O POLARNIM TROKUTIMA KRUŽNICE I POLARNIM TETRAEDRIMA KUGLE

Vilim Niče, Zagreb.

Uvod. Poznato je da kružnici c_1, opisanoj polarnom trokutu neke zadane kružnice *c*, možemo upisati beskonačno mnogo polarnih trokuta ove iste kružnice c. U ovoj radnji izvest ćemo neka zajednička svojstva i osobit međusobni odnos svih ovakovih polarnih trokuta neke kružnice *c* u kružnici c_1.

Opišemo li polarnom tetraedru neke kugle φ kuglu ψ, tada je kugla ψ opisana beskonačno mnogim polarnim tetraedrima kugle (Hesse). Cilj ove radnje bit će nadalje taj, da istraži sva zajednička svojstva kao i sve osobitosti međusobnog odnosa svih ovakovih polarnih tetraedara kugle φ u kugli ψ, kao i njihovih pobočnih trokuta. Spomenut ćemo odmah, da ćemo otkriti zajedničko težište svih tih tetraedara, dok će težišta i Feuerbachove kružnice njihovih pobočnih trokuta ležati na nekim novim kuglama, kojih će središta, polumjeri i odnos prema kuglama φ i ψ također biti cilj naših istraživanja.

U svrhu lakšeg i bržeg razumijevanja spomenut ćemo još i slijedeće poznate činjenice:

Spojnica središta opisane kružnice nekog trokuta s njegovim težištem prolazi sjecištem svih triju njegovih visina, a zove se Eulerov pravac.

Feuerbachova kružnica nekog trokuta prolazi polovištima stranica, nožištima visina i polovištima spojnica svih triju vrhova sa sjecištem visina. Središte Feuerbachove kružnice nalazi se na Eulerovu pravcu, a polumjer joj je jednak polovici polumjera opisane kružnice zadanog trokuta.

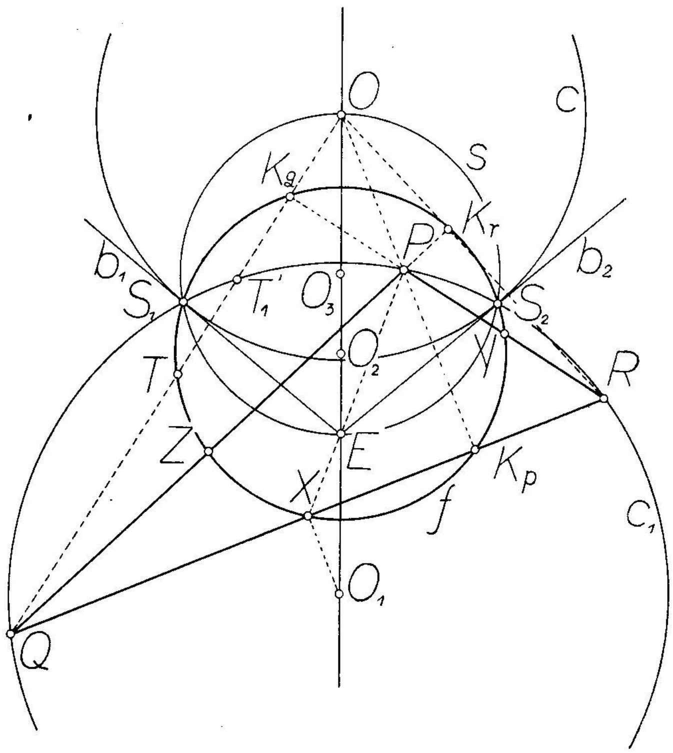
U ravnini: Neka je zadana kružnica *c* i njen polarni trokut *PQR*, kojemu je opisana kružnica c_1. Kružnice c i c_1 sijeku se u točkama S_1, S_2. Postavimo u vrhovima *P, Q i R* okomice na suprotne stranice, a dobivena nožišta označimo sa K_p, K_q i K_r. Tim nožištima određena je Feuerbachova kružnica *f* trokuta *P Q R sa središtem* O_2. Sve tri okomice prolaze središtem *O* kružnice *c*, jer je kod kružnice polara uvijek okomita na spojnici pola sa središtem. Odavle pak izlazi, da smo kružnicu *f* mogli dobiti inverzijom kružnice c_1 obzirom na kružnicu c. (Inverzija *Oc*).

Budući da je polumjer Feuerbachove kružnice jednak polovici polumjera polarnom trokutu *P Q R* opisane kružnice, dobivamo time uvjet, kojemu mora zadovoljavati neka kružnica c_1, da joj možemo upisati polaran trokut zadane kružnice c.

Budući da je kružnica *f* Feuerbachova kružnica za trokut *P Q R*, raspolavlja ona i stranice toga trokuta i to u točkama *X, Y* i *Z*. Kružnica c_1 neka ima središte O_1. Kružnice *f* i c_1 možemo uzeti da su u perspektivnom odnosu obzirom na centar O, pa iz omjera njihovih polumjera izlazi, da je $OO_2 = O_2 O_1$.

Uzmimo da točka $P = P^i$ putuje po kružnici c_1. Njena polara neka siječe kružnicu c_1 u točki $Q = Q_i$. Potražit ćemo sada, gdje se na toj polari nalazi treći vrh $R = R^i_i$ polarnih trokuta $P^i Q^i R^i$. Što opisuju točke R, ako točke P i Q^i putuju po c_1?

Uz točke P^i, Q^i na kružnici c_1 putuju njima inverzno pridružene točke K^i_p i K^i_q po kružnici f. Osim ovih točaka nalaze se



na ovoj kružnici i sve točke $T^i (OT^i = T^i Q^i)$. (Vidi sliku!) Kružnica f je dakle zajednička Feuerbachova kružnica za sve polarne trokute $P^i Q^i R^i$. Na njoj se prema tome nalazi i točka K^i_r, a njoj inverzno (Oc) pridružena točka R^i bit će prema tome na kružnici c_1. Vidimo dakle da:

Kružnici c_1 možemo upisati beskonačno mnogo polarnih trokuta kružnice c sa zajedničkom Feuerbachovom kružnicom.

Jedna stranica tih trokuta uvijek je realna, dok ostale dvije mogu biti realne ili imaginarne (konjugirano kompleksne), a mogu pasti i skupa. Tangente b_1 i b_2 *kružnice* c u točkama S_1, S_2 daju slučajeve, kad dvije realne stranice padnu skupa.

Središte O je nožište visina svih polarnih trokuta kružnice c, upisanih u kružnici c_1, jer su kružnice f i c_1 inverzno pridružene obzirom na kružnicu c. Budući da je nadalje točka O_1 središte svim tim trokutima opisane kružnice, svi ti trokuti imadu dakle zajednički Eulerov pravac, a prema tome i zajedničko težište E $(OE = 2\,EO_1)$.

Budući da se u tangentama b_1 *i* b_2 nalaze po dvije stranice dvaju degeneriranih polarnih trokuta, moraju i one prolaziti težištem E. Kružnica s postavljena točkama O, S_1, S_2 mora prema tome prolaziti i zajedničkim težištem E, a polumjer joj je jednak $1/3$ polumjera kružnice c_1, jer je OE promjer te kružnice.

U prostoru: Zadajmo kuglu φ sa središtem O_1 i jedan njen polarni tetraedar $ABCD$. Tom tetraedru opisanu kuglu označimo sa ψ, a njeno središte sa O_2. Spustimo okomice sa vrhova A, B, C, D na suprotne pobočke, a njihova nožišta označimo sa N_1, N_2, N_3, N_4. Sve četiri okomice sijeku se u točci O_1. Postavimo li mi točkama N_1, N_2, N_3, N_4 kuglu Σ, kojoj središte označimo sa O_3, tada možemo uzeti, da je ta kugla nastala inverzijom (φO_1) kugle ψ obzirom na kuglu φ.

Raspolovimo nadalje bridove našega tetraedra, a polovišta označimo sa M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 i M_6. Polovišta bridova AB, AC i BD neka su M_1, M_2 i M_3. Točkama M_1, M_2, M_3 određena je Feuerbachova kružnica trokuta ABC, a ona siječe stranice AB, AC i BC još i u nožištima H_1, H_2, H_3 okomica spuštenih iz vrhova C, B, A. Budući da su nasuprotni bridovi našeg polarnog tetraedra međusobno okomiti, ostaju točke M_1 i H_1 na bridu AB iste i za trokut ABD. Dakle Feuerbachova kružnica trokuta ABD siječe opet brid AB u točkama M_1 i H_1. Posvema analogno vrijedi za svaki brid tetraedra, jer se u svakom sijeku po dvije pobočke. Imamo četiri pobočke sa četiri Feuerbachove kružnice, a svaka pojedina siječe ostale tri u dvije zasebne točke. Dakle:

Feuerbachove kružnice pobočaka polarnog tetraedra kugle nalaze se na jednoj kugli.

Označimo ovu kuglu sa ω, a njeno središte sa O_4. Neka se kugle φ i ψ sijeku u kružnici k. Ravnina trokuta ABC neka siječe tu kružnicu u točkama S_1 i S_2, a tim točkama prolazi tom trokutu opisana kružnica c_2 i presječna kružnica c_1 sa kuglom φ. Probodište te ravnine sa spojnicom $O_1\,D$ je točka N_4, a njome prolaze okomice spuštene iz točaka A, B, C na suprotne stranice toga trokuta, jer je trokut ABC polaran za kružnicu c_1 sa središtem N_4. Feuerbachova kružnica c_1 trokuta ABC prolazi prema tome također točkama S_1, S_2, a analogno vrijedi i za ostale četiri takove kružnice tetraedra $ABCD$. Odavle izlazi, da kugla ω prolazi također kružnicom k, t. j. središta O_1, O_2, O_3 i O_4 nalaze se na jednom pravcu.

Budući da je središte Feuerbachove kružnice svakog trokuta u polovištu dužine između središta opisane kružnice i sjecišta svih triju okomica spuštenih sa vrhova na suprotne stranice, može se pomoću sličnosti trokuta lako dokazati u našem slučaju, da je $O_1 O_4 = O_4 O_2$, i da je polumjer kugle ω jednak polovici polumjera kugle ψ.

Feuerbachova kružnica trokuta ABC siječe spojnice točaka A, B, C sa točkom N_4 u polovištima P_1, P_2, P_3. Svakim vrhom tetraedra $ABCD$ prolaze tri takove spojnice, dakle ih imade svega 12. Kugla ω prolazi dakle uvijek kroz slijedeće 24 točke polarnog tetraedra $M_1, M_2, \ldots M_6, H_1, H_2, \ldots H_6, P_1, P_2, \ldots P_{12}$.

Ravnina trokuta ABC neka siječe kuglu Σ u kružnici c_3. Ova kružnica prolazi točkama N_4, S_1 i S_2, a iz ranijih razmatranja u ravnini znademo, da ona siječe spojnicu središta kružnice c_2 sa točkom N_4 u težištu trokuta ABC. Ostavimo li vrh D čvrst, tada je ovo težište zajedničko za sve autopolarne trokute $A' B' C'$ kružnice c_1 upisane u kružnici c_2. Svakom vrhu tetraedra $ABCD$ pridruženo je dakle po jedno takovo težište na kugli Σ. Pomoću sličnosti trokuta lako se može dokazati, da je polumjer kugle Σ jednak $1/3$ polumjera kugle ψ. Odavle prema tome izlazi:

Kugla inverzna opisanoj kugli polarnog tetraedra, obzirom na istu temeljnu kuglu, prolazi težištima pobočaka polarnog tetraedra, a polumjer joj je jednak $1/3$ polumjera opisane kugle.

Poradi $O_1 O_3 = 1/3\, O_1 O_2$ i $O_1 O_4 = O_4 O_2$ vrijedi i $O_3 O_4 = 1/3\, O_1 O_4$. Odavle se pak lako može zaključiti, da je središte O_4 pol ravnine kružnice k obzirom na kuglu φ, t. j. kugla ω ostaje inverzijom $(\varphi\, O_1)$ invarijantna.

Potražimo sada težište tetraedra $ABCD$. Težište nekog tetraedra dobije se općeno tako, da spojimo težišta pobočaka sa suprotnim vrhovima, ili da spojimo polovišta nasuprotnih bridova. Sve te spojnice sijeku se u težištu tetraedra. Težište tetraedra $ABCD$ jest u polovici spojnice središta nasuprotnih bridova. Središtima tih nasuprotnih bridova prolazi poznata kugla ω, dakle su spojnice tih nasuprotnih središta tetive te kugle. Sve tri tetive imadu zajedničko središte, a ne leže u istoj ravnini, dakle je to središte u središtu O_4 kugle ω. Prema tome izlazi:

Težište polarnog tetraedra kugle istovjetno je sa središtem kugle Feuerbachovih kružnica pobočaka tog tetraedra.

Poznat je slijedeći stavak od H. Neumana[1]: Težište nekog općeg tetraedra leži u središtu između središta opisane kugle i

---

[1] Neuman H.: Zum Eulerschen Dreiecksatz und seinem räumlichen Analogon. Jahresber. d. Deutsch. Math. Verein. 42, 266—274 1933.)

središta hiperboloida, koji prolazi normalama spuštenim iz vrhova na pobočke tog tetraedra.

U našem slučaju nalazi se središte tog hiperboloida u središtu O, dakle je zadovoljeno gornjemu stavku.

Poznat je nadalje slijedeći Hesseov[2] stavak: Nalaze li se uglovi polarnog tetraedra površine 2. reda φ na nekoj površini 2. reda ψ, tada je u površini ψ upisano beskonačno mnogo polarnih tetraedara površine φ.

U našoj kugli ψ možemo prema tome upisati beskonačno mnogo polarnih tetraedara kugle ψ. Središta O_1 i O_2 ostaju ista za sve te tetraedre, dakle svi ti tetraedri u kugli ψ imadu i zajedničke kugle ω i Σ.

Možemo prema tome postaviti ove stavke:

Feuerbachove kružnice pobočnih trokuta svih polarnih tetraedara kugle φ u kugli ψ, nalaze se na jednoj kugli ω. Polumjer te kugle jednak je polovici polumjera kugle ψ, a središte joj se nalazi u polovištu udaljenosti središta kugala φ i ψ.

Središte kugle ω jest zajedničko težište svih polarnih tetraedara kugle φ u kugli ψ.

Težišta pobočnih trokuta svih upisanih polarnih tetraedara kugle φ u kugli ψ nalaze se na kugli Σ, koju dobivamo inverzijom kugle ψ obzirom na kuglu φ. Polumjer kugle Σ jednak je $1/3$ polumjera kugle ψ.

Da se nekoj kugli ψ mogu upisati polarni tetraedri zadane kugle φ, mora ona zadovoljavati slijedeći uvjet:

Zadamo li u prostoru kuglu φ, tada će se ∞^3 polarnih tetraedara ove kugle moći upisati samo u onu kuglu ψ, kojoj će se polumjer odnositi prema polumjeru njoj inverzne kugle obzirom na kuglu φ kao $3:1$.

Svih kugala imade u prostoru ∞^4. Zadamo li neku temeljnu kuglu φ, tada je njome određeno ∞^3 kugala ψ. Svaka točka prostora može biti središte jedne takove kugle. Sve te kugle čine neki specijalni skup kugala (njemački: Kugelgebüsch).

Zadamo li uz kuglu φ još jednu točku, tada je time određen neki svežanj kugala (njemački: Kugelbündel).

Zadajmo točku P po volji izvan kugle φ. Na spojnici središta O_1 kugle φ sa točkom P nalazit će se još jedna točka P_1, kojom će prolaziti sve kugle ovoga svežnja — dakle će se središta svih kugala ovoga svežnja nalaziti u simetralnoj ravnini točaka P_2 P_1. Točku P_1 dobit ćemo tako, da podijelimo dužinu O_1 P u tri jednaka dijela. Inverzna točka prvoga djelišta kod točke O_1

[2] Hesse: Über die den Ecken der Polartetraeder einer Fläche 2. Ordnung umbeschriebenen Kugeln, Jour. für Math. Bd. 45 (1852) pag. 90.

jest tražena točka P_1. To izlazi iz perspektivnog odnosa kugala ψ i Σ i omjera njihovih polumjera 3 : 1.

Uzmemo li točku P na kugli φ, bit će središta svežnja kugala u ravnini usporednoj sa dirnom ravninom kugle φ u točki P, a udaljena od nje za polumjer kugle φ.

Prenesemo li ova razmatranja prostornom afinom transformacijom na elipsoide, možemo i za ove postaviti slijedeće stavke:

Svi polarni tetraedri nekog elipsoida, upisani u sličan i sa zadanim slično položeni elipsoid, imadu zajedničko težište. Ovo se težište nalazi u polovištu između središta tih dvaju elipsoida.

Težišta svih pobočaka tih tetraedara nalaze se opet na sličnom i sa zadanim slično položenom elipsoidu. Središte njegovo nalazi se u prvoj trećini udaljenosti gornjih središta, a omjer veličina osovina prema veličini osovina opisanog elipsoida odnosi se kao 1 : 3.