IZVADAK IZ GODIŠNJAKA
GOD. 1929/30 — 1932/33

NIČE VILIM

HARMONIJSKI DVOOMJER

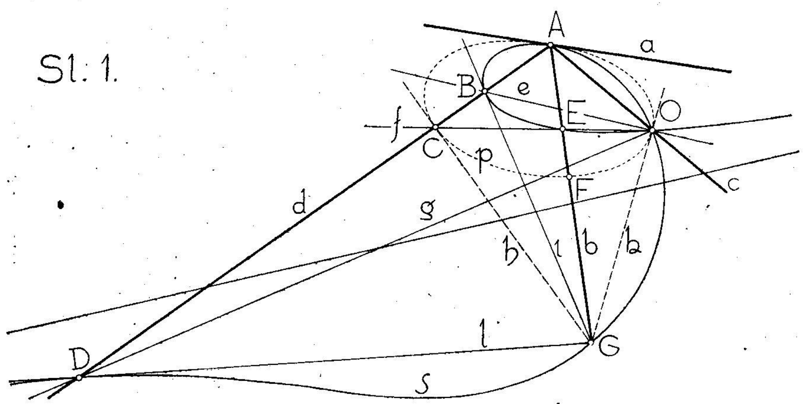
NA KRIVULJAMA 3 REDA RODA NULTOGA TE NJEGOVA PRIMJENA NA NEKE PRAVČASTE POVRŠINE 4 REDA

NIČE VILIM

HARMONIJSKI DVOOMJER NA KRIVULJAMA 3 REDA RODA NULTOGA TE NJEGOVA PRIMJENA NA NEKE PRAVČASTE POVRŠINE 4 REDA

1 Uvod. Odaberimo dvije konjugirane točke **B** i **D** na nekoj krivulji s trećeg reda sa dvostrukom točkom **O**. Pravac **BD** = **d** siječe tu krivulju u još jednoj točki **A**, kojoj je konjugirana točka **G**, jer se u njoj sijeku tangentne krivulje **s** u točkama **B** i **D**. Sl. br. 1. — Točku **G** prozvaćemo dir-

Sl: 1.



nom točkom konjugiranog para točaka **B D** (njemački Tangentialpunkt). Svakom paru konjugiranih točaka **B**$_i$ **D**$_i$ pridružen je na ovaj način drugi par konjugiranih točaka **A**$_i$ **G**$_i$.

Dokazaćemo sada u ovoj radnji, da tangenta **a** krivulje **s** u točki **A**, spojnica **c** ove točke sa dvostrukom točkom **O**, spojnica **b** sa njenom konjugiranom točkom **G** i spojnica **d** sa parom konjugiranih točaka **B** i **D** stoje u harmonijskom dvoomjeru:

$$(a\,b\,c\,d) = -1.$$

Ovaj dvoomjer postoji na svakoj krivulji 3 reda roda nultoga. Pokazaćemo u ovoj radnji i to, kako se ovaj harmonijski dvoomjer može primijeniti u konstruktivne svrhe na jednom dijelu pravčastih površina 4 reda, te ćemo odmah riješiti i dvije konstruktivne zadaće. Na dvostrukim pravcima ovog dijela površina 4 reda javlja se specijalan slučaj dvodvoznačne pridruženosti, pa ćemo i takove površine potanje opisati.

2 Dokaz harmonijskog dvoomjera. Uzimamo neku krivulju 3 reda roda prvoga, te na njoj odaberimo neku točku **A**. Povucimo ovom točkom sve četiri tangente $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ i $\mathbf{a}_4$ te krivulje, a njihova dirališta označimo sa $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ i $\mathbf{A}_4$. Spojnice točaka $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_4$ i $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ neka se sijeku u točki **B**, koja je opet na toj krivulji. Analogno se sijeku spojnice

[1]) Emil Weyer: Theorie der mehrdeut. geom. Elementargebilde und der algeb. Curven und Flächen als deren Erzeugnisse. II. Theil str. 91.

točaka A_1, A_3 i A_2, A_4 te A_1, A_2 i A_3, A_4 u točkama **C** i **D** ove krivulje.[2]) Zrake $BA = m$, $BA_4A_1 = n$, $BA_3A_2 = p$ i tangenta **t** ove krivulje u točki **B** čine harmonijski dvoomjer $(t\,m\,n\,p) = -1$[3]). Analogno vrijedi dabome i za točke **C** i **D.**

Provedemo li mi deformaciju te krivulje tako, da njen oval pređe u izoliranu i dvostruku točku[4]) tada bi naše točke A_2 i A_3 pale u tu točku, a tom točkom prolaziće prema tome i pravac **p.** Već odavle možemo zaključiti, da će naš harmonijski dvoomjer biti ispravan. Mi ćemo medjutim sada izvesti dokaz, koji će nam to strogo potvrditi odmah na krivulji roda nultoga.

Uzmimo na krivulji **s** u slici br. 1 točku **A** kao pol. Tangenta **a** krivulje **s** u toj točki je njena linearna polara, a u istoj točki tangira ona i svoju koničku polaru **p**[5]). Pravac $GO = k$ dira koničku polaru **p** u točki **O**, jer tangente krivulje **s** u toj točki i spojnice te točke sa svakim parom konjugiranih točaka stoje u harmonijskom dvoomjeru[6]). Pravac **d** neka siječe koničku polaru **p** u točki **C.** Iz definicije koničke polare slijedi harmonijski dvoomjer $(ACBD) = -1$. Pokazaćemo da pravac $GC = h$ dira čunjosjek **p** u točki **C.** Znademo, da se tangente **i** i **l** krivulje **s** u točkama **B** i **D** sijeku u točki **G** te krivulje. Pravac **i** imade u točki **B** dvije zajedničke točke sa krivuljom **s,** a isto i pravac **l** u točki **D.** Jer se točka **C** nalazi na pravcu **d,** na kojem se nalaze i točke **A, B** i **D,** slijedi iz definicije polara, da i pravac **k** mora imati u točki **C** dvije zajedničke točke sa koničkom polarom **p,** jer pravac **h** možemo uzeti kao polaru pola **A** obzirom na degenerirani čunjosjek **(i, l).** Slijedi dakle, da pravac **k** dira čunjosjek **p** u točki **C.** Ranije smo već vidjeli, da pravac $k = GO$ dira taj čunjosjek u točki **O.** Tangente **h** i **k** čunjosjeka **p** u točkama **C** i **O** sijeku se u **G,** dakle je točka **G** pol a pravac $CO = f$ njegova polara na tom čunjosjeku. Na temelju izvedenoga slijedi dalje da su pravci **b** i **f** konjugirane zrake čunjosjeka **p,** a odavde pak da je $(a\,b\,c\,d) = -1$[7]).

Vrlo se lako opaža, da i točke **A, E, B** i **D** stoje u harmonijskom dvoomjeru$(A\,E\,B\,D) = -1$, t. j. spojene sa dvostrukom točkom **O** daju četiri harmonijske zrake. Točke **A** i **E** su pridruženi par točaka centralne hiperboličke involucije na krivulji **s,** kojoj je točka **G** centar, a točke **B** i **D** dvostruke točke[8]). Iz ove involucije direktno slijedi navedeni harmonijski dvoomjer, a ova postoji jer točka **E,** u kojoj spojnica točaka **GA** siječe polaru **f** čunjosjeka **p** a pola **G** leži na krivulji **s** radi $(AFGE) = -1$. Kada se točka **G** nalazi na zatvorenom dijelu (petlji) krivulje **s,** tada je ta involucija eliptička.

3. Dokaz, ako je točka A na otvorenom dijelu krivulje s.

Uzmimo sada točku **A** na otvorenom dijelu krivulje **s**, te promotrimo poznati harmonijski dvoomjer u ovom slučaju. Točki **A** konjugirana točka **G** nalazi se na petlji krivulje **s,** pa su prema tome i konjugirane

[2]) H. Durège: Die ebene Kurven 3. Ordnung str. 231.

[3]) Karl Rohn: Beiträge zur Theorie der ebenen Kurven 3. Ordnung. (Berichte der Math. Phys. Klasse der Kön. Sächs. Gesellsch. der Wissen. Bd. L VIII).

[4]) G. Salmon und Fiedler: Analitische Geometrie der Höheren ebenen Kurven str. 231.

[5]) H. Grassmann: Projective Geometrie der Ebene II. Bd. 2. Theil str. 223.

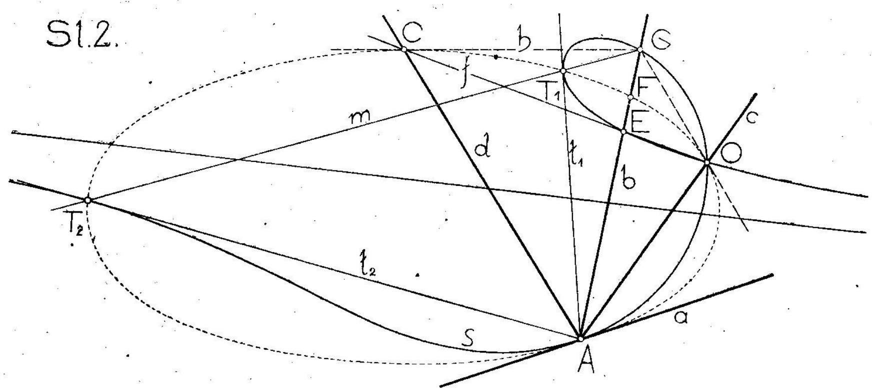
[6]) E. Weyer: Theor. d. mehr. geom. Elem. u. d. alg. Curv. u. Flächen etc. II. Theil strana 100.

[7]) Th. Reye: Die Geometrie der Lage Bd. I. str. 99.

[8]) E. Weyer: Th. der mehr. geom. El. u. alg. Curv. etc. II. Theil str. 101.

točke **B** i **D** imaginarne. Pravac **d** ostaje međutim realan, a na njemu se osim konjugiranih točaka **B** i **D** nalaze i realne točke **C** i **A**.

Pokazaćemo sada, da nam harmonijski dvoomjer $(t_1\ t_2\ c\ d) = -1$ daje pravac **d**, gdje su pravci t_1 i t_2 tangente krivulje **s**, koje prolaze točkom **A**. — Sl. br. 2. Poznato je, da su dirališta T_1 i T_2 konjugirani par točaka, kojemu je **A** dirna točka (Tangentialpunkt).



Polarni čunjosjek **p** dira kao i ranije pravac $GO = c$ u dvostrukoj točki **O** krivulje **s**. Spojnica **m** konjugiranog para $T_1\ T_2$ prolazi i točkom **G**, jer je ona konjugirana točki **A**. Nacrtamo li pravac **d** tako, da bude $(t_1\ t_2\ c\ d) = -1$, onda je točka $C = d \times p$ diralište tangente **h** povučene iz točke **G** na polarni čunjosjek **p**, radi harmonijskog dvoomjera točaka $(C\ O\ T_1\ T_2) = -1$ na tom čunjosjeku. Spojnica točaka **A** i **G** neka siječe polarni čunjosjek **p** u točki **F**. Iz harmonijskog dvoomjera $(C\ O\ A\ F) = -1$ na polarnom čunjosjeku **p** slijedi i naš poznati harmonijski dvoomjer $(abcd) = -1$.

Točka $E = b \times f$ je opet na krivulji **s**, a točke **A** i **E** daju par konjugiranih točaka centralne eliptičke involucije točke **G**.

4. Krivulja s sa izoliranom dvostrukom točkom.

Ako krivulja **s** imade izoliranu dvostruku točku, može se naš harmonijski dvoomjer $(a\ b\ c\ d) = -1$ dokazati na prvi ili drugi način, jer svakom točkom krivulje možemo na nju povući dvije realne tangente, dakle ostaju točke **B** i **D** kao i T_1 i T_2 uvijek realne.

5. Krivulja s sa šiljkom.

Ako je singularna točka naše krivulje **s** šiljak, tada je centralna involucija svake točke ove krivulje parabolička, a sve koničke polare prolaze šiljkom, te imadu u toj točki zajedničku tangentu sa krivuljom. U ovom bi slučaju uvijek po tri zrake našeg harmonijskog dvoomjera pale zajedno.

6. Pravčaste površine 4. reda, na kojima će se primijeniti dosadašnji izvodi.

Imademo li dva pravca, koji su nosioci jednostrukog i dvostrukog niza točaka jedno-dvoznačno pridruženih, tada spojnice pridruženih točaka daju izvodnice pravčaste površine 3 reda, kojoj su nosioci tih nizova jednostruki i dvostruki pravac.

Nalazi li se na svakom od ovih pravaca dvostruki niz točaka dvo-dvoznačno pridruženih tada spojnice pridruženih točaka daju izvodnice pravčaste površine 4 reda, kojoj su nosioci tih nizova dvostruki pravci površine. Ta se dvo-dvoznačna pridruženost konstruktivno postizava na poznati način sa čunjosjekom, t. j. izvodnice površine uzimamo kao zrake hiperbolne linearne kongruencije dvostrukih pravaca, koje prolaze jednim čunjosjekom.

Znademo da parovi točaka dvostrukog niza na jednostrukom pravcu pravčaste površine 3 reda čine kvadratnu involuciju. Između pravčastih površina 4 reda odabraćemo mi one, čiji parovi pridruženih točaka na njihovim dvostrukim pravcima čine analognu involuciju.

Promotrimo to malo pobliže. Općenito izvodnice pravčaste površine 4 reda pridružuju točke na njihovim dvostrukim pravcima na slijedeći način: Točki $\mathbf{A}_1$ prvog pravca pridružene su točke $\mathbf{A'}_1$ $\mathbf{A'}_2$ drugog pravca. Točki $\mathbf{A'}_1$ drugog pravca pridružena je na prvom pravcu točka $\mathbf{A}_1$ i neka točka $\mathbf{A}_2$, a točki $\mathbf{A'}_2$ drugog pravca pridružena je na prvom pravcu opet točka $\mathbf{A}_1$ i neka točka $\mathbf{A}_3$ i t. d. Padnu li na prvom pravcu točke $\mathbf{A}_2$ i $\mathbf{A}_3$ u jednu točku $(\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_3)$, tada je paru točaka $\mathbf{A}_1$ $\mathbf{A}_2$ prvog pravca pridružen par točaka $\mathbf{A'}_1$ $\mathbf{A'}_2$ drugog pravca i obratno. Ako su kod dvo-dvoznačnog snošaja ovako pridružena dva para, tada su tako pridruženi i svi ostali parovi, a svi takovi parovi čine kvadratne involucije na jednom i drugom dvostrukom pravcu.[9])

Pravčaste površine 4 reda, kojima su dvostruki pravci nosioci ovakovih projektivno pridruženih involucija, jesu one koje dolaze u obzir kod naših razmatranja. Na temelju takovih projektivnih involucija može se lako vidjeti, da su svakoj izvodnici takove površine pridružene daljnje tri, koje sa onom prvom čine vitoperi četverokut. Dvostruki pravci su dijagonale svakog takovog vitoperog četverokuta.

Jasno je da ovakovo svojstvo vitoperih četverokuta, t. j. projektivno pridružene kvadratne involucije na dvostrukoj crti, mogu imati i druge pravčaste površine 4 reda, a ne samo one kojima se dvostruka crta raspada u pravce. Budući kod takovih površina ne dolaze u obzir naši izvodi na krivuljama 3 reda, to se njima nećemo ni baviti.

7. Primjena izvedenog harmonijskog dvoomjera na opisane površine.

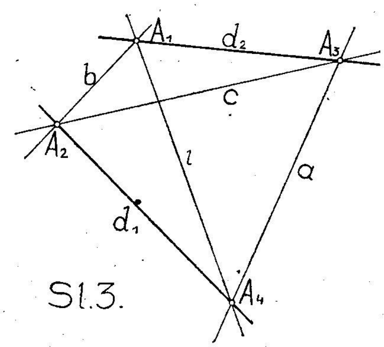
Na dvostrukim pravcima $\mathbf{d}_1$ i $\mathbf{d}_2$ neke malo prije opisane površine neka su poznata dva para pridruženih točaka i to točke $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_4$ na pravcu $\mathbf{d}_1$, a točke $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$ na pravcu $\mathbf{d}_2$. Sl. br. 3 Pravci $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_4 = \mathbf{i}$, $\mathbf{A}_3\,\mathbf{A}_4 = \mathbf{a}$, $\mathbf{A}_1\,\mathbf{A}_2 = \mathbf{b}$ i $\mathbf{A}_2\,\mathbf{A}_3 = \mathbf{c}$ su izvodnice površine, koje čine poznati vitoperi četverokut sa vrhovima $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ i $\mathbf{A}_4$.

Uzmimo izvodnicom $\mathbf{i}$ neku tangencijalnu ravninu. Točke $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_4$ biće točke presječene krivulje 3 reda roda nultoga, a tangente te krivulje u tim točkama biće presječnice te ravnine s ravninama $(\mathbf{b}, \mathbf{d}_2)$ i $(\mathbf{a}, \mathbf{d}_1)$. Ravnine $(\mathbf{a}, \mathbf{d}_1)$ i $(\mathbf{b}, \mathbf{d}_2)$ sijeku se u izvodnici $\mathbf{c}$, dakle se i tangente presječne krivulje u točkama $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_4$ sijeku u probodištu $\mathbf{C}$ izvodnice $\mathbf{c}$ sa tom tangencijalnom ravninom. Ovo probodište $\mathbf{C}$ je također točka pre-

[9]) Jan de Vries: Ueber die zwei-zweideutige Verwandschaft. (Nieuev Archief voor Wiskunde).

siječne krivulje, dakle su točke A_1 i A_4 konjugirane točke te krivulje, a točka **C** je njihova dirna točka (Tangentialpunkt). Evidentno je, da je niz dirališta tangencijalnih ravnina izvodnice **i** projektivan sa nizom pripadnih dirnih točaka na izvodnici **c**. Dvostruku točku presječne krivulje tangencijalne ravnine sa površinom daje probodište dvostruke izvodnice s tom ravninom.

Vezu između ovih razmatranja i onih ranijih uspostavićemo najjednostavnije tako, da diralište tangencijalne ravnine izvodnice **i** označima sa **A**, točke A_1 i A_4 sa **B** i **D** a točku **C** sa **G**.



Sl.3.

Uzmimo nadalje, da ova naša površina imade jedan par realnih torzalnih pravaca. Neke torzalne ravnine prolaze pravcem d_2, a kuspidalne točke nalaziće se onda na pravcu d_1. Naša tangencijalna ravnina položena izvodnicom **i** neka siječe torzalne pravce u točkama T_1 i T_2, koje su opet konjugirane točke presječne krivulje, jer se tangente te krivulje u tim točkama sijeku u točki A_1. Znademo da su točke A_1 i A_4 konjugirane, pa odatle slijedi da spojnica točaka T_1 i T_2 prolazi točkom A_4. — Koristeći se ovim i poznatim napred pokazanim harmonijskim dvoomjerima točaka (**A E B D**) = **-1** i pravaca (**a b c d**) = **-1**, izvešćemo pomoću njih neke konstruktivne zadaće na našim specijalnim pravčastim površinama 4 reda. Spomenućemo još, da među ovakove površine spadaju sve one, koje sačinjavaju normale površina drugog reda duž okomitog presjeka na jednu os.

8. Konstruktivne zadaće.

Neka se odredi diralište i glavna tangenta naše specijalne pravčaste površine 4 reda, ako joj je zadana tangencijalna ravnina.

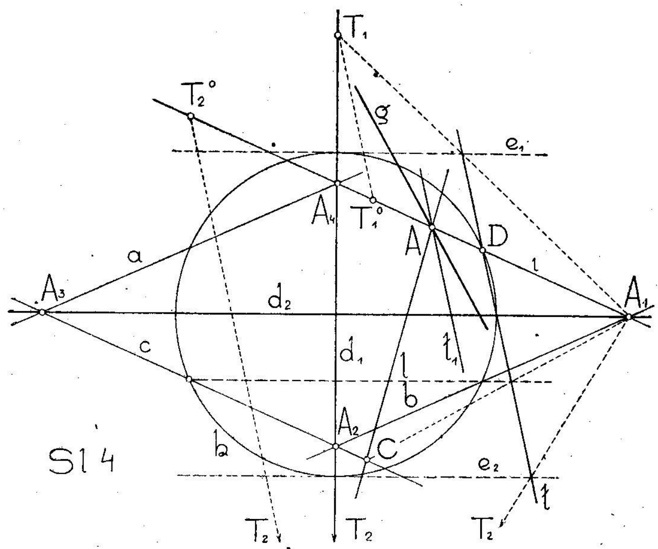
Zadana je površina kružnicom **k**, dvostrukim pravcima d_1 i d_2 koji su među sobom okomiti, paralelni sa ravninom kružnice **k** i jednako od nje udaljeni, a njihova najkraća transverzala neka prolazi središtem te kružnice. Konstrukciju ćemo izvesti u jednoj normalnoj projekciji i to u smjeru najkraće transverzale pravaca d_1 i d_2. Sl. br. 4.

Odaberimo na toj površini izvodnicu **i**, koja dvostruke pravce d_1 i d_2 siječe u točkama A_4 i A_1 a čunjosjek **k** u točki **D**. Izvodnicom **i** dan je cio poznati vitoperi četverokut, kojeg čine izvodnice **i**, **a**, **b** i **c**. Tragom **t** u ravnini kružnice **k** te izvodnicom **i** zadana je naša tangencijalna ravnina. Ta ravnina siječe torzalne pravce, koji prolaze kuspidalnim točkama pravca d_1 u točkama T_1 i T_2. Izvodnicu **c** siječe to ravnina u točki **C**, a dvostruka točka presječne krivulje nalazi se u beskonačnosti, jer je u beskonačnosti dvostruka izvodnica površine. Ova točka određena je tragom **t** kao direkcionim pravcem. Pomoću poznatog harmonijskog dvoomjera (T^0_1 T^0_2 A_4 **A**) = -1, (T^0_1 T_1 i T^0_2 T_2 || **t**) znademo odrediti diralište **A** te tangencijalne ravnine. Glavna tangenta površine **g** u točki **A** dana je harmonijskim dvoomjerom (**l g** t_1 **i**) = - 1 (**l** = **AC**, t_1 || **t**).

Kada bi nam bila dana obrnuta zadaća, naime u zadanom diralištu **A** treba odrediti tangencijalnu ravninu, onda bi diralištu **A** našli na izvodnici **c** pridruženu točku **C**, a tom točkom i izvodnicom **i** ta je ravnina određena.

Kako bi našli pridruženu točku **C**?

Nizovi točaka A_n i C_n na izvodnicama **i** i **c** projektivni su i to tako, da ih dvostruki pravci siječu u pridruženim točkama. Projiciramo li ih dakle u smjeru jednog dvostrukog pravca postaju oni perspektivni, a centar



Sl 4

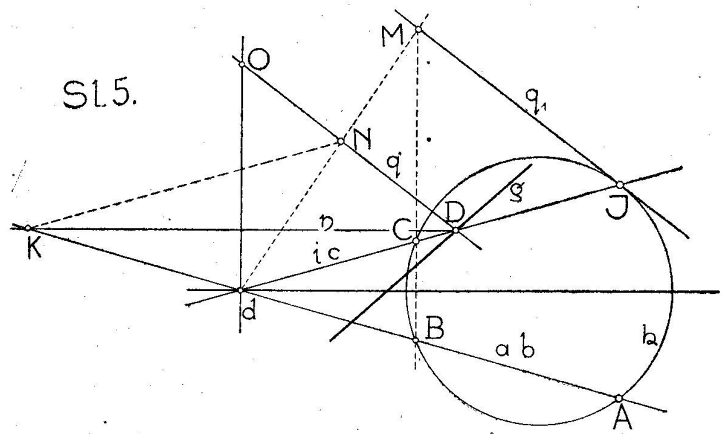
perspektiviteta nalazi se na projekciji drugog dvostrukog pravca. Spojnice pridruženih točaka projektivnih nizova izvodnica **i** i **c** daju izvodnice hiperboloida. U isti sistem izvodnica spadaju i dvostruki pravci. Spomenuti centar perspektiviteta je projekcija one izvodnice drugog sistema toga hiperboloida, koja je paralelna sa onim dvostrukim pravcem u čijem smo smjeru projicirali. Ako nam je dakle poznat jedan par pridruženih točaka znademo prema izvedenom odrediti i sve ostale parove.

Tangencijalnu ravninu površine u točki **A** možemo odrediti i na slijedeći način:

Tangente svih čunjosjeka površine duž izvodnice **i** čine opet sistem izvodnica nekog hiperboloida, jer ih možemo uzeti kao produkt dvaju projektivnih pramenova ravnina, kojima su nosioci izvodnica **i** te dvostruka izvodnica površine. U isti sistem spadaju i oba dvostruka pravca površine. Projiciramo li kao i ranije taj hiperboloid u smjeru jednog dvostrukog pravca, tada projekcije pridruženih nizova na izvodnici **i** i dvostrukoj izvodnici postaju perspektivni nizovi, kojima je centar perspektiviteta na drugom dvostrukom pravcu, posvema analogno kao malo ranije. Ako je dakle zadan jedan par pridruženih točaka ovih dvaju nizova, lako je odrediti ravninu kada je dano diralište i obratno. Jedan par pridruženih točaka za svaku izvodnicu lako je odrediti, ako je površina zadana čunjosjekom i dvostrukim pravcima. Ove dvije zadaće možemo na ovaj način riješiti na svakoj pravčastoj površini 4 reda, koja imade dvostruku izvodnicu.

Riješimo još jednu zadaću na konoidu 4 reda kao markantan primjer. Na zadanom konoidu 4 reda dana je točka **D**, treba u toj točki odrediti tangencijalnu ravninu i glavnu tangentu.

Neki konoid 4 reda, koji imade svojstvo vitoperih četverokuta, neka je zadan čunjosjekom **k** i dvostrukim pravcem **d**, koji je okomit na ravnini crtnje. Direkciona ravnina neka je ravnina crtnje. Konstrukciju ćemo izvesti opet u jednoj normalnoj projekciji. Sl. br. 5. Izvodnica **i** neka



siječe čunjosjek **k** u točki **I**. Na toj izvodnici odaberimo točku **D**. Projekcija **q** tangente u toj točki onog čunjosjeka, koji prolazi tom točkom, paralelna je sa projekcijom $\mathbf{q}_1$ tangente čunjosjeka **k** u točki **I**, jer je prvi dvostruki pravac **d** okomit na ravnini crtnje, a drugi se nalazi u beskonačnosti. Pravci **q** i $\mathbf{q}_1$ probadaju ravninu izvodnica **b** i **c** u točkama **N** i **M**, a pravac određen tim točkama siječe jedan i drugi dvostruki pravac, jer je izvodnica drugog sistema dirnog hiperboličnog paraboloida duž izvodnice **i**, u čiji prvi sistem izvodnica spadaju dvostruki pravci površine i tangente **q** i $\mathbf{q}_1$. Tangencijalna ravnina (**q**, **i**) u točki **D** siječe suprotnu stranicu **C** vitoperog četverokuta izvodnice **i** u točki **K** (**N K** || **i**), a dvostruku izvodnicu površine u točki **O**. Poznatim harmonijskim dvoomjerom (**q i n g**) = **-1** (**n** = **K D**) poslužićemo se sada, da odredimo glavnu tangentu. Ona je određena time što se nalazi u tangencijalnoj ravnini točke **D**, koja je pak određena pravcima **q**, **i**.

ZUSAMMENFASSUNG.

Ein harmonisches Doppelverhältnis der Kurven 3. Ordnung vom Geschlecht Null und seine Anwendung auf einige Regelflächen 4. Grades.

In einem Punkte **A** einer Kurve 3. Ordnung vom Geschlecht Null, besteht das harmonische Doppelverhältnis folgender Strahlen: Der Tangente im Punkte **A**, der Verbindungsgeraden des Punktes **A** mit seinem konjugierten Punkte **B** und dem Doppelpunkte der Kurve, und der Gerade des konjugierten Paares dem der Punkt **B** ein Tangentialpunkt ist.

Dieses Doppelverhältnis war in dieser Abhandlung ausgeführt und auch auf eine Art der Regelflächen 4. Grades bei ihrer konstruktiven Behandlung angewendet. Dieser Art Regelflächen 4. Grades gehören nur die mit zwei Doppelgeraden und einer Doppelerzeugenden an, wessen Doppelgeraden Träger zweier projektiv zugeordneten quadratischen Involutionen sind, also ein Sonderfall der zwei-zweideutigen Verwandschaft. Zwei Paare zugeordneter Erzeugenden solchartigen Regelflächen setzen immer ein unebenes Viereck zusammen, dem die Doppelgeraden der Regelfläche Diagonalen sind. Zum Schlusse sind noch zwei konstruktive Aufgaben gelöst worden.