PRILOG ZAKRIVLJENOSTI PROSTORNE KRIVULJE

Vilim Niče, Zagreb.

Osi svih oskulacionih zavojnica, u povoljnoj točci prostorne krivulje, daju izvodnice Plückerovog konoida. Glavna normala krivulje je os toga konoida, a udaljenost između kuspidalnih točaka jednaka je polumjeru zakrivljenosti. Sama točka je kuspidalna za navedeni konoid.

Dokaz ovoga stavka izvodi se obično analitički pomoću prodorne linije toga konoida s uspravnim kružnim valjkom, kojemu je os glavna normala krivulje.[1] Pretpostavimo li poznavanje samo hiperoskulacionih kružnica u tjemenima elipse, može se taj dokaz izvesti i ovako:

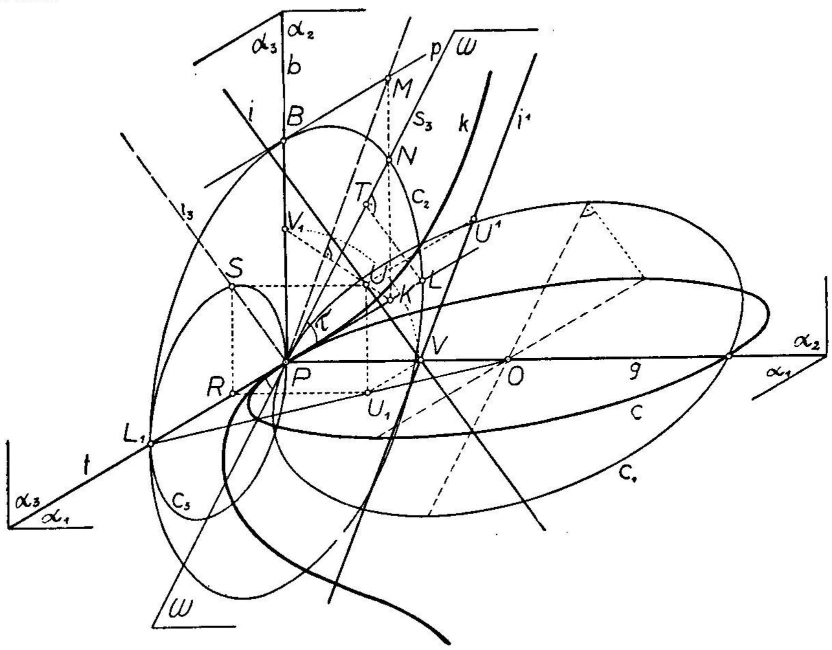
Plückerov konoid možemo definirati kao prodor specijalne linearne hiperbolne kongruencije, kojoj su provodnice

---

[1] G. Scheffers: Anw. der Dif. und Int. Rechnung auf Geometrie Bd. I str. 258.—259.

međusobno okomite, a jedna je u beskonačnosti, sa kongruencijom prvog reda drugog razreda bisekanata degeneriranog kubnog čunjosjeka u pravac i čunjosjek. Povučemo li svakom točkom provodnog čunjosjeka ove druge kongruencije usporednicu s njenim provodnim pravcem, moraju te usporednice činiti uspravan kružni valjak. Osim toga kongruencije moraju imati zajednički konačan provodni pravac.

Prodorom ovih dviju kongruencija nastaje Plückerov konoid.[2]



U povoljnoj točci P prostorne krivulje k neka je oskulaciona kružnica c, s polumjerom r i središtem O. Osovine svih oskulacionih zavojnica u točci P krivulje k moraju sjeći okomito glavnu normalu g krivulje k u toj točci, jer sve glavne normale zavojnica sijeku okomito njihove osi. Poznato je, da krivulja k i oskulaciona zavojnica imadu zajedničku oskulacionu kružnicu, tangentu, glavnu normalu i binormalu.

Svaka zavojnica određena je polumjerom valjka, na kojem se nalazi, priklonim kutem tangente prema njenoj osi i jednom točkom.

Označimo ravninu tangente t i glavne normale g sa α_1, ravninu glavne normale g i binormale b sa α_2 a ravninu binormale b i tangente t sa α_3. (Vidi sliku).

Postavimo glavnom normalom g povoljnu ravninu ω, koja sa ravninom α_1 zatvara kut τ. Oskulaciona kružnica c projicira se okomito na ravninu ω, u elipsu c_1.

[2] Rohn-Papperitz: Lehrbuch der Darst. Geometrie Bd. III str. 236. (Usporedi sa gore navedenim).

Potražit ćemo osovinu i one oskulacione zavojnice φ u točci P, kojoj je ta osovina okomita na ravninu ω. Uzmemo li bazu valjka te zavojnice φ u ravnini ω, tada će ta baza biti hiperoskulaciona kružnica elipse c_1 u točci P (velika os elipse c_1 leži u glavnoj normali g), a udaljenost presjecišta osi i sa glavnom normalom g od točke P bit će jednaka polumjeru zakrivljenosti ϱ elipse c_1 u tjemenu P.

Zavojnica φ određena je dakle s osi i, kutom τ i točkom P.

Svakoj ravnini ω_i glavne normale pridružena je na isti način po jedna zavojnica φ_n odnosno njezina os i_n. Ravnina ω_i imade ∞^1, dakle, toliko imade i osovina i_n.

Potražit ćemo sada geometrijsko mjesto svih takovih osovina.

Opišimo oko točke P u ravnini α_3 kružnicu c_2 s polumjerom r, koja siječe tangentu t u točkama L i L_1, a binormalu b u točci B! Ovu kružnicu c_2 dira u točci B tangenta p. Ravnina ω siječe ravninu α_3 u tragu s_3. Postavimo li mi u točci L okomicu na s_3 $(LT \perp s_3)$, tada je TP prava veličina male osi elipse c_1 (ali to nije mala os). Trag s_3 siječe kružnicu c_2 u točci N. Okomica spuštena iz te točke na tangente t i p siječe ove u točkama K i M, a $KP = TP$ radi jednakosti trokuta PNK i PLT. Okomica spuštena iz točke K na spojnicu PM siječe binormalu b u točci V_1, a dužina PV_1 daje nam veličinu polumjera zakrivljenosti ϱ elipse c_1 u točci P, jer je velika os te elipse jednaka $2PB$, a mala os $2PK$. Učinimo li sada na glavnoj normali g $PV = PV_1$, tada u točci V siječe osovina i glavnu normalu g.

Opišimo u ravnini α_3 kružnicu c_3 oko točaka P i L_1 sa središtem na t! Okomita projekcija i_3 osi i na ravninu α_3 okomita je na tragu s_3, a siječe kružnicu c_3 u točci S. Okomica spuštena iz te točke na tangentu t daje točku R, koja opet s točkom L_1 daje veličinu $RL_1 = \varrho$, što ćemo evo lako dokazati:

Označimo malu i veliku os elipse c_1 sa n i m. Iz jednakih trokuta L_1SP i PLT vidi se da je $PT = L_1S = n$, a $L_1P = PL = m$. Znademo također, da mora biti $\varrho = \dfrac{n^2}{m}$, $\sphericalangle SL_1P = \sphericalangle TPL$ i $\sphericalangle RSL_1 = \sphericalangle TLP$. Odavle pak izlazi:

$$SL_1 : L_1R = PL : PT = n : L_1R = m : n \qquad \text{ili}$$

$$L_1R = \frac{n^2}{m} = \varrho.$$

Povučemo li u ravnini α_1 točkom R paralelu sa g i točkom V pravac $s \parallel t$, tada se ti pravci sijeku u točci U_1. Svakoj ravnini ω_i pridružena je u ravnini α_1 takova jedna točka U^i_1, a sve te točke leže na spojnici L_1O, jer kod svake ravnine ω_i postoji $L_1R = PV_i = \varrho_i$. Okomica dignuta u točci U_1 siječe os i u točci U, a točke U_i svih ravnina ω_i nalazit će se u ravnini λ okomitoj na ravnini α_1 sa tragom OL_1 u toj ravnini.

Okomita projekcija točke U na ravninu α_3 pada u točku S, jer je $i \parallel i_3$. Svakoj ravnini ω_i pridružena je po jedna točka

S_i, a sve su te točke na kružnici c_3 jer za svaku ravninu ω_i postoji $\sphericalangle L_1 S_i P = 90^0$.

Vidimo dakle, da se sve točke U_i nalaze na presječnoj elipsi β ravnine λ s uspravnim kružnim valjkom, kojemu je baza c_3, a izvodnice su mu usporedne sa glavnom normalom g.

Uzmemo li mjesto ravnine ω neku ravninu ω_1, kojoj je prikloni kut τ_1 prema α_1 jednak $180^0 - \tau$, onda je tim dvim ravninama ω i ω_1 točka U_1 zajednička, dok točke U i U^1 te osi i, i^1 stoje prema ravnina α_1 simetrično.

Pustimo li da kut τ teži prema 0^0 ili 180^0, past će ravnine ω i ω_1 u oskulacionu ravninu α_1 pripadne osi i, i^1 stežu se u jedan pravac $t_1 \perp \alpha_1$, a $\varrho \rightarrow r$. Teži li nadalje τ prema 90^0, past će opet te ravnine skupa, pripadne osi stežu se u tangentu t, a $\varrho \rightarrow 0$.

Uzmimo sada glavnu normalu g kao konačni provodni pravac specijalne linearne hiperbolne kongruencije, kojoj je drugi beskonačno daleki provodni pravac određen direkcionom ravninom α_3. Čunjosjek β sa glavnom normalom g neka bude provodnica kongruencije prvog reda drugog razreda. Prodor tih dviju kongruencija sačinjava pravac g i sve naše osi i_n, dakle su one izvodnice Plückerovog konoida, jer i čunjosjek β ispunjava naprijed navedeni uvjet.

Glavna normala g je os toga konoida, točke P i O su kuspidalne točke, dok su pravci t i t_1 torzalni pravci.