centar projiciranja S u kuspidalnu točku K_1, a ravninu α u prostoru postavimo paralelno s njenom torzalnom ravninom τ_1. Projiciramo li sve čunjosječnice plohe iz točke $S = K_1$ na ravninu α, dobit ćemo u toj ravnini ∞^2 usporednih parabola, jer sve čunjosječnice plohe tangiraju ravninu τ_1 duž torzalnog pravca t_1, a sva se ta dirališta projiciraju u njegovo beskonačno daleko probodište s ravninom α. U toj točki tangira beskonačno daleki pravac ravnine α sve te parabole u toj ravnini. Sve te homotetične parabole u ravnini α prolaze opet probodištem D dvostrukog pravca d s tom ravninom, a čunjosječnice sveska tangencijalnih ravnina neke izvodnice l_1 projiciraju se opet u pramen paralelnih parabola, koje u točki D tangiraju presječnicu ravnine α s ravninom (dl_2).

Time što smo točku S pomaknuli u kuspidalnu točku K_1, stegnule su se izvodnice i_1 i_2 u torzalan pravac t_1, a time su se stegnuli i poznati svesci β_u i γ_u ravnina u jedan svezak paralelnih ravnina s ravninom (dt_1).

Projiciramo li opet sve čunjosječnice plohe iz točke K_1 na ravninu δ paralelnu s ravninom (dt_1), bit će projekcije tih čunjosječnica homotetične hiperbole, jer te projekcije prolaze realnim beskonačno dalekim probodištima pravaca d i t_1 s ravninom δ. Svih ∞^2 hiperbola u toj ravnini imadu jednu zajedničku asimptotu, koju daje njena presječnica s ravninom τ_1, jer sve čunjosječnice plohe diraju tu ravninu duž njena torzalnog pravca t_1, s kojim je ta asimptota paralelna. Ostale asimptote paralelne su s dvostrukim pravcem d, a projekcije čunjosječnica sveska tangencijalnih ravnina neke izvodnice l_1 imat će i drugu asimptotu zajedničku, koju daje opet presječnica ravnine δ s ravninom (dl_2). Projekcije čunjosječnica sveska tangencijalnih ravnina neke izvodnice daju dakle u ravnini δ pramen homotetičnih i koncentričnih hiperbola, jer je taj pramen određen dvjema beskonačno dalekim točkama i njihovim tangentama. U ovakvu slučaju možemo prema tome izreći ovaj stavak:

Čunjosječnice pravčaste plohe 3. reda možemo iz njene kuspidalne točke projicirati na dva sveska usporednih ravnina kao homotetične čunjosječnice. Na jedan svezak projiciraju se te čunjosječnice kao paralelne parabole, dok se na drugi svezak projiciraju u homotetične hiperbole s jednom zajedničkom asimptotom, dakle u ∞^1 pramenova takvih koncentričnih hiperbola.

c) Centar projiciranja na izoliranom dijelu dvostrukog pravca.

Pomaknimo konačno naš centar projiciranja S iz kuspidalne točke K na izolirani dio dvostrukog pravca. Točkom S prolazi sada par konjugirano kompleksnih izvodnica u ravnini jednostrukog pravca plohe i točke S, a one se mogu uzeti kao dvostruke zrake poznatog eliptično-involutornog pramena. Taj eliptično-involutorni pramen označimo s λ, a u prostoru postavimo opet kao i prije ravninu α paralelno s ravninom imaginarnih izvodnica točke S. Ravnina svake čunjosječnice siječe pramen λ u eliptično-involutornom nizu točaka, a taj će biti niz konjugiranih polova obzirom na presječnu čunjosječnicu. Ovakvi nizovi svih čunjosječnica u ravnini pramena λ projiciraju se iz točke S na ravninu α u jedan zajednički eliptično-involutorni niz točaka beskonačno dalekog pravca te ravnine, t. j. u presjek pramena λ s ravninom α.

Projiciramo li sve čunjosječnice plohe iz točke S na ravninu α, imat će sve te projekcije na beskonačno dalekom pravcu istu involuciju konjugiranih polova, t. j. one sijeku taj pravac u iste dvije imaginarne točke, a to znači, da su projekcije svih tih čunjosječnica u ravnini α homotetične elipse.[12] Sve te elipse prolazit će opet probodištem D dvostrukog pravca d s ravninom α, imade ih ∞^2, a određene su točkom D i poznatim imaginarnim beskonačno dalekim točkama.

Čunjosječnice sveska tangencijalnih ravnina neke izvodnice l_1 projicirat će se opet u pramen homotetičnih elipsa, a taj će pramen biti određen presječnicom ravnina α i (dl_2) kao tangentom i točkom D kao diralištem.

Budući da točkom S prolazi par imaginarnih izvodnica, to su imaginarni i svesci usporednih ravnina β_u i γ_u, pa možemo izreći ovaj stavak:

[12] Salmon-Fiedler: ibid., str. 413–414.

Čunjosječnice pravčaste plohe 3. reda možemo projicirati iz neke točke dvostrukog pravca na izoliranom dijelu u homotetične elipse samo na one ravnine prostora, koje su paralelne s ravninom imaginarnih izvodnica centra projiciranja.

Da su projekcije svih čunjosječnica plohe iz točke S na ravninu α homotetične elipse, možemo pokazati još i na ovaj način: Odaberimo na plosi onaj par izvodnica i_1 i_2, koje dvostruki pravac sijeku u točki I, a ta točka s točkom S i s kuspidalnim točkama K_1, K_2 stoji u harmonijskom dvoomjeru $(SIK_1 K_2) = -1$. Torzalne ravnine τ_1 i τ_2, ravnina ε izvodnica i_1 i_2 i ravnina n sveska λ, odnosno para imaginarnih izvodnica točke S, stoje također u harmonijskom dvoomjeru $(\tau_1 \tau_2 n \varepsilon) = -1$, s jednostrukim pravcem kao osovinom. Svaka čunjosječnica plohe siječe izvodnice i_1, i_2 kao i torzalne pravce t_1 i t_2, recimo u točkama A_1 A_2 i B_1 B_2. Projicirajmo sada iz točke S na ravninu α izvodnice i_1, i_2 u pravce i_1^α, i_2^α, torzalne pravce t_1, t_2 u pravce t_1^α, t_2^α, a zajedno s njima i točke A_1, A_2, B_1 i B_2 svake čunjosječnice u točke A_1^α, A_2^α, B^α_1 i B_2^α. Budući da se jednostruki pravac plohe projicira u beskonačno daleki pravac ravnine α, izlazi iz gornjih harmonijskih dvoomjera, da će spojnice točaka A_1^α, A_2^α i B_1^α, B_2^α biti par konjugiranih dijametara projekcije svake čunjosječnice. Točke A_1^α, A_2^α, B_1^α i B_2^α nalaze se na pravcima i_1^α, i_2^α, t_1^α i t_2^α, koji prolaze točkom D, a stoje u harmonijskom dvoomjeru $(t_1^\alpha\, t_2^\alpha\, i_1^\alpha\, i_2^\alpha) = -1$, radi poznate involucije na jednostrukom pravcu plohe[13]. Ove pravce zajedno s parovima konjugiranih dijametara $A_1^\alpha\, A^\alpha_2$ i $B_1^\alpha\, B_2^\alpha$, odnosno čitavim elipsama, preslikajmo afino na neku ravninu β tako, da kod harmonijskih zraka $(t_1^\beta\, t_2^\beta\, i_1^\beta\, i_2^\beta) = -1$ bude $t_1^\beta \perp t_2^\beta$ i $i_1^\beta \perp i_2^\beta$. U tom slučaju dijametri $A_1^\beta\, A_2^\beta$, $B_1^\beta\, B_2^\beta$, osim što ostaju dijametri, postaju još jednako veliki i međusobno okomiti. Dakle sve elipse ravnine preslikale su se afino u ravninu β kao kružnice, a odavle direktno izlazi da su sve elipse u ravnini α homotetične.

d) Cayleyeve plohe.

Obje kuspidalne točke kao i torzalne ravnine stežu se kod ovih ploha u jednu, a isto tako i torzalni pravci stežu se u dvostruki pravac kojim prolazi torzalna ravnina. Svakom točkom dvostrukog pravca ovih ploha prolazi dakle torzalan pravac i još jedna izvodnica. Za neki centar projiciranja S na dvostrukom pravcu ovih ploha postoje dva sveska paralelnih ravnina α_u i β_u, na koje će se čunjosječnice plohe projicirati iz te točke kao homotetične. Budući da na dvostrukom pravcu nema izoliranih točaka, mogu projekcije čunjosječnica na ravninama α_u i β_u biti samo hiperbole ili parabole. Sve čunjosječnice plohe tangiraju torzalnu ravninu duž dvostrukog pravca, dakle će

[13] E. Weyr: Geom. d. räum. Erzeugnisse ein-zweideutiger Gebilde insb. d. Regelflächen dritter Ordnung, str. 20.

jedan svezak (β_u) tih paralelnih ravnina biti paralelan s torzalnom ravninom plohe. Sve čunjosječnice plohe projicirat će se iz točke S na neku ravninu β kao paralelne parabole, jer će projekcije svih čunjosječnica tangirati beskonačno daleki pravac te ravnine u probodištu dvostrukog pravca s tom ravninom. Sve te parabole u ravnini β prolaze probodištem I te ravnine s izvodnicom i, koja ide točkom S.

Ravnine drugog sveska (α_u) paralelne su s dvostrukim pravcem d plohe i izvodnicom i. Sve čunjosječnice plohe sijeku oba ta pravca, a njihove zajedničke točke projicirat će se iz točke S na neku ravninu α u beskonačno daleka probodišta tih pravaca s tom ravninom. Projekcije čunjosječnica sijeku dakle beskonačno daleki pravac ravnine α u iste dvije realne točke, a prema tome su te projekcije homotetične hiperbole. Sve hiperbole u ravnini α imat će jednu zajedničku asimptotu, jer sve čunjosječnice plohe tangiraju torzalnu ravninu duž dvostrukog pravca. Ova asimptota nastaje kao presječnica torzalne ravnine s ravninom α, a paralelna je s dvostrukim pravcem. Ostale asimptote paralelne su s izvodnicom i, dakle u ravnini α imademo ∞^1 pramenova homotetičnih i koncentričnih hiperbola. Ovih ∞^1 pramenova možemo uzeti kao da su nastali iz jednoga, ako njegovu asimptotu pomičemo samu u sebi. Svaki pramen takvih koncentričnih hiperbola daje ona skupina od ∞^1 čunjosječnica plohe, koje prolaze jednom točkom izvodnice i. U ravnini α imademo istu sliku, kao da smo iz kuspidalne točke pravčaste ploke 3. reda projicirali njene čunjosječnice u ravninu paralelnu s dvostrukim i torzalnim pravcem te točke. Za Cayleyeve plohe vrijedi dakle ovo:

Svakoj točki dvostrukog pravca Cayleyeve plohe pridružena su dva sveska paralelnih ravnina, na koje će se čunjosječnice plohe projicirati iz tih točaka kao homotetične hiperbole ili parabole. Hiperbole u ravninama prvog sveska nalaze se u ∞^1 pramenova koncentričnih hiperbola s jednom zajedničkom asimptotom, dok parabole u ravninama drugog sveska prolaze jednom točkom.

Pomaknimo centar projiciranja S u kuspidalnu točku K. Izvodnica i povlači se time u dvostruki pravac, a zajedno s njome povlači se i svezak ravnina α_u u svezak β_u. Dakle za centar projiciranja u kuspidalnoj točki postoji samo jedan svezak paralelnih ravnina, na koje će se čunjosječnice plohe projicirati kao homotetične. Taj svezak identičan je sa sveskom β_u, dakle su projekcije svih čunjosječnica na tim ravninama paralelne parabole. Poznato probodište I odlazi nam ovdje također u beskonačnost, dakle sve parabole neke ravnine β imaju tri točke zajedničke u svojoj beskonačno dalekoj točki, t. j. one se u toj točki oskuliraju. Čunjosječnice sveska tangencijalnih ravnina svake izvodnice daju u ravnini β pramen parabola, koje se hiperoskuliraju. Možemo dakle napisati:

Sve čunjosječnice Cayleyevih ploha, projicirane iz njihovih kuspidalnih točaka na ravninu paralelnu s torzalnom, daju u toj ravnini ∞^1 pramenova parabola, koje se hiperoskuliraju u svojoj zajedničkoj beskonačno dalekoj točki, a sve parabole oskulraju se u istoj točki.

2. Pravčaste plohe 4. reda.

a) Plohe III. vrste.

Svaka pravčasta ploha 4. reda III. vrste nalazi se u kongruenciji bisekanata neke kubne čunjosječnice k (I. reda 3. razreda). Ta kubna čunjosječnica je dvostruka linija plohe, a svakom njenom točkom prolazi par realnih ili imaginarnih izvodnica, ili torzalan pravac. (Vidi naprijed). U ravnini svakog para izvodnica nalazi se po jedna čunjosječnica, dakle svih čunjosječnica na plosi imade ∞.^{1}

Odaberimo na kubnoj čunjosječnici neke pravčaste plohe 4. reda III. vrste po volji točku S opet kao centar projiciranja. Poznatu ravninu α postavimo opet paralelno s ravninom para izvodnica centra projiciranja. Znademo, da svaki par izvodnica možemo uzeti kao dvostruke zrake hiperboličnog, eliptičnog ili paraboličnog involutornog pramena konjugiranih dijametara stošca kubne ravnalice i stošca još jedne čunjosječnice plohe, kojima je zajednički vrh u presječnoj točki tog para izvodnica. Svaka čunjosječnica plohe siječe svaku njenu izvodnicu, a svaku tu čunjosječnicu možemo uzeti kao ravnalicu-čunjosječnicu plohe uz ravnalicu k. Prema tome ravnina svake čunjosječnice plohe siječe involutoran pramen izvodnica točke S u involutornom nizu konjugiranih polova te čunjosječnice. Nizovi konjugiranih polova svih čunjosječnica plohe u ravnini izvodnica točke S projiciraju se iz te točke na ravninu α u isti involutoran niz beskonačno dalekog pravca te ravnine. Budući da projekcije svih čunjosječnica plohe iz točke S na ravninu α prolaze dvostrukim točkama tog beskonačno dalekog involutornog niza, izlazi, da su projekcije tih čunjosječnica homotetične čunjosječnice. Prema tome, da li je ta involucija hiperbolična, eliptična ili parabolična, bit će te projekcije homotetične hiperbole, elipse ili parabole.

Izvodnice plohe u točki S jesu dvostruke zrake involutornog pramena konjugiranih dijametara u njihovoj ravnini, obzirom na stožac bisekanata kubne čunjosječnice k u točki S. Odavle izlazi, da su projekcije svih čunjosječnica u ravnini α homotetične s presjekom tog stošca i ravnine α.

U ravnini svakog para izvodnica nalazi se po jedna čunjosječnica plohe.[14] Ako su izvodnice realne, siječe ta čunjosječnica dvostruku kubnu čunjosječnicu k u istim točkama kao i te izvodnice. Ako su pak izvodnice imaginarne, čunjosječnica

[14] K. Rohn-E. Papperitz: Lehrb. der darst. Geometrie, Bd. III, str. 252.

ostaje realna, a kubnu ravnalicu siječe u imaginarnim točkama. Čunjosječnica torzalne ravnine tangira dvostruku kubnu ravnalicu u njenoj zajedničkoj točki s torzalnim pravcem te ravnine, ali ne u kuspidalnoj točki.

Ravnine parova izvodnica, odnosno čunjosječnica pravčaste plohe IV. reda III. vrste omataju developablu plohu 3. razreda 4. reda (torza), a sve presječnice tih ravnina čine kongruenciju zraka te torze[15]. Ako ta kongruencija ima beskonačno daleku zraku (ali ne i ravninu), onda su tom zrakom određene u konačnosti dvije paralelne ravnine. Dakle dvije točke S_1 i S_2 dvostruke kubne čunjosječnice k imat će tada zajednički svezak paralelnih ravnina α_u. Projiciramo li sve čunjosječnice plohe iz točke S_1 na jednu ravninu α, bit će sve te projekcije homotetične, a s njima mora biti homotetična čunjosječnica ravnine izvodnica točke S_2, jer je ta ravnina paralelna s ravninom α. Isto vrijedi i za točku S_2, a prema tome vrijedi i ovo:

Oblik čunjosječnica pravčaste plohe 4. reda III. vrste, u dvije paralelne ravnine parova izvodnica, određen je na ovaj način: Involutornim pramenom zraka para izvodnica u prvoj ravnini određen je oblik čunjosječnica u drugoj tako, da su parovi zraka tog involutornog pramena paralelni s parovima konjugiranih dijametara čunjosječnica u drugoj ravnini i obratno.

Na pravčastoj plosi 4. reda III. vrste može postojati najviše jedan par takvih paralelnih ravnina. Kazali smo, da u takovu slučaju kongruencija torze ravnina parova izvodnica ima jednu beskonačnu daleku zraku. Kad bi se u beskonačno dalekoj ravnini nalazila još jedna zraka te kongruencije, onda bi čitava ta ravnina pripadala u torzu, t. j. ploha bi imala u njoj jedan par izvodnica i čunjosječnicu. Zrake kongruencije torze omatale bi u njoj neku čunjosječnicu, a svakom tom zrakom prolazi u konačnosti jedna ravnina, jer se u svakoj zraci kongruencije torze sijeku samo dvije njene ravnine. Dakle dvije paralelne ravnine parova izvodnica mogu postojati samo na takvim pravčastim plohama 4. reda III. vrste, koje u beskonačnoj ravnini nemaju čunjosječnicu i par izvodnica.

Pogledat ćemo sada, kako izgleda sistem c_α homotetičnih čunjosječnica u ravnini α, u koji se projiciraju čunjosječnice naše plohe. Odaberimo na plosi po volji par izvodnica a, b u ravnini ε. Osi kongruencije torze omataju u svakoj njenoj ravnini čunjosječnicu, jer torza je anvelopa oskulacionih ravnina neke kubne čunjosječnice[16]. Presječnice l_i ravnina čunjosječnica plohe omataju dakle u ravnini ε neku čunjosječnicu c. Među presječnice l_i idu također izvodnice a i b, jer su one presječnice ravnine ε s ravninama onih čunjosječnica, koji dvostruku kubnu čunjosječnicu sijeku u istoj točki, gdje i izvodnice a i b. Budući da svaka čunjosječnica plohe siječe svaku nje-

[15] Müller-Krames: ibid., str. 254.
[16] K. Rohn-E. Papperitz: ibid., str. 253.

govu izvodnicu, izlazi, da čunjosječnicu plohe sijeku izvodnice a, b u onim točkama, gdje ih sijeku pravci l_i. Projiciramo li sve to iz točke S na ravninu α, dobit ćemo u toj ravnini parabolu c^α i njene tangente a^α i b^α, a presječnim točkama svake tangente parabole c^α s pravcima a^α i b^α prolazi projekcija jedne čunjosječnice plohe. Čunjosječnica c^α je parabola radi toga, jer čunjosječnica c u ravnini ε tangira i ravninu izvodnica točke S.

Svaka čunjosječnica sistema c_α u ravnini α određena je do sada poznatim dvjema beskonačno dalekim točkama i dvjema presječnim točkama tangente parabole c^α s pravcima a^α i b^α. Dakle svega sa četiri točke za svaku čunjosječnicu. Potražit ćemo još sva središta tih čunjosječnica.

Presječemo li ravninu α s ravninom realnih ili imagiranih tangenata čunjosječnica plohe u točki S, tada se na toj presječnici nalaze središta svih čunjosječnica sistema c_α. Dokazat ćemo to na ovaj način: Čunjosječnice plohe sijeku izvodnice i_1, i_2 točke S u dva projektivna niza[17]. Točke izvodnice projektivne su s sveskom njenih tangencijalnih ravnina, dakle možemo izvodnice i_1, i_2 uzeti kao nosioce dvaju projektivno pridruženih svezaka ravnina. Jer se izvodnike i_1, i_2 sijeku u točki S, morao bi produkt tih dvaju svezaka biti stožac 2. reda. Ali u ravnini izvodnica i_1, i_2 nalazi se i čunjosječnica plohe, koja te izvodnice, osim u preostale dvije njihove zajedničke točke sa kubnom čunjosječnicom, siječe još u dvije točke. Ovim posljednjim dvjema točkama pridružena je u svesku tangencijalnih ravnina jedne i druge izvodnice ravnina tih izvodnica, dakle se navedeni stožac reducira na ovu ravninu i još jednu, koju označimo recimo s ω. Svaka čunjosječnica plohe siječe ravninu izvodnica i_1, i_2 u nekom pravcu l, a taj pravac uzmimo kao njegovu polaru. Projekcija pola L polare l iz točke S na ravninu α bit će središte projekcije njihove čunjosječnice, jer se polara l projicira u beskonačno daleki pravac ravnine α. Takvi polovi L_i svih čunjosječnica plohe nalaze se u ravnini ω, dakle će i središta projekcija svih čunjosječnica na ravnini α biti u njenoj presječnici s ravninom α, t. j. na nekom pravcu. Presječnice pridruženih ravnina projektivnih svezaka izvodnica i_1, i_2 u njihovoj zajedničkoj točki S bit će tangente čunjosječnica, koje prolaze tom točkom, jer se ravnine tih čunjosječnica nalaze u tim svescima. Tangente čunjosječnica plohe u točki S jesu dakle izvodnice našeg reduciranog stošca, t. j. nalaze se ili u ravnini izvodnica i_1, i_2 ili u ravnini ω. U ravnini izvodnica ne mogu se nalaziti, jer bi se u tom slučaju nalazilo u toj ravnini više čunjosječnica, prema tome se nalaze u ravnini ω, a njima je ta ravnina i određena.

Sistem čunjosječnica c_α određen je dakle sada posve u ravnini α, i to dvjema beskonačno dalekim točkama, parabolom

[17] Müller-Krames: ibid., str. 254.

c^{α} i njenim tangentama a^{α} i b^{α} i našim pravcem s, na kojem se nalaze središta svih projiciranih čunjosječnica.

Projiciramo li iz točke S na ravninu α sve izvodnice plohe, omatat će njihove projekcije u toj ravnini neku čunjosječnicu[18] g. Poznato je, da svakom točkom svake izvodnice plohe prolazi jedna njena čunjosječnica, dakle će projekcije svih čunjosječnica u ravnini α također omatati čunjosječnicu g. Zajedničke točke N^{α} tih čunjosječnica s čunjosječnicom g projekcije su dirališta N ravnina točke S i onih izvodnica n, čija projekcija n^{α} prolazi tom zajedničkom točkom N^{α}, a dira u njoj čunjosječnicu g. Čunjosječnica, koja tangira čunjosječnicu g u točki N^{α}, projekcija je dakako one čunjosječnice plohe, koja prolazi točkom N.

Ako nam je poznata čunjosječnica g i pravac s u ravnini α, tada je uz poznate beskonačno daleke točke naš sistem homotetičnih čunjosječnica opet posve određen. Točkom G čunjosječnice g prolazi jedna čunjosječnica sistema c_{α}, a te dvije čunjosječnice neka imaju zajedničku tangentu t. Ova tangenta siječe beskonačno daleki pravac ravnine α u jednoj točki njegova involutornog niza, a na spojnici konjugirane točke ove involucije s točkom G nalazi se središte te naše čunjosječnice. Jer se to središte nalazi i na pravcu s, lako se može odrediti. Vidimo dakle, da je naš sistem zaista posve određen.

Svaki pravac točke S probada plohu u još dvije realne ili imaginarne točke. Pravci s realnim probodištima plohe probadaju ravninu α izvan čunjosječnice g, a oni s imaginarnim iznutra. Odavle slijedi, da svakom točkom ravnine α izvan čunjosječnice g prolaze dvije čunjosječnice sistema c_{α}. Usporedimo li ovaj sistem s onim kod projiciranja čunjosječnica ploha 3. reda iz jedne njene točke vidjet ćemo, da su oni istovrsni, jer su zadani istim elementima. Možemo dakle napisati i ovaj stavak:

Čunjosječnice pravčaste plohe 4. reda III. vrste, projicirani iz jedne točke njene dvostruke linije s realnim izvodnicama, daju u toj ravnini isto takav sistem sa ∞^1 homotetičnih hiperbola, kao da smo projicirali čunjosječnice sveska dirnih ravnina neke izvodnice pravčaste plohe 3. reda iz jedne točke njene plohe, i to na neku ravninu paralelnu s izvodnicom te točke.

Stožac bisekanata kubne ravnalice k u točki S siječe ravnina α u čunjosječnici r, koja je homotetična s čunjosječnicama sistema c_{α}. U svaku točku te čunjosječnice r projicira se iz točke S po jedna točka ravnalice k. Sama točka S projicira se u neku točku F, a ta nastaje kao probodište tangente kubne ravnalice k u točki S s ravninom α. Polara pola F obzirom na čunjosječnicu g bit će pravac s, na kojemu se nalaze središta svih čunjosječnica sistema c_{α}. To ćemo dokazati ovako:

Čunjosječnice c_1, c_2 točke S nalaze se u ravninama izvodnica i_1, i_2, a svaka ih izvodnica plohe siječe. Već smo malo

[18] Müller-Krames: ibid., str. 254.

prije kazali, da su dirališta projekcija izvodnica s čunjosječnicom g projekcije dirališta onih tangencijalnih ravnina tih izvodnica na plosi, koje prolaze točkom S. Takva dirališta bila bi na čunjosječnici c_1 onda, ako bi tangenta te čunjosječnice u takvu diralištu prolazila točkom S. Osim točke S nema više nijedne takve točke, a u toj točki siječe čunjosječnicu c_1 izvodnica i_2. U ravnini izvodnice i_2 i tangente čunjosječnice c_1 u točki S nalazi se i tangenta kubne ravnalice k u toj točki, dakle će dirališe projekcije izvodnice i_2 s čunjosječnicom g biti u probodištu tangente čunjosječnice c_1 u točki S s ravninom α. Analogno vrijedi i za izvodnicu i_1, a time je i naša tvrdnja dokazana.

Za pravčaste plohe 4. reda ove vrste vrijedi dakle ovaj stavak:

Čunjosječnice pravčaste plohe 4. reda III. vrste, projicirane iz jedne točke njihove dvostruke linije na ravninu paralelnu s ravninom izvodnica te točke, daju u toj ravnini sistem homotetičnih čunjosječnica, koje omataju presječnu čunjosječnicu te ravnine sa stošcem 2. reda opisanim toj plosi iz centra projiciranja. Središta svih čunjosječnica toga sistema nalaze se u polari te presječne čunjosječnice uzevši probodište njene ravnine s tangentom dvostruke linije u centru projiciranja kao pol.

b) Developabla ploha 4. reda.

Specijalan položaj među pravčastim plohama 4. reda III. vrste ima developabla ploha 4. reda. Izvodnice ove plohe sačinjavaju tangente kubne ravnalice, a možemo ih uzeti, kao da su po dvije izvodnice prvašnjih ploha pale u jednu i prešle u tangente ravnalice. Duž svake izvodnice ove plohe postoji samo jedna tangencijalna ravnina, dakle je čitava ta ploha sastavljena od samih torzalnih pravaca, čije su torzalne ravnine oskulacione ravnine ravnalice. Kubna ravnalica te plohe je njegova kuspidalna linija, jer je sastavljena od samih kuspidalnih točaka.

Uzmemo li prema tome centar projiciranja S na ravnalici, a ravninu α paralelno s njenom oskulacionom ravninom u točki S, morat će prema ranijemu projekcije čunjosječnica ove plohe na tu ravninu biti usporedne parabole. U svakoj oskulacionoj ravnini kubne ravnalice nalazi se jedna čunjosječnica plohe. Svaka čunjosječnica tangira svaku oskulacionu ravninu u njegovoj zajedničkoj točki s izvodnicama tih ravnina, jer čunjosječnice svake oskulacione ravnine nastaju kao envelope njenih presječnica sa svim ostalim oskulacionim ravninama[19]. Dakle svaka čunjosječnica plohe tangira oskulacionu ravninu centra projiciranja S duž tangente ravnalice u toj točki, t. j. duž njene izvodnice plohe. Odavle odmah slijedi, da su projekcije čunjosječnica plohe iz točke S na ravninu α usporedne parabole.

Čunjosječnice plohe tangiraju izvodnicu svoje ravnine u njenoj zajedničkoj točki s kubnom ravnalicom. Odavle direktno

[19] K. Rohn-E. Papperitz: ibid., str. 253

izlazi, da paralelne parabole ravnine α omataju presječnu čunjosječnicu te ravnine sa stošcem bisekanata kubne ravnalice u točki S. Označimo tu čunjosječnicu opet s g. Posve analogno kao prije prolaze svakom točkom ravnine α izvan čunjosječnice g po dvije paralelne parabole. Čunjosječnica g u ravnini α također je parabola, paralelna s ostalim parabolama te ravnine, jer se centar projiciranja S projicira na ravninu α u zajedničku tangencijalnu beskonačno daleku točku tih parabola.

c) Plohe V. vrste.

Raspadne li se dvostruka linija pravčastih ploha 4. reda III. vrste u čunjosječnicu i pravac, tada te plohe prelaze u one V. vrste. Čunjosječnice tih ploha nalaze se samo u ravninama onih parova izvodnica, koje se sijeku u pravcu dvostruke linije. U ravninama onih parova, koji se sijeku u čunjosječnici dvostruke linije, nalazi se pravac dvostruke linije.

Pogledat ćemo sada, kako izgleda i čime je određen sistem homotetičnih čunjosječnica na ravnini α, kad na nju projiciramo čunjosječnice plohe iz pripadnog centra S. Odaberimo centar projiciranja S na čunjosječnici dvostruke linije, a tom točkom neka prolazi par izvodnica i_1, i_2. Ravnina svake čunjosječnice siječe ravninu izvodnica i_1, i_2 u nekom pravcu, čiji pol obzirom na tu čunjosječnicu, projiciran iz točke S na ravninu α, daje središte projekcije te čunjosječnice. Posve analogno kao kod ploha III. vrste, nalaze se svi takvi polovi u ravnini tangenata čunjosječnica plohe u točki S. Dakle se i središta svih projekcija čunjosječnica na ravnini α nalaze na jednom pravcu, t. j. u presječnici te ravnine s ravninom α. Označimo taj pravac opet sa s. Projekcije izvodnica plohe iz točke S na ravninu α omatat će opet neku čunjosječnicu g, a isto će ju tako omatati projekcije svih čunjosječnica na tu ravninu. Projekcija i^{α} neke izvodnice i neka tangira čunjosječnicu g u točki N^{α}. Točkom N izvodnice i na plohi prolazi jedna njena čunjosječnica, čija će projekcija također tangirati g u točki N^{α}. Ovdje bismo mogli pokazati isto tako kao kod ploha III. vrste, da je pravac s polara probodišta tangente dvostruke čunjosječnice u točki S obzirom na čunjosječnicu g. Dakle čunjosječnice naše plohe projiciraju se na ravninu α u sistem sa ∞^1 homotetičnih čunjosječnica, a taj je određen čunjosječnicom g, pravcem s i dvjema beskonačno dalekim točkama. Svakom točkom ravnine α, izvan čunjosječnice g, prolaze opet dvije čunjosječnice tog sistema.

Taj sistem možemo odrediti još i na ovaj način: Developabla ploha ravnina parova izvodnica, ili torza te plohe, raspada se u ovom slučaju na stožac ili valjak i još jednu ravninu[20]. Iz ovoga odmah slijedi, da ravnine parova izvodica sijeku svaku takvu ravninu u pramenu pravaca, čiji se vrh nalazi u vrhu

[20] Müller-Krames: ibid., str. 259.

torze. Odaberimo na plosi neki par izvodnica a, b, pa ga projicirajmo zajedno s vrhom torze V na ravninu α u pravce a^α i b^α i točku V^α. Svaki pravac m točke V^α siječe pravce a^α i b^α u točkama M_1 i M_2, kojima prolazi projekcija jedne čunjosječnice plohe. Pravac m siječe beskonačno daleki pravac ravnine α u jednoj točki njegove poznate involucije. Spojimo li njegovu konjugiranu točku u toj involuciji s polovištem dužine $M_1 M_2$. Tada na toj spojnici leži središte čunjosječnice, koja prolazi točkama M_1 i M_2. Dakle sistem tih ∞^1 homotetičnih čunjosječnica u ravnini α određen je i pravcima a^α, b^α, s, točkom V^α i poznatim beskonačno dalekim točkama.

Iz naših razlaganja mogli smo vrlo lako zaključiti, ako je centar projiciranja na čunjosječnici dvostruke linije, onda u ravnini α vlada analogija s plohama III. vrste.

A sada odaberimo centar projiciranja na pravcu dvostruke linije. Sve izvodnice plohe projiciraju se iz te točke na pripadnu ravninu α u pramen pravaca, kojemu je centar probodište S^α dvostrukog pravca s tom ravninom. Dvije povoljne izvodnice plohe sijeku njene čunjosječnice u projektivnim nizovima, dok par izvodnica, koje se sijeku, sijeku oni u perspektivnim nizovima. Točke na dvostrukom pravcu daju uvijek par pridruženih točaka. Sve točke na dvostrukom pravcu padaju projekcijom iz točke S na ravninu α u njeno probodište s dvostrukim pravcem S^α, t. j. projekcije svih tih projektivnih i perspektivnih nizova na ravninu α postaju perspektivni nizovi. Odavde izlazi, da će projekcije čunjosječnica na ravninu α dati perspektivan pramen homotetičnih čunjosječnica, kojemu je centar perspektiviteta probodište S^α te ravnine s pravcem dvostruke linije. U svaku zraku točke S^α projiciraju se dvije izvodnice plohe, a to znači, da svakom točkom te zrake prolaze dvije čunjosječnice. Pravcem dvostruke linije prolazi par realnih ili imaginarnih torzalnih ravnina, a njih tangiraju sve čunjosječnice plohe. Projekcije čunjosječnica u ravnini α moraju dakle tangirati njene presječnice s tim torzalnim ravninama. Perspektivan pramen homotetičnih čunjosječnica u ravnini α određen je dakle parom realnih ili imaginarnih tangenata i parom realnih ili imaginarnih beskonačno dalekih točaka te ravnine. Za ovakve plohe možemo dakle napisati ovaj stavak:

Projekcije čunjosječnica pravčaste plohe 4. reda V. vrste iz neke točke pravca dvostruke linije na ravnine paralelne s ravninom izvodnica te točke daju perspektivan pramem homotetičnih čunjosječnica. Taj pramen određen je dvjema beskonačno dalekim točkama i jednim parom konačnih tangenata.

Spomenuli smo naprijed, da je torza ravnina parova izvodnica ovih ploha stožac ili valjak. Neka je ta torza valjak. Po dvije ravnine parova izvodnica bit će u tom slučaju paralelne. Svakom svesku paralelnih ravnina s ravninom para izvodnica bit će pridružena prema tome dva centra projiciranja, iz kojih će se čunjosječnice plohe projicirati kao homotetične na ravnine tog pramena. Odavle pak izlazi, da su u paru takvih paralelnih ravnina određene čunjosječnice po svojoj formi s involutornim pramenom zraka u suprotnoj ravnini, kojim pramenom su određene izvodnice plohe u toj ravnini kao njegovim dvostrukim zrakama.

Za ove plohe vrijede prema tome ovi stavci:

Involutoran pramen konjugiranih dijametara svake čunjosječnice pravčaste plohe 4. reda V. vrste, kojoj ravnine čunjosječnica omataju valjak, paralelan je s involutornim pramenom zraka, kojim su određene izvodnice ravnine paralelne s ravninom te čunjosječnice. Iz navedenoga zapravo izlazi i slijedeći stavak:

Projiciramo li čunjosječnice pravčaste plohe 4. reda V. vrste, kojoj ravnine čunjosječnica omataju valjak, iz jedne točke pravca dvostruke linije na ravninu paralelnu s izvodnicama te točke, dat će projekcije tih čunjosječnica u toj ravnini perspektivan pramen homotetičnih čunjosječnica s čunjosječnicom plohe u onoj ravnini, koja je paralelna s ravninom izvodnica centra projiciranja.

d) Plohe VII. vrste.

Pravčaste plohe ove vrste imaju na sebi opet ∞^1 čunjosječnica, ali se one ne nalaze više u ravninama parova izvodnica. Torza ravnina parova izvodnica i čunjosječnica raspada se ovdje u tri sveska ravnina. U ravninama svezaka dvostrukih pravaca nalaze se parovi izvodnica, dok se u ravninama sveska dvostruke izvodnice nalaze čunjosječnice. Čunjosječnice ovih ploha sijeku svaki par izvodnica u perspektivnim nizovima, a dvije povoljne izvodnice u projektivnim nizovima, i to tako, da su točke na dvostrukim pravcima uvijek međusobno pridružene. To izlazi odatle, što dvostruka izvodnica plohe siječe oba dvostruka pravca.

Odaberemo li opet neku točku S na dvostrukom pravcu, a ravninu α paralelnu s ravninom izvodnica te točke, bit će projekcije čunjosječnica plohe iz te točke na tu ravninu opet homotetične čunjosječnice. Sve izvodnice plohe projiciraju se u pramen pravaca, a perspektivni i projektivni nizovi na tim izvodnicama, što ih čine čunjosječnice plohe, projiciraju se u same perspektivne nizove. Odavle izlazi, da će se čunjosječnice plohe projicirati iz toke S na ravninu α u perspektivan pramen homotetičnih čunjosječnica. Dvostrukim pravcem točke S prolazi opet par realnih ili imaginiranih torzalnih ravnina. Budući da sve čunjosječnice plohe tangiraju te torzalne ravnine, moraju i projekcije tih čunjosječnica u ravnini α tangirati njene presječnice s tim torzalnim ravninama. Perspektivan pramen čunjosječnica u ravnini α određen je dakle sa dvije beskonačno daleke točke i parom tangenata u konačnosti. Čunjosječnice pramena mogu zapremiti jedan dio ili čitavu ravninu α, a to zavisi o tome, jesu li te tangente realne ili imaginarne.

Kod ovih ploha, kako vidimo, vlada analogija s onima V. vrste, ako im čunjosječnice projiciramo iz točke na pravcu dvostruke linije.

Imade slučajeva kod ovakvih ploha, gdje pramen homotetičnih čunjosječnica u ravnini α može prijeći u pramen takvih koncentričnih čunjosječnica.

e) Plohe VIII. vrste.

Padnu li oba dvostruka pravca kod ploha VII. vrste zajedno, nastaju plohe VIII. vrste. Plohu ove vrste sačinjavaju zrake linearne parabolične kongruencije, koje sijeku još jednu čunjosječnicu. Ravnine parova izvodnica čine svezak ravnina dvostrukog pravca, a to znači, da ploha sama sebe tangira duž toga pravca.[21] Čunjosječnice plohe nalaze se u svesku ravnina dvostruke izvodnice, kao kod ploha VII. vrste.

Odaberimo opet neki centar projiciranja S i postavimo ravninu α paralelno s parom izvodnica te točke. Ravnina α paralelna je u ovom slučaju i s dvostrukim pravcem plohe. Čunjosječnice plohe sijeku i ovdje svaki par izvodnica u perspektivnim nizovima, a dvije povoljne izvodnice u projektivnim nizovima. Dvostruki pravac siječe svake dvije izvodnice u pridruženim točkama, jer ga siječe dvostruka izvodnica plohe. Projekcije tih nizova iz točke S na ravninu α bit će opet perspektivni nizovi, dakle će i projekcije čunjosječnica dati perspektivan pramen homotetičnih čunjosječnica. No centar perspektiviteta nalazi se u ovom slučaju u beskonačnosti, jer je dvostruki pravac paralelan s ravninom α. Središta tih čunjosječnica nalaze se na jednom pravcu, a to bismo mogli zaključiti već prema onome kod ploha VII. vrste. Za jednu i drugu vrstu zaključit ćemo to vrlo jednostavno ovako: Čunjosječnice plohe sijeku izvodnice toške S u perspektivnim nizovima, jer im je zajednička točka na dvostrukom pravcu međusobno pridružena. Središte projekcije neke čunjosječnice u ravnini α bit će projekcija onog pola te čunjosječnice, kojemu je polara presječnica ravnine te čunjosječnice s ravninom izvodnica centra projiciranja S. Svi ti polovi nalaze se u jednoj ravnini, jer pridružimo li točkama onih perspektivnih nizova njihove tangencijalne ravnine, dobit ćemo dva projektivna sveska ravnina, kojima je ravnina izvodnica točke S međusobno pridružena. Produkt tih dvaju svezaka bit će dakle ravnina tih izvodnica i još jedna ravnina, a u toj drugoj nalaze se gore spomenuti polovi. Na presječnici te ravnine s ravninom α bit će dakle središta.

Ako se centar projiciranja nalazi na izoliranom dijelu dvostrukog pravca, mora ploha imati par realnih torzalnih

---

[21] Müller-Krames: ibid., str. 262.

ravnina, a one sijeku ravninu α u dva paralelna pravca. Perspektivan pramen homotetičnih elipsi, u koje se projiciraju čunjosječnice plohe iz točke S, moraju se nalaziti unutar tih pravaca, dakle su sve te elipse još i jednako velike. Ako točkom S prolazi realan par izvodnica, bit će ta dva paralelna pravca u ravnini α imaginarna, a čunjosječnice će biti paralelne i jednake hiperbole. Da su i te hiperbole jednake, možemo ovako dokazati: Uzmimo kod čunjosječnica našeg pramena u ravnini α one dijametre, koji se nalaze u pravcu svih središta tih čunjosječnica. Konjugirani dijametri ovim dijametrima moraju biti paralelni, jer su sve čunjosječnice pramena homotetične. Involucije konjugiranih polova na svim tim paralelnim dijametrima nalaze se na jednom involutornom pramenu zraka, a vrh toga pramena je u perspektivnom centru pramena čunjosječnica. Jer je taj centar u beskonačnosti, bit će zrake tog involutornog pramena paralelne, a to se može desiti samo kod homotetičnih i jednakih čunjosječnica. Jasno je, da je taj pramen u prvom slučaju hiperbolan, a u drugom eliptičan. Mogli bismo dakle za ovakve plohe napisati ovaj stavak:

Čunjosječnice pravčaste plohe 4. reda VIII. vrste, projicirane iz jedne točke dvostrukog pravca na ravninu paralelnu s ravninom izvodnica te točke, daju u njoj pramen paralelnih i jednakih čunjosječnica, čija su središta na jednom pravcu.

Kad bismo centar projiciranja odabrali u kuspidalnoj točki, dobili bismo u ravnini α pramen paralelnih i jednakih parabola, koje tangiraju presječnicu druge torzalne ravnine s ravninom α.

f) Plohe IX. vrste.

Pustimo li kod pravčastih ploha 4. reda VIII. vrste, da jedna izvodnica ode u dvostruki pravac, tada on postaje trostruk, a takva ploha ide u IX. vrstu. Ova ploha ne tangira dakako više sama sebe duž dvostrukog pravca. U tom pravcu nalazi se sada obična izvodnica plohe zajedno sa svojim sveskom tangencijalnih ravnina, dakle taj dvostruki pravac sijeku i sve čunjosječnice plohe, jer one sijeku svaku izvodnicu. Uzmimo na trostrukom pravcu d opet povoljan centar projiciranja S. Tom točkom prolazi uvijek jedna realna izvodnica i i par realnih ili imaginarnih izvodnica i_1, i_2. Ravninu α postavimo u prostoru paralelno s ravninom izvodnica i_1,i_2. Jer čunjosječnice plohe sijeku izvodnice i_1,i_2, bit će projekcije svih čunjosječnica plohe iz točke S na ravninu α opet homotetične čunjosječnice. Osim izvodnica i_1,i_2 sijeku čunjosječnice plohe njen trostruki pravac i izvodnicu i, dakle će projekcije čunjosječnica na ravnini α dati pramen homotetičnih čuojosječnica, koje prolaze probodištima ravnine α s pravcem d i izvodnicom i.

Ako su sve tri izvodnice točke S realne, bit će čunjosječnice u ravnini α hiperbole. No u tom slučaju postoji u prostoru još pet svezaka paralelnih ravnina, osim ravnina paralelnih s ravninom α, na koje će se čunjosječnice plohe projicirati iz te točke u svezak homotetičnih hiperbola. Ravnine tih šest svezaka paralelne su s ravninama (di), (di_1), (di_2), (ii_1), (ii_2) i $(i_1 i_2)$. Ako je par izvodnica i_1, i_2 imaginaran, postoje u prostoru za točku S samo dva sveska paralelnih ravnina. To su svesci paralelni s ravninama $(i_1 i_2)$ i (di). Na ravnine prvog sveska projicirat će se čunjosječnice plohe u pramen homotetičnih elipsi, a na ravnine drugog sveska u pramen isto takvih hiperbola. Pramenovi čunjosječnica u svim tim ravninama određeni su uvijek sa četiri točke, dvije u beskonačnosti, a dvije u konačnosti.

Ako točkom S prolazi torzalan pravac t, tada za tu točku postoje četiri takva sveska ravnina. Ti su svesci paralelni s ravninama (dt), (di), (it) i s torzalnom ravninom. Na ravnine prvog i trećeg sveska projiciraju se čunjosječnice u pramen homotetičnih hiperbola s jednom zajedničkom asimptotom, a koje prolaze uz to jednom točkom. Na ravnine drugog sveska projiciraju se opet u pramen homotetičnih hiperbola, ali sve te hiperbole imadu zajedničku tangentu i dIralište. Na ravnine četvrtog sveska projiciraju se čunjosječnice plohe u pramen paralelnih parabola, koje prolaze dvjema uvijek realnim točkama.

Ravnine parova izvodnica, odnosno čunjosječnica, omataju kod ovih ploha opet torzu 3. razreda, dakle mogu postojati i na takvim plohama paralelne ravnine dvaju čunjosječnica. Za njih, kao i za centre projiciranja njihovih ravnina, mogli bismo ovdje izreći analogne stavke, kao što su kod ploha III. vrste.

g) Plohe XI. vrste.

Nalazi li se u trostrukom pravcu plohe torzalan pravac mjesto obične izvodnice, tada imademo plohu XI. vrste.[22] Torzalnu ravninu toga torzalnog pravca dodiruju čunjosječnice plohe duž trostrukog pravca. Nekom točkom S na trostrukom pravcu prolazi par realnih ili imaginarnih izvodnica, a njih opet možemo uzeti kao par dvostrukih zraka involutornog pramena. Projekcije čunjosječnica iz točke S na ravninu α, paralelnu s ravninom izvodnica te točke, bit će dakle opet homotetične čunjosječnice. Projekcije tih čunjosječnica u ravnini α dat će pramen čunjosječnica, koje tangiraju presječnicu torzalne s tom ravninom u njenu probodištu s trostrukim pravcem. Pramen homotetičnih čunjosječnica u ravnini α određen je dakle dvjema beskonačno dalekim točkama i jednom konačnom tangentom i diralištem.

Ako su izvodnice točke S realne, postoje za tu točku četiri sveska paralelnih ravnina, na koje će se čunjosječnice plohe projicirati u pramen homotetičnih čunjosječnica. Na tri

[22] Müller-Krames: ibid., str. 265.

sveska projicirat će se u hiperbole, koje u dva pramena imadu zajedničku asimptotu, dok se na četvrti svezak projiciraju u parabole. Ako je točka S kuspidalna, postoje za nju tri sveska ravnina. Na dva sveska projicirat će čunjosječnice plohe u paralelne parabole, koje se dodiruju i u konačnoj jednoj točki, dok se na treći svezak projiciraju u pramen hiperbola sa zajedničkim asimptotama. Prolazi li konačno točkom S par imaginarnih izvodnica, imat će ona dva takva sveska paralelnih ravnina. Na prvi svezak projicirat će se čunjosječnice plohe u pramen elipsa, a na ravnine drugog sveska u pramen paralelnih parabola.

Torza ravnina parova izvodnica, odnosno čunjosječnica, raspada se kod ovih ploha u stožac ili valjak i svezak ravnina. One plohe, kojima je torza valjak, imadu po dvije ravnine čunjosječnica paralelne, pa bismo za takve plohe mogli ovdje doslovce napisati stavke kao kod ploha V. vrste.

IV. Centar projiciranja u beskonačnosti.

U prošlom poglavlju odabirali smo centar projiciranja S po volji na dvostrukom pravcu ili liniji naših ploha, ali nikada u beskonačnosti. U ovom ćemo poglavlju razmotriti slučaj, kada centar projiciranja otide u beskonačnost, t. j. centralna projekcija prelazi u paralelnu. Sve ravnine α, na koje smo projicirali čunjosječnice kod pravčastih ploha 3. reda, paralelne su s jednostrukim pravcem tih ploha. Za beskonačno daleki centar projiciranja na dvostrukom pravcu bile bi sve pripadne ravnine α paralelne sa smjerom projiciranja, t. j. sve te ravnine prolazile bi baš tim centrom projiciranja. Iznimku čine pravčaste plohe 3. reda s beskonačno dalekim jednostrukim pravcem, a to su konoidi 3. reda. U beskonačno dalekoj ravnini imadu ti konoidi par izvodnica, dakle će beskonačno dalekom centru projiciranja na dvostrukom pravcu biti pridružena na poznati način svaka ravnina prostora, jer je svaka ravnina prostora paralelna s beskonačno dalekom ravninom.

Pravčaste plohe 4. reda mogu također imati u beskonačnosti par imaginarnih kao i realnih izvodnica, pa možemo reći:

Čunjosječnice pravčastih ploha 3. i 4. reda mogu se projicirati samo onda kao homotetične iz beskonačno daleke točke njihove dvostruke linije, ako tom točkom prolaze dvije beskonačno daleke izvodnice. U ovakvu slučaju projiciraju se čunjosječnice ploha tako na svaku ravninu prostora.

Projekcije čunjosječnica tih ploha na svaku ravninu prostora bit će opet hiperbole, elipse ili parabole prema tome, da li beskonačno dalekim centrom projiciranja prolaze realne ili imaginarne izvodnice, ili torzalna izvodnica.

Neka beskonačno dalekim centrom projiciranja prolazi par imaginarnih izvodnica. Projekcije čunjosječnica pravčaste plohe 3. ili 4. reda na svaku ravninu prostora bit će homotetične elipse. Zadamo li sebi neku elipsu, onda sigurno postoji u prostoru svezak paralelnih ravnina, na koje će se čunjosječnice te plohe projicirati u slične elipse sa zadanom. To izlazi odatle, što svaki eliptični valjak možemo presjeći u elipsi, koja je slična s nekom zadanom elipsom. Posve analogno vrijedi za hiperbolu ili parabolu, ako su u beskonačno dalekoj ravnini dvije realne izvodnice, ili torzalan pravac s torzalnom ravninom. Mjesto elipse možemo u prvom slučaju uzeti kružnicu, a svaki eliptični valjak možemo sjeći u dva sistema kružnica, pa možemo napisati i ovaj stavak:

Za svaku pravčastu plohu 3. i 4. reda, koja u beskonačno dalekoj ravnini imade dvije imaginarne izvodnice, postoje u prostoru dva sveska paralelnih ravnina, na koje će se njihove čunjosječnice projicirati iz beskonačno daleke točke dvostruke linije u kružnice.

Posve jednak stavak mogli bismo napisati za istostrane hiperbole, ako te plohe imadu u beskonačno dalekoj ravnini dvije realne izvodnice.

Kod nekih ploha mogu se ta dva sveska stegnuti u jedan. Na pr. kod Plückerova konoida, ili konoida normala duž kosog presjeka uspravnog kružnog valjka.

Kod pravčastih ploha 3. reda vrijede ti stavci samo za konoide, dok kod onih 4. reda mogu vrijediti i za druge osim konoida, jer se i na njima mogu nalaziti dvije beskonačno daleke izvodnice. Pogledajmo ukratko još one pravčaste plohe 4. reda, za koje vrijede navedeni stavci. Kod ploha III. vrste mora u torzu ravnina parova izvodnica pripadati i beskonačno daleka ravnina. U toj ravnini nalazi se jedna čunjosječnica plohe, a ostale ravnine torze sijeku je u pravcima, koji omataju neku čunjosječnicu. Na temelju toga možemo za te plohe napisati ovo:

Čunjosječnice pravčaste plohe 4. reda III. vrste projicirat će se iz beskonačno daleke točke kubne ravnalice na svaku ravninu prostora u homotetične čunjosječnice samo onda, ako je direkcioni stožac izvodnica i direkcioni stožac ravnina parova izvodnica te plohe drugoga reda.

Kod ploha V. vrste mora torza ravnina čunjosječnica biti parabolični valjak, a jer će u tom slučaju te plohe imati i jednu beskonačno daleku čunjosječnicu, bit će direkcioni stožac izvodnica tih ploha opet drugoga reda.

Među plohama VII. vrste konoidi su 4. reda oni, na koje možemo primijeniti navedene stavke.

Ploha VIII. vrste ti se stavci ne tiču, jer te plohe ne mogu imati par izvodnica u beskonačnosti.

Za plohe IX. vrste vrijedi isto, što i za plohe III. vrste, a za one XI. vrste isto, što i za V. vrste, jer te plohe imadu istovrsne torze ravnina parova izvodnica i čunjosječnica. Plohe XI. vrste možemo uopće smatrati specijalnim slučajem ploha V. vrste[23].

V. Kružne točke.

Znademo, da svakom točkom dvostruke ravne ili krive ravnalice naših ploha 3. i 4. reda, na njenom izoliranom dijelu, prolazi par imaginarnih izvodnica. Imade medjutim i takvih točaka, kod kojih se taj par njihovih imaginarnih izvodnica podudara s parom izotropnih pravaca, dakle su te točke kružne.

Projekcije svih čunjosječnica tih ploha iz takvih točaka, na odgovarajuće ravnine, bit će kružnice.

Potanja razmatranja o takvim kružnim točkama objelodanit ćemo u drugoj prilici i na drugom mjestu.

---

[23] Müller-Krames: ibid., str. 260.