Površine četvrtoga reda kao geometrijsko mjesto dirališta pramena ravnina i svežnja površina drugoga reda

Napisao

Vilim Niče

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 20. prosinca 1939.

Tri površine drugoga reda imadu osam zajedničkih asociiranih točaka. Kroz tih osam temeljnih točaka prolazi ∞^2 površina drugoga reda, a sve te površine čine „svežanj" F^2 površina drugoga reda.[1]

Ma koja ravnina Π siječe površine takvoga svežnja u ∞^2 čunjosjeka, koji čine mrežu čunjosjeka. Neki čunjosjeci u toj mreži raspast će se u par realnih ili imaginarnih pravaca, a ti će se nalaziti na onim površinama svežnja, koje ravnina Π dodiruje. Ova su dirališta ravnine Π prema tome vrhovi autopolarnih trokuta (glavne točke) svih pramenova čunjosjeka u toj mreži ravnine Π, a geometrijsko mjesto tih dirališta, odnosno glavnih točaka, jest krivulja trećega reda (Jacobi).[2]

Dokaz za red i rod ove krivulje može se projektivnogeometrijskim putem izvesti ovako: Polovi ravnine π, s obzirom na sve površine svežnja F^2, leže na općoj površini trećega reda.[3] Ravnina Π siječe tu površinu u krivulji trećega reda. Točke te krivulje su polovi ravnine Π s obzirom na one površine svežnja F^2, koje ta ravnina dodiruje. Dakle je navedena krivulja reda trećega i to roda prvoga, jer opća površina trećega reda nema dvostrukog pravca niti dvostruke krivulje.

S tri čunjosjeka a, b, c, koji prolaze jednom točkom S, određena je mreža čunjosjeka, čiji svi čunjosjeci prolaze tom točkom.

---

1 Dr. Th. Reye: Die Geometrie der Lage. Abt. III, str. 136.

2 G. Salmon: Analytische Geomet. d. Kegelschnitte, Bd. II, str. 274.

3 Dr. Th. Reye: Op. cit., str. 137.

Čunjosjeci pramena (b, c) sijeku čunjosjek a u još tri točke, koje su uz točku S temeljne za nove pramenove čunjosjeka u toj mreži. Između ovih ∞^1 pramenova čunjosjeka postoji jedan, čiji će čunjosjeci dirati tangentu čunjosjeka a u točki S. U točku S spadaju prema tome dvije glavne točke toga pramena, a odavde izlazi, da će krivulja glavnih točaka svih pramenova čunjosjeka u našoj mreži imati u točki S dvostruku točku.

Neka ravnina Π prolazi jednom temeljnom točkom svežnja F^2. Prema gornjemu izvodu imat će krivulja glavnih točaka svih pramenova čunjosjeka presječne mreže u toj temeljnoj točki dvostruku točku, jer svi čanjosjeci ove mreže prolaze tom točkom. Ta je krivulja prema tome roda nultoga.

Prolazi li ravnina Π dvjema temeljnim točkama svežnja F^2, bit će obje te točke dvostruke za spomenutu krivulju trećega reda, dakle se ona raspada u čunjosjek i pravac.

Analogno se ta krivulja raspada u tri pravca, ako ravnina Π prolazi kroz tri temeljne točke svežnja.

Nekim pravcem p neka je određen pramen ravnina Π_i. Istražit ćemo sada geometrijsko mjesto dirališta svih ravnina Π_i pravca p s površinama svežnja F^2.

Polarne ravnine neke točke P, s obzirom na sve površine svežnja F^2, prolaze nekom točkom P_1. Spojnice ovakovih parova točaka jesu izvodnice pravčastih površina svežnja F^2, a čine kubni kompleks pravaca. Svim točkama nekoga pravca pridružene su na taj način točke nekog kubnog čunjosjeka, a svim točkama neke ravnine točke opće površine trećega reda.[4] Sve takove površine (njih ∞^3) prolaze prostornom krivuljom c^6 šestoga reda, koja je geometrijsko mjesto glavnih točaka svih pramenova površina drugoga reda unutar svežnja F^2.[4]

Točkama našega pravca p neka su pridružene na gornji način točke nekog kubnog čunjosjeka k^3. Svakoj ravnini pravca p pridružena je na gornji način jedna površina trećega reda, koja prolazi krivuljama c^6 i k^3. Pramen ravnina Π_i pridružen je prema tome ednoznačno i projektivno pramenu površina trećega reda φ^3, jer te pramenove možemo uzeti da se nalaze u dva razna kubno srodna točkovna prostora E_1 i E_2, tako da je svakom pravcu i ravnini

[4] Dr. Th. Reye: Op. cit., str. 137, 138 i 140.

[5] Dr. Juraj Majcen: Jedno projektivno izvođenje općene površine četvrtoga reda. »Rad«, knjiga 195.

prostora E_1 projektivno pridružen kubni čunjosjek i kubna površina prostora E^2.[4] Produkt tih dvaju pramenova φ^3 i Π_i bit će tražena površina Δ četvrtoga reda.

Majcen je doveo u projektivnu jedno-dvoznačnu pridruženost površine drugoga reda nekoga svežnja, s pravcima linearne kongruencije.[5] Produkt tih dviju geometrijskih tvorevina bila je opća površina četvrtoga reda.

Sve konjugirane polare pravca p, s obzirom na površine svežnja F^2, čine kongruenciju (k^3) prvoga reda trećega razreda, jer su to bisekante kubnoga čunjosjeka k^3.[6] Svakom zrakom kongruencije određena je samo jedna površina svežnja F^2, a probodišta tih zraka s pridruženim površinama jesu dirališta ravnina Π_i pravca p s tim površinama. Svakom pramenu svežnja F^2 konjugirano je pridružen na taj način sistem izvodnica neke pravčaste površine unutar naše kongruencije (k^3),[7] dakle se i naša kongruencija bisekanata krivulje k^3 nalazi u jednoznačnoj projektivnoj pridruženosti sa svežnjem F^2 površina drugoga reda, a njihov produkt bit će geometrijsko mjesto dirališta ravnina Π_i pravca p s površinama svežnja F^2. Dakle ono, što tražimo.

Spomenuli smo malo prije, da je produkt linearne kongruencije pravaca s pridruženim svežnjem površina drugoga reda opća površina četvrtoga reda. Navedena je kongruencija bila prvoga reda kao i naša kongruencija (k^3), dakle je produkt kongruencije (k^3) i svežnja F^2 također opća površina četvrtoga reda.

Dokazati se to uostalom može i na ovaj način: Svaka zraka kongruencije (k^3) siječe tu površinu u četiri točke. Dvije su točke na kubnom čunjosjeku k^3, a dvije su u probodištima tih zraka s pridruženim površinama svežnja F^2. Uzmemo li neki pravac s, tada svakom njegovom tečkom prolazi jedna zraka kongruencije (k^3), a toj zraci je pridružena jedna površina svežnja F^2, kao i par tangentnih ravnina te površine, koje prolaze pravcem p. Svaku takovu površinu probada pravac s u dvije točke, a pripadne dvije tangentne ravnine pravca p u još dvije točke. Padne li probodište pravca s s pripadnom površinom i ravninom zajedno, bit će ta točka diralište te ravnine s tom površinom. Dobili smo dakle na pravcu s dva kolokalna dvo-dvoznačno pridružena niza, čije su dvostruke točke na našoj površini Δ. Budući da dva kolokalna dvo-dvoznačno

[6] Dr. Th. Reye: Op. cit., str. 135.
[7] Dr. Th. Reye: Op. cit., str. 48.

pridružena niza točaka imaju četiri dvostruke točke,[8] siječe svaki pravac s našu površinu Δ u četiri točke, a prema tome je ona četvrtoga reda.

Postavimo li pravac s tako, da prolazi jednom temeljnom točkom svežnja F^2, tada se poznati dvo-dvoznačni nizovi na tom pravcu reduciraju na jedno-dvoznačno pridružene, jer sve površine svežnja F^2 prolaze tom točkom. Dva kolokalna jedno-dvoznačno pridružena niza imaju tri dvostruke točke,[9] dakle takav pravac s ima sa površinom Δ osim navedene temeljne točke još tri točke zajedničke. Odavde izlazi, da su temeljne točke svežnja F^2 obične točke površine Δ, a to se posve slaže sa zaključcima Majcenovima kod njegova projektivnog izvođenja opće površine četvrtoga reda.

Na temelju dosadašnjih razmatranja možemo napisati ovaj stavak:

Geometrijsko mjesto dirališta ravnina nekoga pravca p *s površinama svežnja* F² *površina drugoga reda, jest nepravčasta površina* Δ *četvrtoga reda. Pravac* p *je na toj površini, a temeljne točke svežnja* F² *jesu obične točke te površine. Prostorna krivulja* c⁶ *glavnih točaka svih pramenova površina svežnja* F² *nalazi se također na toj površini.*

Postojala je tvrdnja u projektivnoj geometriji, da na općoj površini četvrtoga reda mora biti višestrukih elemenata (Sturm), ako na njoj postoji pravac. Tu je tvrdnju oborio dr. Juraj Majcen.[10] Naša je površina Δ vrlo jednostavan i markantan primjer, koji navedenu tvrdnju također obara, jer sve ravnine Π_i pravca p sijeku površinu Δ u krivuljama trećeg reda, roda prvog, osim onih, koje prolaze temeljnim točkama svežnja F^2, a i te su obične točke površine Δ. U tim točkama diraju navedene ravnine pravca p ovu površinu.

Ovdje valja naglasiti, da se pravac p nalazi u najopćenitijem položaju s obzirom na krivulju c^6, temeljne točke i kubni kompleks izvodnica površina svežnja F^2.

Spojimo li svaku temeljnu točku T_i svežnja F^2 sa svima ostalima, dobit ćemo 28 spojnica t_i.

---

[8] J. Thomae: Untersuchungen über Zwei-zweideutige Varwandschaf. und einige Erzeug. derselben, str. 24.

[9] Dr. E. Weyr: Theorie der mehr. geom. Elementargeb. und der algeb. Curven u. Flächen als deren Erzeug. Bd. I, str. 10.

[10] Dr. Juraj Majcen: Op. cit., str. 187 i 190.

Siječe li naš pravac p spojnicu t_1 temeljnih točaka T_1 T_2, bit će ta spojnica pravac pripadne površine Δ, jer ravnina Π $(= p\,t_1)$ siječe svežanj F^2 u mreži takovih čunjosjeka, koji prolaze temeljnim točkama T_1 i T_2. Krivulja glavnih točaka svih pramenova čunjosjeka u ovakovoj mreži raspada se u čunjosjek i pravac t_1.

Siječe li pravac p još neke spojnice parova temeljnih točaka svežnja F^2, bit će svaka ova spojnica pravac pripadne površine Δ.

U dosadašnjim slučajevima nisu imale površine Δ dvostrukih ni višestrukih elemenata.

Neka sada bude pravac p zraka kubnog pravčastog kompleksa izvodnica površina svežnja F^2, t. j. neka spaja dvije konjugirano pridružene točke P i P_1. Budući da su točke P i P_1 involutorno pridružene, bit će pravac p bisekanta njemu pridruženoga kubnog čunjosjeka k^3, a sjeći će ga u točkama P i P_1. Presječne krivulje ravnina Π_i pravca p s pripadnom površinom Δ prolazit će sve prema tome točkama P i P_1, jer sve te krivulje prolaze presječnim točkama tih ravnina s krivuljama k^3 i c^6. Treće sjecište tih krivulja u ravninama Π_i s pravcem p jest diralište tih ravnina s površinom Δ. Svaki pravac točaka P i P_1 probada površinu Δ u još dvije točke, jer njime i pravcem p položena ravnina Π siječe površinu Δ u krivulji trećega reda, na kojoj se već nalaze točke P i P_1. Točke P i P_1 bit će prema tome dvostruke točke površine Δ.

Pramen ravnina Π_i pravca p projektivno je pridružen pramenu φ^3 površina trećega reda, čija je temeljna krivulja zbroj krivulja k^3 i c^6. Tangentne ravnine površina pramena φ^3 u točkama P i P_1 čine pramen ravnina, čije su osovine tangente kubnoga čunjosjeka k^3 u tim točkama. I ovi pramenovi su projektivni s pramenom Π_i, a jer im se osi sijeku s pravcem p, t. j. s osovinom pramena Π_i, bit će produkt tih pramenova s pramenom Π_i stošci drugoga reda, čije izvodnice diraju površinu Δ u točkama P i P_1. Vidimo dakle:

Ako je pravac p *izvodnica ma koje površine svežnja* F^2, *imat će pripadna površina Δ na tom pravcu dvije dvostruke čvorne točke.*

Uzmimo sada pravac p u kubnom kompleksu izvodnica površina svežnja F^2 tako, da prolazi temeljnom točkom T_1 toga svežnja. Sve ravnine pravca p sjeći će pripadnu površinu Δ u krivuljama trećega reda roda nultoga, čije će se dvostruke točke nalaziti u temeljnoj točki T_1. Točka T_1 jest prema tome trostruka čvorna točka pripadne površine Δ, jer svaki pravac te točke probada tu površinu Δ još samo u jednoj točki.

U ravninama pravca p kroz preostalih sedam temeljnih točaka svežnja F^2 nalazit će se po jedan pravac površine Δ, jer presječna krivulja trećeg reda te površine s ovakovom ravninom pravca p dobiva u tim temeljnim točkama drugu dvostruku točku, dakle se raspada u čunjosjek i pravac.

Spojimo li točku T_1 s jednom točkom U presječne krivulje trećega reda površine Δ i neke ravnine Π_i pravca p, bit će ta spojnica izvodnica one površine svežnja F^2, koju ta ravnina Π_i dira u točki U, jer se i točka T_1 nalazi na toj površini. Odavde izlazi, da će tangente presječnih krivulja trećega reda, roda nultoga, ravnina Π_i pravca p s površinom Δ u točki T_1 biti izvodnice nekih pravčastih površina svežnja F^2. Sve takove izvodnice čine stožac bisekanata temeljne krivulje četvrtoga reda onoga pramena površina u svežnju F^2, koji je određen pravcem p kao tangentom njegove temeljne krivulje. Znamo, da je takav stožac trećega reda, dakle je trećega reda i dirni stožac površine Δ u čvornoj točki T_1. Izlazi dakle:

Prolazi li pravac p *jednom temeljnom točkom svežnja* F^2, *imat će pripadna površina Δ u toj točki trostruku čvornu točku, kojom prolazi osam pravaca te površine.*

Budući da je čvorna točka trostruka, a u ravnini svakih dvaju pravaca nalazi se po jedan čunjosjek, izlazi:

Na površini Δ s jednom trostrukom čvornom točkom nalazi se 28 čunjosjeka, koji prolaze tom trostrukom čvornom točkom.

Ako se pravac p nalazi još u jednoj ili u dvjema ravninama parova spojnica t_i temeljne točke T_1, smanjit će se broj takovih čunjosjeka, jer se neki raspadaju u pravce.

Namjestimo pravac p sada tako, da siječe prostornu krivulju c^6 glavnih točaka pramenova površina svežnja F^2 u točki L. Polarne ravnine točke L, s obzirom na sve površine svežnja F^2, prolaze trisekantom l krivulje c^6, koja je točki L konjugirano pridružena. Pravac l bit će također na pripadnoj površini Δ, jer je sastavni dio kubnog čunjosjeka k^3, koji se ovdje raspada u čunjosjek i pravac l. Presječne krivulje površine Δ s ravninama Π_i pravca p prolaze točkom L, jer sve površine Δ prolaze krivuljom c^6. Točka L bit će prema tome također dvostruka čvorna za površinu Δ. Dirni stožac ove površine u točki L jest drugoga reda, jer se može izvesti kao produkt pramena ravnina Π_i i pramena dirnih ravnina površina trećega reda pramena φ^3 u točki L.

Ako je pravac p bisekanta krivulje c^6 pa je siječe u dvije točke L_1 i L_2, bit će ovim točkama konjugirano pridružene trisekante l_1 i l_2 pravci pripadne površine Δ, a točke L_1 i L_2 bit će njene dvostruke čvorne točke. Pravac p bit će zajednička izvodnica dirnih stožaca površine Δ u točkama L_1 i L_2. Pravcu p pridruženi kubni čunjosjek k^3 raspada se ovdje u tri pravca, i to u trisekante l_1 i l_2 i još jedan pravac, koji se također nalazi na površini Δ. Uzmemo li točke L_1 i L_2 kao vrhove dvaju stožaca svežnja F^2, bit će njihova prodorna krivulja temeljna za neki pramen površina u tom svežnju. Točke L_1 i L_2 bit će dvije glavne točke toga pramena, a spojnica preostalih dviju glavnih točaka toga pramena jest onaj treći pravac raspale krivulje k^3.

Uzmemo li, da je pravac p trisekanta krivulje c^6, koja je siječe u točkama L_1, L_2 i L_3, imat će pripadna površina Δ opet u m točkama dvostruke čvorne točke. Dirni stošci ove površine u točkama L_1, L_2 i L_3, bit će opet drugoga reda, a pravac p bit će im zajednička izvodnica. Točkama L_1, L_2 i L_3 konjugirano pridružene trisekante l_1, l_2 i l_3 čine degenerirani kubni čunjosjek k^3, nalaze se na površini Δ, a prolaze nekom točkom P krivulje c^6, koja je konjugirano pridružena pravcu p kao trisekanti. Odavde izlazi, da točka P mora biti također čvorna točka površine Δ.

Neka pravac p prolazi konačno jednom temeljnom točkom svežnja F^2, recimo T_1, i neka siječe krivulju c^6 također u jednoj točki S. Pripadna površina Δ imat će u točki T_1 trostruku, a u točki S dvostruku čvornu točku, jer to izlazi iz naših ranijih razmatranja. Osim poznatih osam pravaca ovakove površine Δ, koji prolaze trostrukom čvornom točkom T_1, nalazi se na njoj i na točki S konjugirano pridružena trisekanta s krivulje c^6.

Osim dosada navedenih slučajeva može pravac p prolaziti još i dvjema temeljnim točkama svežnja F^2. Takovom pravcu pridružena površina Δ ima za svežanj F^2, njegove temeljne točke i prostornu krivulju c^6 specijalnu važnost, pa ćemo se njome zabaviti na drugom mjestu.

Spomenut ćemo još takove površine Δ, koje nam daju dva specijalna svežnja površina drugoga reda. Prvi takav svežanj $F_1{}^2$ čine pravčaste površine drugoga reda, koje prolaze nekim pravcem m, a imaju 4 temeljne točke. Drugi svežanj $F_2{}^2$ čine sve površine drugoga reda, koje prolaze nekim kubnim čunjosjekom.

Sve ravnine Π_i nekoga pravca p sijeku površine svežnja $F_1{}^2$ u ǝɹɯıž čunjosjeka, koji prolaze probodištem pravca m s tim ravninama. Presjeci tih ravnina s pripadnom površinom $\varDelta$ imat će u tim probodištima dvostruke točke, dakle je pravac m za tu površinu dvostruk. Prolazi li pravac p jednom temeljnom točkom, ili siječe li pravac m svežnja $F_1{}^2$, raspast će se pripadna površina $\varDelta$ u površinu trećega reda sa čvornom točkom i u jednu ravninu. Čvorna točka je u spomenutoj temeljnoj točki, odnosno u sjecištu pravaca p i m. Prolazi li pravac p dvjema temeljnim točkama T_1 i T_2 svežnja $F_1{}^2$, raspast će se pripadna površina $\varDelta$ u dvije ravnine $(m\,T_1)$ i $(m\,T_2)$ i dvostruki pravac p.

Sve površine $\varDelta$, koje nam daje svežanj $F_2{}^2$, jesu pravčaste, jer presječne mreže čunjosjeka svih ravnina Π_i svakoga pravca p u prostoru imaju po tri točke, kojima prolaze svi čunjosjeci svake takove mreže. Presječne krivulje pripadnih površina $\varDelta$, s ravninama Π_i pravca p, raspadaju se prema tome u pravac p i u još tri pravca. Sve su takove površine $\varDelta$ pravčaste površine četvrtoga reda, kojima je temeljni kubni čunjosjek svežnja $F_2{}^2$ dvostruka krivulja. (Četvrta vrsta po Sturmu.)

Siječe li pravac p taj kubni čunjosjek jedanput, raspast će se pripadna površina $\varDelta$ u jednu pravčastu površinu drugoga reda i jedan stožac drugoga reda. Siječe li ga dva puta, raspada se ta površina u dva stošca drugoga reda.