RAD
JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNOGA RAZREDA
KNJIGA 271 (84) 1941 GOD.

VILIM NIČE

I

GEOMETRIJSKO MJESTO DIRALIŠTA PRAMENA RAVNINA S PRAMENOM POVRŠINA DRUGOGA REDA

II

POVRŠINE ČETVRTOGA REDA KAO GEOMETRIJSKO MJESTO DIRALIŠTA PRAMENA RAVNINA I SVEŽNJA POVRŠINA DRUGOGA REDA

U ZAGREBU 1941
NARODNA TISKARA, ZAGREB, KAPTOL 27

Naslov II je prikazan u radu pod brojem [7].

Geometrijsko mjesto dirališta pramena ravnina s pramenom površina drugoga reda

Napisao
Vilim Niče

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnog razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 20. prosinca 1939.

Prostorna krivulja c^4 četvrtoga reda prve vrste neka je temeljna krivulja pramena φ^2 površina drugoga reda. Svaka ravnina prostora dodiruje tri površine ovog pramena, a dva dirališta mogu biti i konjugirano kompleksna. U ovoj radnji istražit ćemo geometrijsko mjesto dirališta svih ravnina nekog pravca p, t. j. pramena ravnina, s površinama pramena φ^2.

Polarne ravnine neke točke, s obzirom na sve površine pramena φ^2, prolaze nekim pravcem. Ako takova točka putuje po nekom pravcu, tada su joj tako pridruženi pravci izvodnice neke pravčaste površine drugoga reda.[1] Polovi neke ravnine, s obzirom na sve površine pramena φ^2, čine kubni čunjosjek, a točkama te ravnine pridružene su na gornji način bisekante toga kubnog čunjosjeka. Sjecišta te ravnine s pripadnim kubnim čunjosjekom jesu naprijed spomenuta dirališta.[1]

Točkama pravca p neka je pridružen sistem izvodnica neke pravčaste površine E_p drugoga reda. Ravninama pravca p pridruženi kubni čunjosjeci Π_i nalaze se prema toma na površini E_p, a svi prolaze kroz glavne točke pramena φ^2.[1] Pretpostavimo li, da se naša dirališta nalaze na nekoj krivulji τ, tada bismo tu krivulju mogli shvatiti kao produkt pramena ravnina P_i pravca p i pridruženih kubnih čunjosjeka Π_i na površini E_p.

Presijecimo pramen ravnina P_i nekom ravninom po volji O u pramenu pravaca o_i. Toj ravnini O pridružen je, s obzirom na pramen φ^2, također neki kubni čunjosjek k^3. Pravac p neka probada ravninu O u točki T, a toj točki pridruženu izvodnicu na površini E_p označimo sa t. Pravcima pramena o_i pridružen je pramen ω^2 površina drugoga reda, koji je određen pravcem t i kubnim čunjo-

[1] Dr. Th. Reye: Die Geometrie der Lage. Abt. III, str. 48, 49 i 27.

sjekom k^3 kao temeljnom krivuljom. Svakim pravcem pramena o^i određena je jedna ravnina pramena P_i, a toj ravnini pridružen kubni čunjosjek Π_i nastaje kao prodor pridružene površine pramena ω^2 i površine E_p, jer im je izvodnica t zajednička. Pramen ravnina P_i i pramen površina ω^2 nalaze se u projektivnom odnosu, jer je pramen pravaca o_i presjek pramena ravnina P_i, a prema tome je produkt tih dvaju pramena opća površina trećega reda[2], na čijoj se površini nalaze pravci p i t. Na toj se površini trećega reda sigurno nalaze sva tražena dirališta ravnina pramena P_i s površinama pramena φ^2, jer se nalaze na presječnim čunjosjecima pridruženih ravnina pramena P_i i površina pramena ω^2, a svi ti čunjosjeci čine navedenu površinu trećega reda. No sva se ta dirališta nalaze i na površini E_p, jer je presječni čunjosjek svake ravnine pramena P_i s površinom E_p konjugirani niz polova pravca p, s obzirom na presječni pramen čunjosjeka i ravnine s pramenom površina φ^2. Sva se tražena dirališta moraju dakle nalaziti na prodornoj krivulji površine E_p i spomenute opće površine trećega reda. Prodorna krivulja tih dviju površina jest šestoga reda, ali kako obje imaju zajednički pravac t, raspada se ta krivulja u taj pravac i neku prostornu krivulju τ^5 petoga reda.

Na temelju ovih naših razmatranja možemo izreći ovaj stavak:

Geometrijsko mjesto dirališta svih ravnina nekog pramena s površinama drugoga reda u pramenu takovih površina jest prostorna krivulja petoga reda.

Svaka ravnina pramena P_i siječe površine pramena φ^2 u pramenu čunjosjeka, među kojima se tri mogu raspasti u dva pravca. Ti su parovi pravaca izvodnice onih površina pramena φ^2, koje te ravnine diraju, jer su sve bisekante bikvadratne krivulje c^4 izvodnice pravčastih površina pramena φ^2.[3] Sjecišta tih parova pravaca su dirališta, ali su i glavne točke presječnoga pramena čunjosjeka. Gornji stavak možemo prema tome napisati i ovako:

Siječemo li pramen površina drugoga reda s pramenom ravnina, tada glavne točke svih presječnih pramenova čunjosjeka leže na prostornoj krivulji petoga reda.

Budući da površina E_p, kao i sve površine pramena ω^2, prolaze glavnim točkama pramena φ^2, prolazi tim točkama i naša prostorna krivulja τ^5 petoga reda.

Bikvadratna temeljna krivulja c^4 pramena površina φ^2 jest uopće osmoga ranga,[4] t. j. osam tangenata te krivulje siječe naš

[2] J. Steiner: Ges. Werke, Bd. II, str. 651—659.
[3] Dr. Th. Reye: Op. cit., str. 34.

pravac p. Osam dirališta tih tangenata na prostornoj krivulji c^4 jesu Hesseove asociirane točke.[5] Tangentne ravnine površina pramena φ^2 u svakoj točki temeljne bikvadratne krivulje c^4 čine pramen ravnina projektivan s pramenom površina φ^2. Dakle u osam asociiranih točaka, pridruženih pravcu p, diraju ravnine pravca p i tih točaka također po jednu površinu pramena φ^2. Odavde izlazi:

Izvedena prostorna krivulja petoga reda τ^5 siječe temeljnu bikvadratnu krivulju c^4 *pramena* φ^2 *u osam asociiranih točaka i prolazi njenim glavnim točkama.*

Polarne ravnine neke točke S, s obzirom na sve površine pramena φ^2, čine pramen ravnina, koji je projektivan s pramenom površina φ^2. Produkt tih dvaju pramena jest opća površina trećega reda.[6] Ovu površinu čine dirališta svih tangenata iz točke S na površine pramena φ^2. Svaka ovakova površina prolazi temeljnom bikvadratnom krivuljom c^4.[7]

Svakoj točki našega pravca p pridružena je na taj način jedna takova površina K trećega reda, a na svakoj se takovoj površini nalazi naša prostorna krivulja τ^5. Dakle sve takove površine K_i, pridružene točkama pravca p, prolaze prostornom bikvadratnom krivuljom c^4 i prostornom krivuljom petoga reda τ^5. Prodorna krivulja devetoga reda tih površina svima im je prema tome zajednička, a raspada se u navedene prostorne krivulje četvrtoga i petoga reda. Ovim krivuljama i jednom točkom prostora određena je samo jedna površina K_i, pa prema tome možemo reći:

Sve površine K_i, *pridružene točkama pravca* p, *čine pramen općih površina trećega reda, kojemu se temeljna krivulja devetoga reda raspada u prostornu krivulju četvrtoga reda prve vrste i prostornu krivulju petoga reda. Ove se krivulje sijeku u osam asociiranih točaka pripadne prostorne krivulje četvrtoga reda.*

Naša prostorna krivulja τ^5 nalazi se na površini drugoga reda E_p, dakle ne postoji u prostoru pravac, koji bi tu krivulju mogao sjeći u tri ili više točaka, osim možda izvodnica površine E_p.

Polarne ravnine točaka pravca p, kako je rečeno na početku, s obzirom na sve površine pramena φ^2, prolaze pravcima, koji čine prvi sistem izvodnica površine E_p. Drugi sistem izvodnica ove površine čine polare konjugirane pravcu p, opet s obzirom na površine pramena φ^2.[8] U prvi sistem izvodnica pripada i naš pravac t. Svaka

[4] Dr. G. A. Peschka: Darst. und projek. Geometrie. Bd. III, str. 755.
[5] Dr. Th. Reye: Op. cit., str. 38.
[6] Treći Steinerov način izvođenja kubnih površina.
[7] Dr. Th. Reye: Op. cit., str. 57.

izvodnica površine E_p probada površinu trećega reda, nastalu iz pramena ravnina P_i i pramena površina drugoga reda ω^2, u tri točke, koje se nalaze na prodornoj krivulji te površine s površinom E_p. Taj se prodor sastoji od krivulje τ^5 i pravca t. Sve izvodnice drugoga sistema sijeku pravac t, dakle su za krivulju τ^5 samo bisekante. Izvodnice prvoga sistema ne sijeku pravac t, jer on sam pripada u taj sistem, dakle sva tri probodišta tih izvodnica s navedenom površinom trećega reda nalaze se na krivulji τ^5. Odavde izlazi novi stavak:

Sve trisekante prostorne krivulje τ^5 čine jedan sistem izvodnica pravčaste površine drugoga reda.

Svaka ravnina pramena P_i siječe našu krivulju τ^5 također u pet tošaka. Tri točke su u diralištima tih ravnina s površinama pramena φ^2, a dvije točke su u diralištima pravca p s površinama toga pramena. Ova se dirališta nalaze u probodištima pravca p s površinom E_p. Iz navedenoga izlazi još i ovaj stavak:

Pravac p *i njemu pridružena prostorna krivulja τ^5 sijeku se uvijek u dvije realne ili imaginarne točke.*

Spomenuli smo prije, da konjugirane polare pravca p, s obzirom na površine pramena φ^2, čine sistem izvodnica površine E_p. Te su izvodnice u projektivnom odnosu s površinama pramena φ^2, pa možemo napisati još i ovaj stavak:

Produkt pramena površina drugoga reda φ^2 i projektivno pridruženoga sistema izvodnica pravčaste površine drugoga reda E_p, *jest prostorna krivulja petoga reda, koja prolazi glavnim točkama pramena φ^2 i siječe temeljnu krivulju toga pramena u osam asociiranih točaka.*

Uzmemo li, da bikvadratna prostorna krivulja c^4 ima dvostruku točku, nalaze se na tom mjestu dvije glavne točke pramena φ^2, dakle i krivulja τ^5 ima u toj točki dvostruku točku.

Postavljanjem pravca p u specijalan položaj prema nedegeneriranoj bikvadratnoj prostornoj krivulji c^4 možemo postići razne deformacije i degeneracije prostorne krivulje τ^5.

Red prostorne krivulje τ^5 mogli smo vrlo jednostavno odrediti i s pomoću dviju površina K trećega reda, pridruženih dvjema točkama pravca p. Naš postupak doveo nas je međutim i do drugih naprijed izloženih rezultata o toj krivulji.

[8] Dr. Th. Reye: Op. cit., str. 46.