NEKI IZVODI ZA KONOIDE TREĆEG I ČETVRTOG REDA

NAPISAO

VILIM NITSCHE

PREŠTAMPANO IZ „NASTAVNOG VJESNIKA“ KNJ. XXXVII. SV. 5-6.

ZAGREB 1929.
TISAK ZAKLADE TISKARE NARODNIH NOVINA

Poznato je svojstvo Plückerovog konoida, da su projekcije svih čunjosjeka na tome konoidu kružnice, ako te čunjosjeke normalno projiciramo na direkcionu ravninu. Točnijim istraživanjem konoida trećeg i četvrtog reda pokazuje se, da analogno svojstvo imaju svi ti konoidi, dok je Plückerov konoid među njima samo jedan specijalan slučaj. Mi ćemo potanje promotriti to svojstvo konoida trećeg i četvrtog reda, koje glasi:

„Svi čunjosjeci na konoidima trećeg ili četvrtog reda, projicirani u smjeru dvostrukog pravca tih konoida na neku povoljnu ravninu, daju uvijek slične i slično položene čunjosjeke".

Projicirati paralelno u smjeru dvostrukog pravca znači isto, što i projicirati iz njegove beskonačno daleke točke. Ako se to središte projiciranja nalazi negdje u konačnosti na dvostrukom pravcu, tada više ne vrijedi ovaj stavak već slijedeći:

„Svi čunjosjeci na konoidima trećeg ili četvrtog reda, projicirani na direkcionu ravninu iz neke konačne točke dvostrukog pravca tih konoida, daju uvijek slične i slično položene čunosjeke. I to samo na direkcionu ravninu".

Ispravnost ovih stavaka dokazati ćemo u ovoj radnji i to, prvi ćemo stavak dokazati u drugom dijelu, a drugi stavak u trećem dijelu ove radnje. U prvom dijelu ćemo izvesti neke potrebne dokaze i dati kratki pregled o postanku konoida trećeg i četvrtog reda, sa naročitim obzirom na njihovo najednostavnije konstruktivno određivanje.

DIO I.

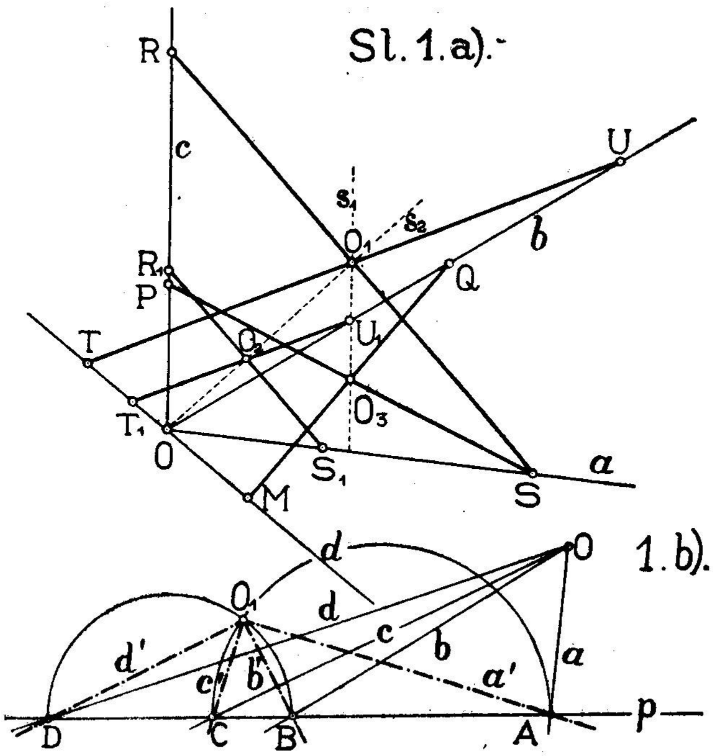
a) Dokazi.

Neka su zadane povoljne četiri harmonijske zrake a, b, c i d $[(a\,c\,b\,d) = -1]$, koje izlaze iz točke O. (Sl. 1 a). Presijecimo zraku a nekim povoljnim pravcem u točci S a zraku c u točci R. Polovištem O_1 dužine RS povucimo novi pravac, koji zrake b i d siječe u točkama T i U tako, da je $TO_1 = O_1U$. Uzmimo sada, da su dužine RS i TU konjugirani dijametri nekog čunjosjeka c_1 sa središtem u točci O_1. Svakoj točci ravnine pripada kao središtu čunjosjeka jedan par takovih konjugiranih dijametara, a mi ćemo dokazati, da su svi takovi čunjosjeci slični i slično položeni. Konstruirajmo još jedan par takovih konjugiranih dijametara PS i MQ nekog čunjosjeka c_3 tako, da je krajnja točka jednog dijametra opet u točci S. Središta O_1 i O_3 moraju ležati na pravcu $s_1 \parallel c$. Svi ovakovi čunjosjeci, kojima je točka S uvijek krajnja točka jednog dijametra, a njegov drugi vrh leži na pravcu c, dok su krajnje točke konjugiranih dijametara na zrakama b i

*

d, sačinjavaju pramen sličnih i slično položenih čunjosjeka sa čvrstim točkama O i S.

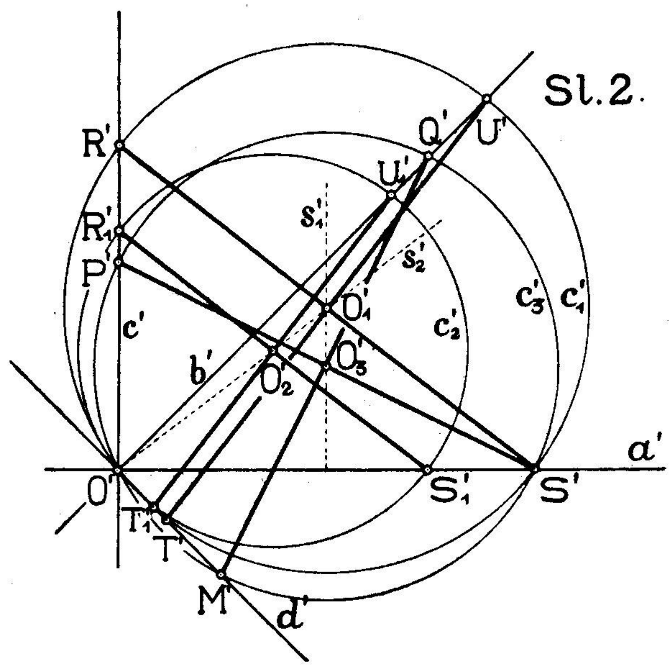
Harmonijske zrake a, c, b i d neka se nalaze u nekoj ravnini ρ. Zgodno odabranim smjerom možemo te zrake paralelno projicirati u neku drugu ravninu ρ' tako, da bude $a' \perp c'$ i $b' \perp d'$ te zraka b' odnosno d' da raspolavlja $\sphericalangle\,(c'\,a')$. Pramenu čunjosjeka $c_1, c_3, \ldots$ u ravnini ρ odgovarati će u ravnini ρ' neki drugi pramen čunjosjeka $c'_4, c'_3 \ldots$, koji sa prijašnjim stoji u afinom snošaju, ako sve skupa zamislimo paralelno projicirano u ravninu crtnje. Jasno je, da i u ravnini ρ' ostaje $(a'\,c'\,b'\,d') = -1$.



Konstruktivno možemo to pokazati vrlo jednostavno na slijedeći način. (Sl. 1 b). Harmonijske zrake a, c, b i d sa ishodištem O presijecimo nekim pravcem p u točkama A, C, B i D te oko dužina AC i BD opišimo polukružnice. Presječnu točku O_1 ovih polukružnica spojimo sa točkama A, C, B i D. Nastali pravci a', c', b' i d' su opet četiri harmonijske zrake $(a'\,c'\,b'\,d') = -1$, koje odgovaraju malo prije navedenim uvjetima t. j. $a' \perp c'$, $b' \perp d'$ i $\sphericalangle\,(d'\,c') = \sphericalangle\,(c'\,b')$ odnosno $\sphericalangle\,(c'\,b') = \sphericalangle\,(b'\,a')$. Pravce a, c, b i d možemo uzeti da se nalaze u ravnini ρ, a pravci a', c', b' i d' u ravnini ρ'. Pravac p je onda presječnica tih ravnina, a spojnica točaka O i O_1 smjer zrake projiciranja. Ili pak, pravac p je os afiniteta a spojnica točaka O i O_1 je zraka afiniteta. Ravnine ρ i ρ' možemo shvatiti kao dva kolinearna afina polja.[1]

Dokažemo li sada, da su svi čunjosjeci pramena u ravnini ρ' slični i slično položeni, moraju prema gornjemu isto takovi biti i oni u pramenu ravnine ρ. Dokazati ćemo, da su svi čunjosjeci pramena ravnine ρ' slični i slično položeni.

Zrakama a, b, c i d u ravnini ρ odgovaraju zrake a', b', c' i d' u ravnini ρ'. (Sl. 2.). Točkama S i R ravnine ρ neka pripadaju točke S' i R' u ravnini ρ', pravcu s_1 mora odgovarati pravac $s'_1 \parallel c'$ a dijametru TU odgovara dijametar $T'U'$. U trokutu $S'O'R'$



Sl. 2.

je kut $\sphericalangle S'O'R' = 90^0$, jer je $a' \perp c'$. Isto je tako u trokutu $T'O'U'$ $\sphericalangle T'O'U' = 90^0$, jer je $b' \perp d'$. Budući da hipotenuze $S'R'$ i $T'U'$ pravokutnih trokuta $S'O'R'$ i $T'O'U'$ prolaze točkom O'_1, a oba se vrha pravih kutova nalaze u točci O' slijedi, da ovaj čunjosjek može biti samo kružnica, kojoj je točka O'_1 središte a O' jedna njezina točka. Valja još dokazati, da je $T'U' \perp S'R'$, odnosno da su to konjugirani dijametri kružnice, jer konjugirani dijametri i nakon svake paralelne projekcije ostaju konjugirani.

$\sphericalangle S'O'U' = {}^1/_2 \sphericalangle S'O'R' = 45^0$ a $\sphericalangle S'O'_1U' = 2 \sphericalangle S'O'U' = 90^0$, jer je $\sphericalangle S'O'_1U'$ središnji a $\sphericalangle S'O'U'$ obodni kut na luku $S'U'$. Dakle je $T'U' \perp S'R'$.

[1] Vidi: Dr. Th. Reye: Die Geom. der Lage. Sv. II. str. 55.

Isto što vrijedi za čunjosjek c'_1 vrijedi i za čunjosjek c'_3, jer konjugiranim dijametrima SP i MQ u ravnini ρ, odgovaraju u ravnini ρ' međusobno okomiti dijametri $S'P'$ i $M'Q'$ kružnice c'_3. Time je naš dokaz izveden.

Uzmemo li da je O_2 središte nekog trećeg čunjosjeka c_2 na pravcu s_2 (spojnici točaka O i O_1), tada njegovim konjugiranim dijametrima S_1R_1 i T_1U_1 u ravnini ρ odgovaraju okomiti dijametri $R'_1S'_1$ i $T'_1U'_1$ kružnice c'_2 u ravnini ρ'. No u ovom se slučaju može dokaz izvesti vrlo jednostavno i ovim putem:

Povucimo točkom O pravce $l \parallel SR$ i $k \parallel TU$ odnosno točkom O' pravce $l' \parallel S'R'$ i $k' \parallel T'U'$. Iz ranije danog uvjeta, da je $TO_1 = O_1U$ i $RO_1 = O_1S$ odnosno $T'O'_1 = O'_1U'$ i $R'O'_1 = O'_1S'$ slijedi, da je $(a\,c\,s_2\,l) = -1$ i $(b\,d\,s_2\,k) = -1$ odnosno $(a'\,c'\,s'_2\,l') = -1$ i $(b'\,d'\,s'_2\,k') = -1$. Paralelno povučene pravce sa konjugiranim dijametrima S_1R_1 i T_1U_1 čunjosjeka c_2 označimo sa l_1 i k_1, odnosno $l'_1 \parallel S'_1R'_1$ i $k'_1 \parallel T'_1U'_1$. Budući da se središte O_2 čunjosjeka c_2 nalazi također na pravcu s_2, odnosno središte O'_2 na pravcu s'_2 to i za ovaj čunjosjek vrijedi $(a\,c\,s_2\,l_1) = -1$ i $(b\,d\,s_2\,k_1) = -1$ odnosno $(a'\,c'\,s'_2\,l'_1) = -1$ i $(b'\,d'\,s'_2\,k'_1) = -1$. Odavle slijedi, da je $l = l_1$, $l' = l'_1$, $k = k_1$ i $k' = k'_1$ ili $SR \parallel S_1R_1$, $TU \parallel T_1U_1$, $S'R' \parallel S'_1R'_1$ i $T'U' \parallel T'_1U'_1$.

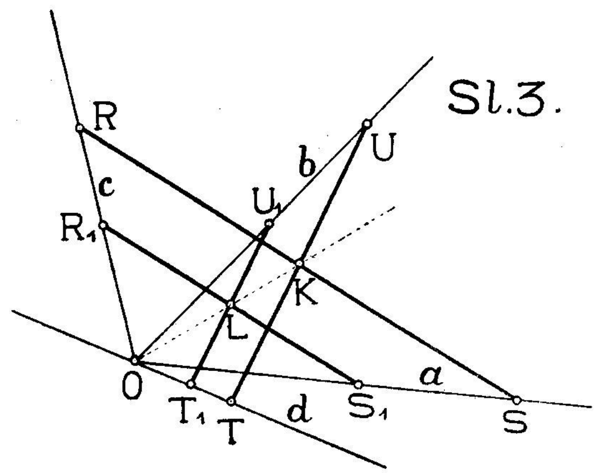
Pomoću sličnosti trokuta dokazati ćemo sada, da je čunjosjek c_2 sličan i slično položen sa čunjosjekom c_1, odnosno c'_2 sličan i slično položen sa c'_1.

Iz slike 1. se vidi, da vrijede ovi omjeri:

$RO_1 : R_1O_2 = O_1O : O_2O = TO_1 : T_1O_2$ ili $RO_1 : TO_1 = R_1O_2 : T_1O_2 = C$.

Posve analogno i u ravnini ρ'. Ovaj dokaz vrijedi za sve čunjosjeke, čija se središta nalaze na pravcu s_2 odnosno s'_2. Konjugirani dijametri su paralelni a omjer njihovih dužina je konstantan, dakle su ti čunjosjeci slični i slično položeni. Svi ovakovi čunjosjeci sa središtima na pravcu s_2 prolaze točkom O, u kojoj imadu zajedničku tangentu.

Najprije smo dokazali za pramen čunjosjeka sa čvrstim točkama S i O da su mu svi čunjosjeci slični i slično položeni, a sada vidimo da to vrijedi i za pramen onih čunjosjeka, čija se središta nalaze na pravcu s_2, a čvrsta točka im je u O kojom prolazi čvrsta tangenta tog pramena. Pravac s_2 odnosno s'_2 možemo po volji okretati oko točke O odnosno O' a pravac s_1 odnosno s'_1 po volji paralelno pomicati lijevo i desno. Točka S odnosno S' putuje u drugom slučaju po zraci a odnosno a'. Ovim gibanjem možemo dohvatiti svih ∞^2 točaka ravnine ρ odnosno ρ' kao središta čunjosjeka. Slijedi dakle zaključak, da su svi čunjosjeci u ravnini ρ, čiji konjugirani dijametri odgovaraju poznatim uvjetima, slični i slično položeni. Držimo, da nije potrebno isticati, da se gornji dokazi tiču samo onih čunjosjeka, čiji su konjugirani dijametri realni i konačni (elipse). Ako je jedan između konjugiranih dijametara imaginaran (hiperbola) ili jedan beskonačno velik (parabola), tada se uvijek može sličnim putem dokazati, da su svim čunjosjecima u prvom slučaju obje beskonačno daleke točke zajedničke, t. j. sve asimptote su paralelne. U drugom slučaju zajednička je svim čunjosjecima beskonačno daleka točka, odnosno osovine svih parabola su paralelne. Sve parabole su već same po sebi međusobom slične (Apolonius) i tako vidimo, da su i u ovim slučajevima svi čunjosjeci slični i slično položeni.



Sl. 3.

Ako su odgovarajući dijametri čunjosjeka c_1 i c_3 paralelni, može se posve istim načinom kao i prije dokazati, da su ovi čunjosjeci slični i slično položeni i u onom slučaju, ako zrake *a*, *b*, *c* i *d* nijesu harmonijske, već stoje u makakovom dvoomjeru (Sl. 3.). Ako središta L i K čunjosjeka c_1 i c_3 te ishodište zraka O leže na jednom pravcu, dokazuje se opet posve isto kao i kod harmonijskih zraka, da je $SR \parallel S_1R_1$ i $TU \parallel T_1U_1$ i obrnuto. U ovakovom slučaju ne prolaze čunjosjeci ishodištem O zraka *a*, *b*, *c* i *d*.

Da je $UK : RK = U_1L : R_1L = C$ slijedi iz sličnosti trokuta RKU i R_1LU_1, kada su točke O, L i K na jednom pravcu. Dakle slijedi, da su i svi ovakovi čunjosjeci slični i slično položeni, samo ako im se sva središta nalaze na nekom pravcu koji prolazi ishodištem O, odnosno ako su im paralelni odgovarajući dijametri.

b) Nešto o konoidima trećega i četvrtoga reda.

Neka su u prostoru zadana dva mimosmjerna pravca *a* i *b*. Pravac *a* neka je nosioc jednostrukog pramena ravnina a pravac *b* dvostrukog pramena ravnina. Ova dva pramena neka se nalaze u jednodvoznačnom snošaju, t. j. jednoj ravnini pramena *a* odgovaraju dvije ravnine pramena *b* i jednoj ravnini pramena *b* odgovara samo jedna ravnina pramena *a*. Presječnice su pridruženih ravnina izvodnice pravčaste površine trećeg reda. Pravac *a* je jednostruki a pravac *b* dvostruki pravac površine. Ako se nosioc jednog pramena nalazi u beskonačnosti, tada se takova površina zove konoid trećeg reda.

Ako su oba pravca *a* i *b* nosioci dvostrukih pramenova, t. j. jednoj ravnini pramena *a* odgovaraju dvije ravnine pramena *b* i obrnuto, tada su presječnice pridruženih ravnina izvodnice pravčaste površine četvrtog reda. Ako se nosioc jednog pramena nalazi u beskonačnosti, tada imademo opet konoid, ali četvrtog reda. Nosioci dvostrukih pramenova daju uvijek dvostruke pravce površine, jer se u svakoj njihovoj točci sijeku dvije izvodnice površine. Ako se oba nosioca nalaze u beskonačnosti, tada se u prvom i u drugom slučaju konoidi reduciraju na valjak drugoga reda.

Izim ovakovih pravčastih površina četvrtoga reda imade još i drugih vrsta, ali tima se mi nećemo baviti, jer nas zanimaju samo konoidi četvrtog reda. Poznato je, da se pravčaste površine četvrtoga reda dijele u glavnome u tri vrste.[2] Nas zanimaju samo one površine, kod kojih se kubna krivulja dvostrukih točaka tih površina raspada u tri pravca, jer u ovu vrst spadaju i konoidi četvrtog reda. Dvostruka kubna krivulja površine raspada se u dva dvostruka pravca i jednu dvostruku izvodnicu površine.[3]

Konstruktivno može se navedena jedno-dvoznačnost odnosno dvo-dvoznačnost postići na taj način, da si uz nosioce *a* i *b* zadamo još i jedan čunjosjek *c*. Neka recimo pravac *b* siječe čunjosjek *c*. Svaka ravnina položena pravcem *a* siječe čunjosjek *c* u dvije točke. Ovim točkama i pravcem *b* položene ravnine jesu ravnine pramena *b*, koje odgovaraju onoj ravnini pramena *a*, kojom smo sjekli čunjosjek *c*. Svaka ravnina položena pravcem *b* siječe čunjosjek *c* samo još u jednoj točci, analogno prema gornjemu slijedi dakle, da toj ravnini odgovara samo jedna ravnina pramena *a*. Ako nijedan od pravaca *a* i *b* ne siječe čunjosjek *c*, tada se odmah vidi, da su pravci *a* i *b* nosioci dvaju dvo-dvoznačnih pramenova ravnina. Za beskonačno daleki pravac znademo, da je on određen direkcionom ravninom.

---

[2] Vidi: Dr. Th. Reye: Die Geomet. der Lage Sv. II. str. 301.
[3] Vidi: Dr. K. Rohn i Dr. E. Papperitz: Lehrbuch der darst. Geomet. Sv. III. str. 256—258.

Konoidi trećega reda određeni su dakle sa jednim čunjosjekom i jednim pravcem koji taj čunjosjek siječe, te direkcionom ravninom. Ako prvi pravac siječe čunjosjek (hiperbolu ili parabolu) u beskonačnosti, tada drugi pravac (jednostruki) mora biti u konačnosti, jer bi se u protivnom slučaju konoid reducirao na valjak drugog reda. Ovaj ćemo slučaj kasnije još spomenuti u našoj radnji.

Konoidi četvrtoga reda određeni su prema gornjem izlaganju sa čunjosjekom, nekim pravcem koji taj čunjosjek ne siječe i direkcionom ravninom.

Konoidi trećeg i četvrtog reda određeni su i nekim drugim elementima, ali radi jednostavnosti u konstrukcijama mi ćemo ih zadavati u ovoj radnji samo gore navedenim elementima.

DIO II.

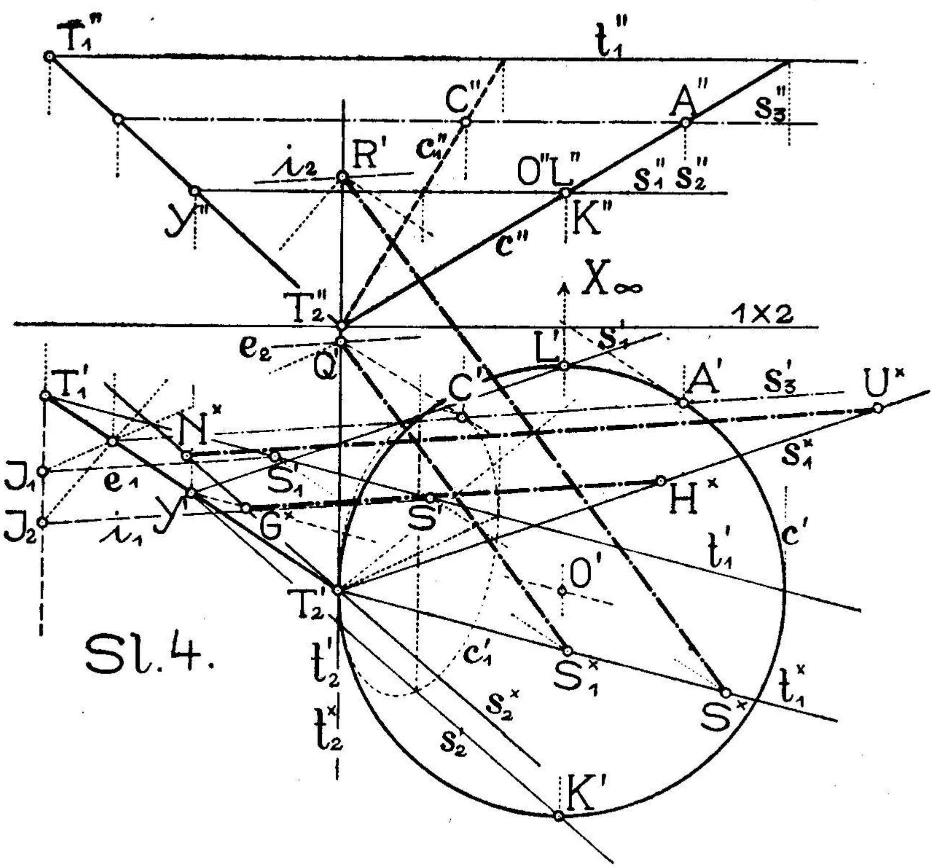
a) Konoidi trećeg reda.

U prvom stavku istaknuto svojstvo konoida trećeg i četvrtog reda promotriti ćemo sada na jednom posve povoljnom konoidu trećeg reda, kojega ćemo prikazati pomoću tlocrta i nacrta. Uzeti ćemo takav konoid trećeg reda, kojemu se jednostruki pravac nalazi u beskonačnosti. Neka je taj konoid zadan dvostrukim pravcem T_1T_2 te izvodnim čunjosjekom c. Radi jednostavnijeg crtanja, neka je ravnina čunjosjeka c okomita na nacrtnu ravninu π_2, a zajednička točka T_2 dvostrukog pravca i izvodnog čunjosjeka c neka se nalazi u diralištu tog čunjosjeka sa tlocrtnom ravninom π_1. Nadalje uzmimo da se čunjosjok c projicira u ravninu π_1 kao kružnica c', a direkciona ravnina konoida neka je ravnina π_1. Ravnina čunjosjeka c prolazi dakle torzalnim pravcem t_2 u ravnini π_1. Projekciju u smjeru dvostrukog pravca kod konoida trećeg i četvrtog reda, zvati ćemo u ovom dijelu naše radnje ukratko kosom projekcijom.

Položimo izvodnicom s_3 tangencijalnu ravninu σ_1 na naš konoid i to u točci $A = s_3 \times c$, te potražimo kosu projekciju presječnog čunjosjeka, odnosno jednog para njegovih konjugiranih dijametara na ravninu π_1. (Sl. 4.). Tangenta čunjosjeka c u točci A probada ravninu π_1 u točci R torzalnog pravca t_2. Prvi trag i_2 ove ravnine paralelan je sa izvodnicom s_3, jer je $s_3 \parallel \pi_1$. Torzalni pravac t_1 probada ovu ravninu u točci $S = i_1 \times t_1$ $i_1 = \sigma_1 \times \pi'_1$. Ravnina π'_1 prolazi torzalnim pravcem t_1 a $\pi'_1 \parallel \pi_1$. Spojnica točaka R i S daje nam jedan dijametar presječnog čunjosjeka, jer su tangente i_1 i i_2 toga čunjosjeka u točkama S i R paralelne. Njemu konjugirani dijametar mora prolaziti polovištem dužine RS i biti paralelan sa tragovima i_1 i i_2. Polovištem dužine RS prolazi ravnina izvodnica s_1 i s_2 našega konoida. Pravac povučen tim polovištem paralelno sa tragovima

i_1 i i_2 nalazi se u ravnini izvodnica s_1 i s_2, koje siječe u točkama U i N. Dužina UN je konjugirani dijametar dijametru RS. Konstruktivni postupak u našoj slici mi smo nešto skratili, jer se kosa projekcija gornjih konjugiranih dijametara može odmah vrlo jednostavno nacrtati radi $UN \parallel s_3$.

Vidjeli smo, da se krajnje točke jednog dijametra nalaze na torzalnim pravcima t_1 i t_2, a krajnje točke njemu konjugiranog dijametra na izvodnicama s_1 i s_2, čija ravnina raspolavlja udaljenost između torzalnih pravaca t_1 i t_2 te je s njima paralelna.



Sl. 4.

Vrlo se lako razabire, da ovo što vrijedi za konjugirane dijametre ovog čunjosjeka, vrijedi za jedan par konjugiranih dijametara svakog čunjosjeka na tome konoidu, jer svaka presječna krivulja konoida imade u svojim zajedničkim točkama sa torzalnim pravcima paralelne tangente.

Kose projekcije krajnjih točaka dijametara, moraju se prema gornjemu nalaziti u kosim projekcijama pravaca t_1, t_2, s_1 i s_2. I to točka $R^* = R'$ na pravcu $t^*_2 = t'_2$, točka S^* na pravcu t^*_1, točka U^* na pravcu s^*_1 i točka N^* na pravcu s^*_2. Pravci t^*_1, t^*_2,

s^*_1 i s^*_2 su četiri harmonijske zrake sa ishodištem u točci T'_2. Da je u istinu $(s^*_2\, s^*_1\, t^*_2\, t^*_1) = -1$ dokazati ćemo na slijedeći način:

Pravac $t_1 \parallel YO$ jer jè $T_1Y = YT_2$ a $LK \parallel t_2$ ($L = s_1 \times c$, $K = s_2 \times c$). Paralelan pravac sa pravcem t_2 povučen točkom Y, siječe pravac KL u točci $X_\infty = \infty$. A jer je $KO = OL$ slijedi $KO : LO = -(KX_\infty : LX_\infty)$ ili sve zajedno koso projicirano u ravninu π_1 daje $(s^*_2\, s^*_1\, t^*_2{}^*\, t^*_1) = -1$.

Torzalnim pravcem t_2 uzmimo sada neku novu ravninu, koja naš konoid siječe u čunjosjeku c_1. U zajedničkoj točci C ovog čunjosjeka i poznate izvodnice s_3, postavimo novu tangencijalnu ravninu σ_2 na naš konoid. Posvema istim postupkom kao u točci A, nađimo sada kosu projekciju na ravninu π_1 konjugiranih dijametara presječnog čunjosjeka našeg konoida sa tangencijalnom ravninom σ_2. Tangentu elipse c'_1 u točci C' možemo točno konstruirati poznatim konstrukcijama kod afiniteta, jer je i čunjosjek c_1 određen sa dva konjugirana dijametra, koji su istovrsni sa poznatim konjugiranim dijametrima ostalih čunjosjeka na tome konoidu.

Konjugirani dijametri kose projekcije presječnog čunjosjeka konoida sa ravninom σ_2, dani su točkama S^*_1 i Q' na pravcima t^*_1 i $t^*_2 = t'_2$, te točkama G^* *i* H^* na pravcima s^*_2 i s^*_1. Tragovi c_2 i c_1 ravnine σ_2 u ravninama π_1 i π'_1 moraju biti paralelni sa tragovima i_2 i i_1 ravnine σ_1, jer su svi paralelni sa izvodnicom s_3.

Dijametri $Q'S^*_1$ i $R'S^*$ paralelni su jer postoje slijedeći omjeri:

$$R'T'_2 : Q'T_2' = I_2T'_1 : I_1T'_1 = S\,T'_1 : S'_1T'_1 = S^*T'_2 : S^*_1T'_2.$$

Dakle je $R'S^* \parallel Q'S^*_1$. Tima dijametrima konjugirani dijametri G^*H^* i N^*U^* također su paralelni, jer su oba u prostoru paralelni sa izvodnicom s_3.

Usporedimo li sada ove čunjosjeke, obzirom na položaj nađenih konjugiranih dijametara prema harmonijskim zrakama $(s^*_2\, s^*_1\, t^*_2\, t^*_1) = -1$, sa našim sprijeda izvedenim dokazima vidimo, da su kose projekcije ovih a prema tome i svih ostalih čunjosjeka na konoidu, koji nastaju presjekom tangencijalnih ravnina položenih jednom njegovom izvodnicom, slični i slično položeni. U prostoru ovo možemo shvatiti kao presjek pramena sličnih i paralelnih valjaka, koji se tangiraju duž dvostrukog pravca.[4]

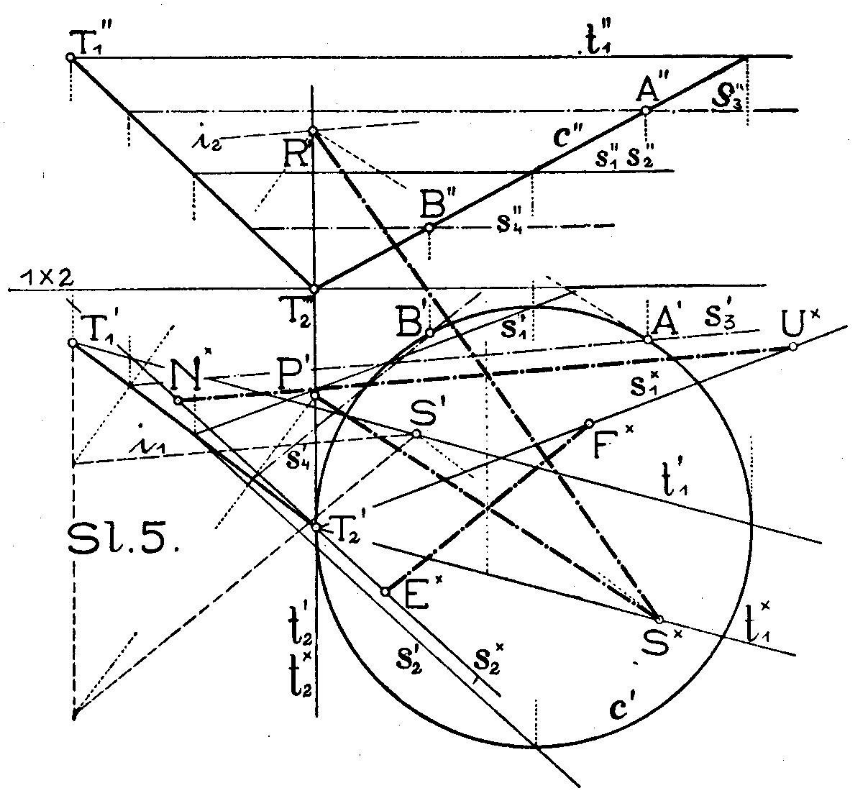
No položimo mi sada tangencijalnu ravninu σ_3 na naš konoid novom izvodnicom s_4 i to u njezinoj zajedničkoj točci B sa izvodnim čunjosjekom c. (Sl. 5.). Konjugirani dijametri $R'S^*$ i

---

[4] Usporedi sa: Dr. G. A. Peschka: Darstell. und projec. Geomet. Sv. IV. str. 50.

N^*U^* kose projekcije presječnog čunjosjeka sa tangencijalnom ravninom σ_2 u točci A na čunjosjeku c, konstruirani su kao u slici 4. Konjugirane dijametre $P'S^*$ i E^*F^* kose projekcije presječnog čunjosjeka sa ravninom σ_3 nađemo opet posve jednakim konstruktivnim postupkom kao i do sada. Dakle točke S^*, P', F^* i E^* moraju se opet nalaziti na harmonijskim zrakama t^*_1, t^*_2, s^*_1 i s^*_2.

No ovdje nam se javlja jedna zanimiva činjenica, koju ćemo malo kasnije protumačiti. Znademo da dijametri RS i PS pre-



Sl. 5.

sječnih čunjosjeka sa tangencijalnim ravninama σ_1 i σ_3, imaju svoje krajnje točke na torzalnim pravcima t_1 i t_2. U ovom slučaju, kada se dirališta A i B ravnina σ_1 i σ_3 nalaze na čunjosjeku c, padaju krajnje točke od oba dijametra na torzalnom pravcu t_1 u jednu točku S. Što vrijedi u prostoru, vrijedi i za kosu projekciju u ravnini π_1. Slijedi dakle, da dijametri koji pripadaju paru zraka t^*_1 i t^*_2 prolaze točkom S^*, na pravcu t^*_1, koje im je u isti mah i krajnja točka. Kada bismo sada nastavili sa traženjem kosih projekcija presječnih čunjosjeka sa tangencijalnim ravninama u bilo kojoj točci izvodnog čunjosjeka c vidjeli bismo, da svi dijametri tih čunjosjeka, koji pripadaju paru zraka t^*_1 i t^*_2 prolaze točkom S^*, koja im je uvijek i jedna krajnja točka. Kose projekcije tih čunjosjeka prolaze također kuspidalnom točkom T_2 našega konoida, jer ona je kosa projekcija njegovog dvostrukog pravca. Prema tome imademo ovdje pramen čunjosjeka, koji je dan dvim čvrstim točkama T'_2 i S^*, te zrakama $(t^*_1\, t^*_2\, s^*_1\, s^*_2) = -1$ uz poznate uvjete za jedan par konjugiranih dijametara svakog čunjosjeka. Usporedimo li i ovaj pramen čunjosjeka sa našim, u prvom dijelu ove radnje izvedenim dokazima, tada vidimo, da su svi čunjosjeci ovog pramena slični i slično položeni. U prostoru možemo to opet shvatiti kao presjek pramena sličnih valjaka, koji imaju dvije zajedničke izvodnice.

Malo prije navedena činjenica, da svi presječni čunjosjeci sa tangencijalnim ravninama konoida u točkama izvodnog čunjosjeka c prolaze jednom točkom S na torzalnom pravcu t_1, ako ravnina čunjosjeka c prolazi torzalnim pravcem t_2, može se protumačiti na slijedeći način:

Projekcija neke pravčaste površine trećeg reda iz povoljne točke jedne izvodnice na njezinoj površini daje kao prividnu konturu čunjosjek, a kao pravu konturu prostornu krivulju trećeg reda, koja prolazi obim kuspidalnim točkama površine te središtem projiciranja. Sve tangencijalne ravnine površine, koje prolaze središtem projiciranja omataju dakle stožac drugoga reda.[5]

U našem slučaju nalazi se središte projiciranja u točci S na torzalnom pravcu t_1. Ovdje također sve tangencijalne ravnine našega konoida, koje prolaze točkom S, omataju stožac drugog reda, ali njihova dirališta, t. j. točke krivulje prave konture, ne čine više prostornu krivulju trećeg reda, već se ona raspada u čunjosjek c i torzalni pravac t_1. Znademo, da se torzalni pravac sastoji iz dvije beskonačno blize izvodnice, koje se sijeku u pripadajućoj kuspidalnoj točci. Znademo nadalje i to, da je krivulja prave konture pravčaste površine trećeg reda prostorna krivulja četvrtog reda trećeg razreda.[6] Nalazi li se središte projiciranja na jednoj izvodnici, tada se ta konturna krivulja raspada u prostornu krivulju trećeg reda i onu izvodnicu, na kojoj se nalazi to središte projiciranja.[7] Ako se pak središte projiciranja nalazi na torzalnom pravcu, raspada se prostorna krivulja prave konture u taj torzalni pravac, dakle dvije beskonačno blize izvodnice i još jedan čunjosjek, jer suma svih elemenata mora dati opet prostornu krivulju četvrtog reda. Krivulja prave konture tangira uvijek torzalne pravce u kuspidalnim točkama. Budući da je u našem slučaju krivulja prave konture čunjosjek, dakle ravnična

---

[5] Dr. E. Weyer: Geomet. der raumlichen Erzeug. ein-zweideut. Gebilde insbes. e t. c.

[6] Dr. G. A. Pescha: Darstell. und projec. Geomet. Sv. IV. str. 43.

[7] Dr. E. Weyer: Geometrie der raumlich. Erzeug. einzweideut. Gebilde insbes. e t. c.

krivulja, tada ravnina te krivulje mora prolaziti torzalnim pravcem t_2 a krivulja dira taj pravac u kuspidalnoj točci T_2, jer se središte projiciranja nalazi na torzalnom pravcu t_1. Kuspidalnom točkom T_1 protazi torzalni pravac t_1 kao drugi dio konturne krivulje.

Ovime smo objasnili navedenu činjenicu a ujedno odavle razabiremo, da svakom čunjosjeku c_n koji nastaje prosjekom ravnine položene torzalnim pravcem t_2, odgovara neka točka S_n na torzalnom pravcu t_1. Dakle svakoj točci S_n na torzalnom pravcu t_1 kao središtu projiciranja, pridružen je pripadajući čunjosjek kao krivulja prave konture i obrnuto. Ukratko pramenu ravnina sa nosiocem t_2 pridružen je niz točaka na pravcu t_1. Ovaj niz točaka i pramen ravnina su projektivni.

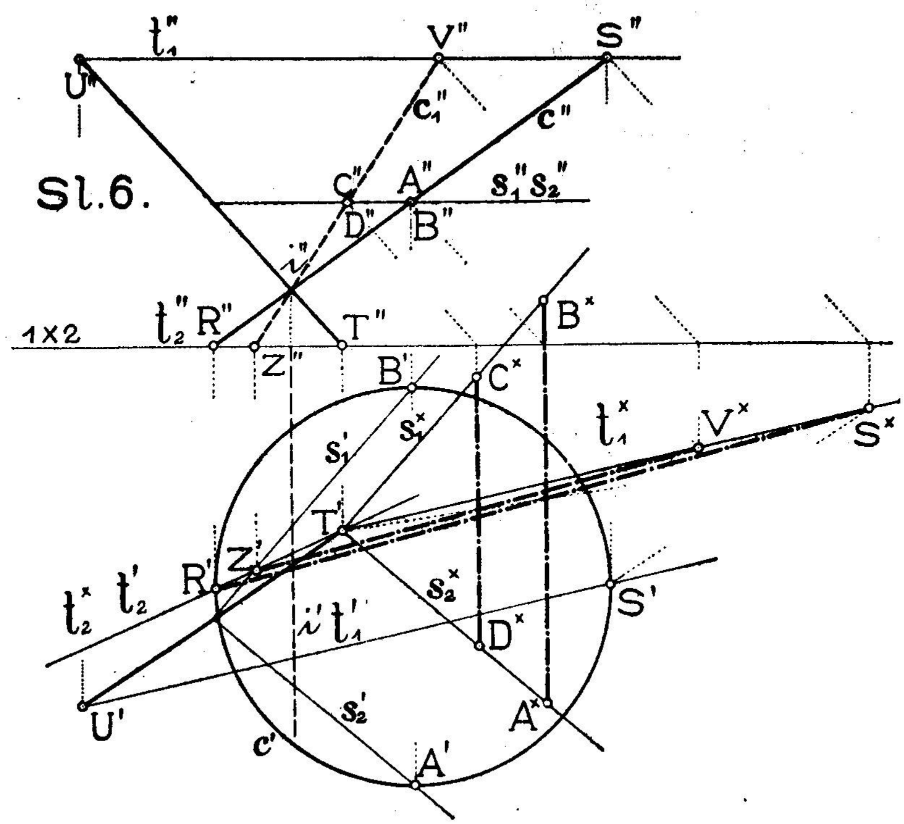
Nakon ovih razmatranja možemo još spomenuti kao zanimiv primjer, da prividna i prava kontura zgodno sastavljene pravčaste površine trećeg reda mogu biti kružnice, ako zgodno odaberemo ravninu i središte projiciranja.

Kod naših razmatranja uzeli smo u obzir samo one konoide trećeg reda, kojima se jednostruki pravac nalazi u beskonačnosti, jer on ne siječe izvodni čunjosjek. No ako je izvodni čunjosjek hiperbola ili parabola, tada dvostruki pravac može taj čunjosjek sjeći također u beskonačnosti, ali da površina ostane trećeg reda mora se jednostruki pravac nalaziti u konačnosti. U takovom slučaju imademo jednu specijalnu vrst konoida trećeg reda, za čije čunjosjeke ne vrijedi napred opisano svojstvo, jer nam nije određen smjer dvostrukog pravca, a direkcionom ravninom dano nam je u konačnosti beskonačno mnogo raznih smjerova.

b) Konoidi četvrtog reda.

Posve analognim postupkom kao i kod konoida trećeg reda pokazati ćemo sada, da svi čunjosjeci nekog konoida četvrtog reda imadu također u prvom stavku izrečeno svojstvo.

Neki posve općeniti konoid četvrtog reda neka je zadan dvostrukim pravcem UT te čunjosjekom c, opet u ortogonalnoj projekciji. (Sl. 6.). Direkciona ravnina neka je tlocrtna ravnina π_1, a čunjosjek c neka tangira ravninu π_1 u točci R. Ravnina čunjosjeka c neka je opet okomita na nacrtnu ravninu π_2, a na tlocrtnu ravninu π_1 neka se čunjosjek c projicira kao kružnica c'. Čunjosjeci ovog konoida dobiju se kao presjeci s ravninama položenim dvostrukom izvodnicom. Dvostruka izvodnica i okomita je na nacrtnu ravninu π_2, dakle su i ravnine svih čunjosjeka na tome konoidu okomite na ravninu π_2. Položimo dvostrukom izvodnicom i neku ravninu σ_1, koja naš konoid siječe u čunjosjeku c_1. Ravnina σ_1 siječe torzalne pravce t_1 i t_2 u točkama V i Z. Tangente čunjosjeka c_1 u točkama V i Z paralelne su sa dvostrukom izvodnicom i, dakle je dužina VZ jedan dijametar toga čunjosjeka. Konjugirani dijametar dijametru VZ mora se nalaziti u ravnini, koja raspolavlja udaljenost između torzalnih pravaca t_1 i t_2 te je s njima paralelna. U toj ravnini nalaze se izvodnice s_1 i s_2 konoida. Paralela sa dvostrukom izvodnicom i povučena polovištem dužine VZ siječe izvodnice s_1 i s_2 u točkama C i D, koje dijametru VZ daju konjugirani dijametar CD. I ovdje se vrlo lako razabire, da ovo što vrijedi za čunjosjek c_1 ravnine σ_1 vrijedi i za presječne čunjosjeke svih ravnina polo-



Sl. 6.

ženih dvostrukom izvodnicom i. Spojnica presječnih točaka torzalnih pravaca t_1 i t_2, uvijek daje jedan dijametar, a spojnica presječnih točaka izvodnica s_1 i s_2 daje njemu konjugirani dijametar. Krajnje točke konjugiranih dijametara V, Z, C i D nalaze se na pravcima t_1, t_2, s_1 i s_2, dakle se i krajnje točke kosih projekcija tih dijametara moraju nalaziti na kosim projekcijama tih pravaca. I to točka V^* nalazi se na pravcu t^*_1, točka $Z^* = Z$ na pravcu $t^*_2 = t'_2$, točka C^* na pravcu s^*_1 i točka D^* na pravcu s^*_2. Kose projekcije na ravninu π_1 nalazimo poznatim načinom određivanja sjena u smjeru dvostrukog pravca UT. Ravnina izvodnog čunjosjeka c siječe torzalne pravce t_1 i t_2 u točkama S i R a izvodnice s_1 i s_2 u točkama B i A. Dužine SR i BA su dakle konjugirani dijametri izvodnog čunjosjeka c a dužine S^*R^* i B^*A^* su konjugirani dijametri njegove kose projekcije c^* u ravnini π_1. Krajnje točke ovih dijametara nalaze se opet na pravcima t^*_1, t^*_2, s^*_1 i s^*_2 i to točka S^* na pravcu t^*_1, točka $R^* = R'$ na pravcu $t^*_2 = t'_2$, točka B^* na pravcu s^*_1 i točka A^* na pravcu s^*_2. Pravci t^*_1, t^*_2, s^*_1 i s^*_2 prolaze točkom T', jer je točka T' kosa projekcija dvostruka pravca konoida na ravninu π_1. Da čunjosjeci c^*_1 i c^* budu slični i slično položeni valja nam dokazati, da je $S^*R' \parallel V^*Z'$ i $B^*A^* \parallel C^*D^*$ a ostalo je već dokazano u prvom dijelu naše radnje.

Da bude $R'S^* \parallel Z'V^*$ mora biti ispunjen uvjet: $R'T' : Z'T' = S^*T' : V^*T'$. Ovaj je uvjet ispunjen, jer na konoidu postoji ovaj omjer: $RT : ZT = SU : VU$.

Dijametri BA i CD paralelni su, jer su oba paralelna sa dvostrukom izvodnicom i, dakle su i kose projekcije tih dijametara paralelne. ($C^*D^* \parallel B^*A^*$). Da su ti dijametri paralelni slijedi također odatle, što spojnica središta čunjosjeka c i c_1 siječe dvostruki pravac UT i to u njegovoj zajedničkoj točci sa izvodnicima s_1 i s_2, a prema tome se točka T' i središta čunjosjeka c^* i c^*_1 nalaze na jednom pravcu.

Pripadni dijametri su paralelni, dakle su čunjosjeci c^* i c^*_1 slični i slično položeni, a kada ovo vrijedi za ova dva čunjosjeka, onda su i kose projekcije svih ostalih čunjosjeka na tome konoidu slične i slično položene.

Konoide četvrtog reda možemo u glavnome podijeliti u dvije vrste. U prvu vrstu možemo staviti one, kod kojih dvostruki pravac probada ravninu izvodnog čunjosjeka u njegovoj unutrašnjosti. Takav je naš konoid u slici 6. U drugu vrstu staviti ćemo one, kod kojih dvostruki pravac probada ravninu izvodnog čunjosjeka izvana. Na pr. uspravan kružni konoid. Konoidi prve vrste imadu samo dvije kuspidalne točke a prema tome i samo dva torzalna pravca realna. Konoidi druge vrste imadu sva četiri torzalna pravca i kuspidalne točke realne.

Naša promatranja su kod obih vrsta jednaka. Razlika je samo u toliko, što se vrh T' zraka s^*_1, s^*_2, t^*_1 i t'_2 u prvom stučaju nalazi unutar svih čunjosjeka, dok se u drugom slučaju nalazi izvan svih čunjosjeka. Ako je izvodni čunjosjek hiperbola ili parabola, može se dokazati analogno kao kod čunjosjeka na istovrsnim konoidima trećeg reda, koji nastaju presjecima tangencijalnih ravnina položenih jednom izvodnicom, da su svim kosim projekcijama čunjosjeka ovakovih konoida beskonačno daleke točke zajedničke, t. j. u prvom slučaju paralelne su im asimptote a u drugom slučaju paralelne su sve osi.

Nakon što smo se pobliže upoznali sa konoidima četvrtog reda vidimo, da među njima imade beskonačno mnogo takovih konoida, koji imaju poznato svojstvo Plückerovog konoida među konoidima trećeg reda. Naime, možemo sastaviti po volji mnogo takovih konoida četvrtog reda, čiji će čunjosjeci okomito projicirani na direkcionu ravninu biti kružnice. Među konoidima trećeg reda nalazi se samo jedna takova površina, a ta je Plückerov konoid. Razlika postoji samo u broju čunjosjeka na tim konoidima. Na Plückerovom konoidu imade ∞^2 čunjosjeka, kao i na svim pravčastim površinama trećeg reda, dok ih na konoidima četvrtog reda imade samo ∞^1.

DIO III.

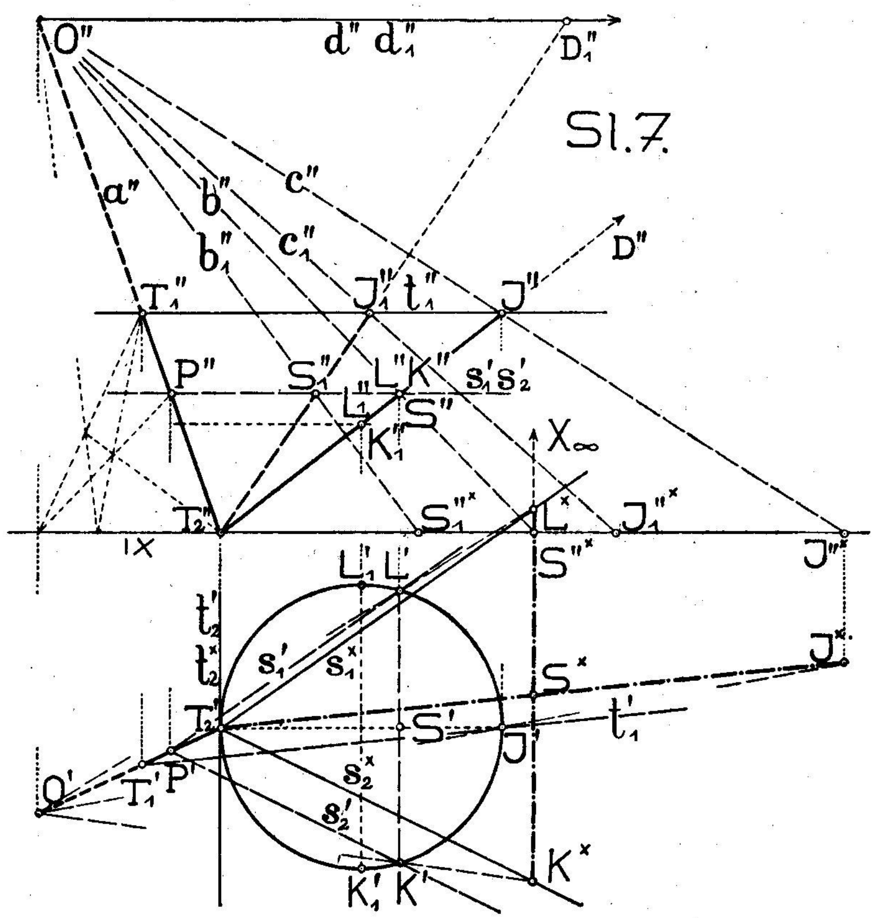
Dokazali smo u drugom dijelu ove radnje prvi stavak t. j., da su svi čunjosjeci na konoidima trećeg i četvrtog reda, projicirani iz beskonačno daleke točke na dvostrukom pravcu tih konoida na bilo kakovu ravninu u prostoru, uvijek slični i slično položeni. Sada još moramo dokazati drugi stavak koji govori o tome, kada središte projiciranja pomaknemo iz beskonačnosti u neku konačnu točku na dvostrukom pravcu.

Prije nego prijeđemo na dokaz toga stavka valja nam dokazati, da je nemoguće te čunjosjeke projicirati kao slične i slično položene na koju drugu ravninu, osim direkcione. Središte projiciranja na dvostrukom pravcu nekog konoida trećeg ili četvrtog reda uzmimo kao vrh, a sve čunjosjeke na tome konoidu kao baze stožaca. Kod konoida trećeg reda imademo sistem od ∞^2 stožaca sa zajedničkim vrhom i dvostrukim pravcem kao zajedničkom izvodnicom, a kod konoida četvrtog reda imademo pramen od ∞^1 stožaca opet sa zajedničkim vrhom. Za svaku ravninu u prostoru, osim direkcione, možemo u prvom i drugom slučaju odabrati takova tri stožca, da će ta ravnina jednoga sjeći u elipsi, drugoga u paraboli a trećega u hiperboli. Prema tome se na nijednu takovu ravninu ne mogu ti čunjosjeci projicirati niti kao slični. Jedinu iznimku čine kao što je rečeno direkcione ravnine, jer samo takove ravnine mogu sjeći sve te stožce ili samo u elipsama, ili samo u parabolama, ili samo u hiperbolama. Kojoj će vrsti pripadati projekcije čunjosjeka, to ovisi samo o mjestu središta projiciranja na dvostrukom pravcu, a ne ovisi ništa o vrsti čunjosjeka na konoidima trećeg ni četvrtog reda.

Sada možemo prijeći na dokaz drugog stavka. Projekciju iz središta projiciranja na direkcionu ravninu zvati ćemo u kratko centralnom projekcijom.

b) Konoidi trećeg reda.

Posvema jednako kao u slici 3. u drugom dijelu ove radnje, zadajmo si neki konoid trećeg reda. (Sl. 7.). Na dvostrukom pravcu T_1T_2, odaberimo neku točku O po volji, iz koje ćemo projicirati sve čunjosjeke toga konoida na ravninu π_1, kao direkcionu ravninu. Poznato nam je iz drugog dijela ove radnje, da spojnica zajedničkih točaka čunjosjeka sa torzalnim pravcima daje jedan dijametar toga čunjosjeka. Njemu konjugirani dijametar nalazi se u direkcionoj ravnini, koja raspolavlja udaljenost između torzalnih pravaca. Centralna projekcija prvog dijametra biti će opet dijametar centralne projekcije toga čunjosjeka, jer je njemu konjugirani dijametar paralelan s ravninom π_1. U našoj



će slici centralna projekcija $T_2'I^*$ dijametra T_2I biti dijametar centralne projekcije c^* čunjosjeka c. Ali centralna projekcija ovome dijametru u prostoru konjugiranog dijametra L_1K_1 ne daje više konjugirani dijametar u centralnoj projekciji, jer niti centralna projekcija središta u prostoru ne daje središte centralne projekcije. Iznimku bi činio onaj čunjosjek, koji bi bio paralelan sa direkcionom ravninom π_1, a takav ne postoji na konoidima trećeg ni četvrtog reda. Moramo dakle konstruirati konjugirani dijametar dijametru T'_2I^*, odnosno u prostoru naći onu tetivu čunjosjeka c paralelnu sa ravninom π_1, koja će u centralnoj projekciji dati konjugirani dijametar dijametru T'_2I^*. Ovaj dijametar mora prolaziti polovištem S^* dužine T'_2I^*. Spojimo li točku S''^* sa točkom O'', tada nam ta spojnica daje na c'' drugu projekciju S'' točke S, koja se nalazi u ravnini čunjosjeka c a u centralnoj projekciji daje središte čunjosjeka c^*. Točka S nalazi se na dijametru T_2I. Ovom točkom povučena paralela sa tangentama čunjosjeka c u točkama T_2 i I, nalazi se u ravniui izvodnica s_1 i s_2, koje siječe u točkama L i K. Centralna projekcija L^*K^* dužine LK biti će konjugirani dijametar dijametru T'_2I^*. Tetivu LK možemo i tako dobiti, da točkom O povučemo paralelnu ravninu sa ravninom π_1, te nađemo probodište D produženog dijametra T_2I sa tom ravninom. Točci D kao polu pripadajuća polara na čunjosjeku c siječe taj čunjosjek u točkama L i K, koje daju traženu tetivu. Polara $LK \parallel \pi_1$ jer su i tangente čunjosjeka c u točkama T_2 i I paralelne sa ravninom π_1.

Probodište dijametra svakog čunjosjeka na konoidu trećeg reda, koji imade krajnje točke u torzalnim pravcima, sa ravninom izvodnica s_1 i s_2 dati će u centralnoj projekciji polovište centralne projekcije toga dijametra, odnosno središte centralne projekcije čunjosjeka. Dokazati ćemo to na slijedeći način:

Uvedimo najprije slijedeće kraće oznake $OT_1 = a$, $OS = b$, $OI = c$ i $OD = d \parallel t_1$. Za zrake a, b, c i d vrijedi harmonijski omjer $(a, c, b, d) = -1$, jer je $d \parallel \pi_1$ a $T_2S^* = S^*I^*$. Produžena spojnica točaka T_2 i I siječe zrake a, b, c i d u točkama T_2, S, I i D za koje također vrijedi $(T_2ISD) = -1$. Ovim točkama položene direkcione ravnine sijeku dvostruki pravac u točkama T_2, P, T_1 i O, za koje opet vrijedi $(T_2T_1PO) = -1$. U točci P sijeku izvodnice s_1 i s_2 dvostruki pravac T_2T_1. Točku P možemo prema tome vrlo jednoštavno odrediti pomoću poslednjeg harmonijskog omjera. Uzmimo, da je $T_2''\ I_1''$ druga projekcija dijametra bilo kojega čunjosjeka na tome konoidu. Radi $(T_2\ T_1\ P\ O) = -1$ odnosno $(T_2''\ T_1''\ P''\ O'') = -1$ je također $(T_2''\ I_1''\ S_1''\ D_1'') = -1$ a prema tome i $(a, c_1, b_1, d_1) = -1$. Odavle slijedi da je $T_2\ S_1{}^* = S^*{}_1\ I^*{}_1$ odnosno točka $S^*{}_1$ će biti polovište centralne projekcije toga dijametra. Što vrijedi za ovaj dijametar, vrijedi i za istovrsni dijametar svakog čunjosjeka na tome konoidu, jer druge projekcije svih takovih dijametara u našoj slici prelaze točkom T_2'', a prema tome vrijedi i za njih analogan dokaz.

Da tetiva LK daje u centralnoj projekciji u istinu konjugirani dijametar L^*K^* dijametru $T_2'I^*$ vidi se i odavle: Tangente čunjosjeka c u točkama L i K sijeku se u polu D. Centralna projekcija točke D nalazi se u beskonačnosti na pravcu T'_2I^*, jer je $d \parallel \pi_1$. Tangente čunjosjeka c u točkama L i K biti će prema tome u centralnoj projekciji paralelne sa T'_2I^*, dakle je L^*K^* u istinu konjugirani dijametar dijametru T'_2I^*. Posve analogno vrijedi za svaki čunjosjek na tome konoidu. Polovi svih čunjosjeka na tome konoidu, koji odgovaraju polarama nalazećim se u ravnini izvodnica s_1 i s_2, nalaze se u direkcionoj ravnini π'_1 položenoj točkom O. Odavle slijedi, da tetive tih čunjosjeka koje se nalaze u ravnini izvodnica s_1 i s_2, daju u centralnoj projekciji uvijek konjugirani dijametar onome dijametru, koji nastaje centralnom projekcijom zajedničkih točaka tih čunjosjeka sa torzalnim pravcima.

Svakom čunjosjeku na konoidu, odnosno njegovoj ravnini, odgovara jedna takova točka D u ravnini π'_1. Pramenu tangencijalnih ravnina, koje prolaze jednom izvodnicom konoida, pridružen je niz takovih točaka u ravnini π'_1, koji se nalazi na jednom pravcu a prolazi točkom O. Ovaj je pravac paralelan sa centralnom projekcijom onih dijametara čunjosjeka, koji su dani njihovim zajedničkim točkama sa torzalnim pravcima.

Svakoj zraci pramena pravaca u ravnini π'_1 sa ishodištem O, odgovara jedna izvodnica površine kao nosioc pramena svojih tangencijalnih ravnina, a svakoj ravnini pramena neke izvodnice odgovara jedna točka na pripadnoj zraci pramena pravaca u ravnini π'_1.

Pramenu ravnina, koje tangiraju konoid duž nekog čunjosjeka koji tangira jedan torzalan pravac, a sve se sijeku kao što znademo u jednoj točci drugog torzalnog pravca, odgovara u ravnini π'_1 pravac paralelan sa prvim torzalnim pravcem. Svim takovim stožcima, odnosno njihovim tangencijalnim ravninama, odgovara u ravnini π_1' pramen paralelnih pravaca sa onim torzalnim pravcem, kojega tangiraju čunjosjeci duž kojih smo uzimali te tangencijalne ravnine.

Vidjeli smo, da zajedničke točke svakog čunjosjeka sa torzalnim pravcima daju u centralnoj projekciji jedan dijametar, a zajedničke točke sa izvodnicama s_1 i s_2 daju u centralnoj projekciji prvom dijametru konjugirani dijametar. Prema tome krajnje točke jednog dijametra u centralnoj projekciji nalaze se na centralnim projekcijama t^*_1, $t^*_2 = t'_2$ torzalnih pravaca t_2 i t_1, a krajnje točke njemu konjugiranog dijametra u centralnoj projekciji, na centralnoj projekciji s^*_1, s^*_2 izvodnica s_1 i s_2. Dokažemo li sada, da zrake t'_2, t^*_1, s^*_2 i s^*_1 što prolaze točkom T'_2, stoje u harmonijskom odnosu $(t^*_1\, t'_2\, s^*_1\, s_2^*) = -1$ možemo zaključiti, da su centralne projekcije svih čunjosjeka na konoidu slične i slično položene, jer je sve ostalo već dokazano u prvom dijelu ove radnje.

Vidimo u slici 7. da je $LS = SK$ i da je $LK \parallel t_2 \parallel \pi_1$. Odavle slijedi, da i u centralnoj projekciji vrijedi $L^*S^* = S^*K^*$ i $L^*K^* \parallel t^*_2 = t'_2$ ili $L^*S^* : K^*S^* = -(L^*X\infty : K^*X\infty)$ a prema tome vrijedi i $(t^*_2\, t^*_1\, s^*_2\, s^*_1) = -1$.

Dakle su centralne projekcije svih čunjosjeka na konoidu trećeg reda na direkcionu ravninu iz neke točke na dvostrukom pravcu, uvijek slične i slično položene.

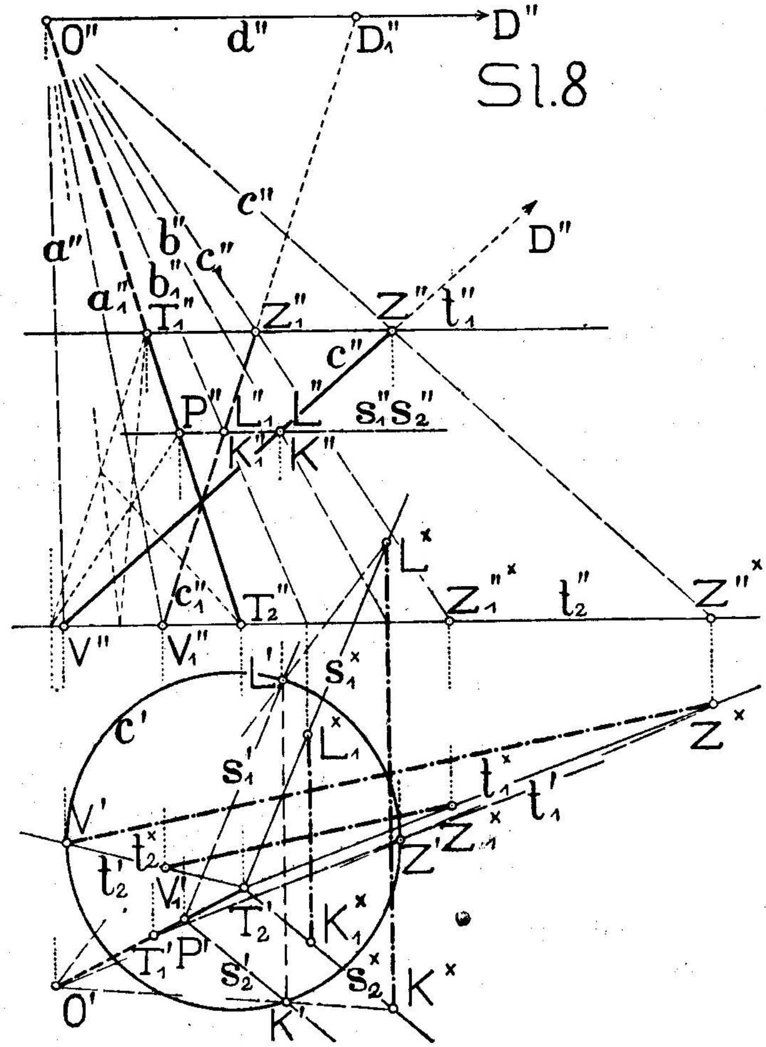
Razumijeva se, da ovo ne vrijedi za specijalne konoide trećeg reda, kojima je dvostruki pravac u beskonačnosti.

U našoj smo slici uzeli, da se središte projiciranja O nalazi izvan kuspidalnih točaka T_1 i T_2 konoida sa eliptičkim čunjosjecima. Kada se točka O nalazi između kuspidalnih točaka t. j. unutar površine, onda su centralne projekcije svih čunjosjeka toga konoida slične i slično položene hiperbole, jer su asimptote svih tih hiperbola paralelne sa onim parom izvodnica konoida, koje se sijeku u središtu projiciranja O na dvostrukom pravcu. Ako se središte projiciranja O nalazi u kuspidalnoj točci, onda su centralne projekcije svih čunjosjeka parabole, čije su osi paralelne sa onim torzalnim pravcem, koji prolazi tom kuspidalnom točkom. Zadamo li si takav konoid, na kojem su čunjosjeci samo hiperbole ili parabole, tada će centralne projekcije tih čunjosjeka biti posve analogne onima kod konoida sa eliptičkim čunjosjecima. Ako se naime središte projiciranja nalazi izvan površine na dvostrukom pravcu, tada su centralne projekcije svih čunjosjeka elipse, ako se nalazi unutar površine tada su hiperbole, a kada se nalazi u kuspidalnoj točci onda su parabole.

b) Konoidi četvrtog reda.

Posvema analogno kao kod konoida trećeg reda, daju dijametri čunjosjeka, koji su određeni zajedničkim točkama tih čunjosjeka sa torzalnim pravcima, u centralnoj projekciji dijametar centralne projekcije čunjosjeka. Njemu konjugirani dijametar nađemo ovdje posve istim postupkom kao kod konoida trećeg reda, jer i kod ovih konoida vrijedi opet harmonijski omjer $(T_2 T_1 P O) = -1$ (Sl. 8.). Konoid je zadan u slici 8. posve jednako kao u slici 6. Odredivši poznatom konstrukcijom točku P, imademo odmah izvodnice s_1 i s_2 na kojima se nalaze točke L i K čunjosjeka c, koje u centralnoj projekciji spojene daju dijametar L^*K^*, koji je konjugiran centralnoj projekciji V^*Z^* dijametra VZ. Točke V_1, Z_1, L_1 i K_1 čunjosjeka c_1 daju u centralnoj projekciji konjugirane dijametre $V'_1 Z^*_1$ i $L^*_1 K^*_1$ njegove centralne projekcije c^*_1, jer radi $(T_1 T_2 P O) = -1$ je i $(a_1 c_1 b_1 d) = -1$.

Da su dužine L^*K^* i $L^*_1 K^*_1$ u istinu konjugirani dijametri dijametrima V^*Z^* i $V'_1 Z^*_1$, može se pokazati na isti način kao kod konoida trećeg reda, jer se tetive čunjosjeka u ravnini izvodnica s_1 i s_2, koje u centralnoj projekciji daju konjugirani dijametar onim dijametrima čunjosjeka, čije su krajnje točke u torzalnim pravcima t_1 i t_2, nalaze i ovdje u polarama čunjosjeka što odgovaraju onim polovima, koji nastaju probodištem poznatih dijametara čunjosjeka sa direkcionom ravninom položenom točkom O. Takovi polovi svih čunjosjeka na konoidū četvrtog reda nalaze se u toj ravnini na jednom pravcu koji prolazi točkom O, a paralelan je sa centralnom projekcijom onih dijametara čunjosjeka, koji sijeku torzalne pravce. Dakle je posve analogno čunjo-



sjecima, koji nastaju presjecima tangencijalnih ravnina pramena neke izvodnice na konoidu trećeg reda.

Točke L i L_1 nalaze se na izvodnici s_1, točke K i K_1 na izvodnici s_2, točke V i V_1 na torzalnom pravcu t_2 i konačno točke Z i Z_1 na torzalnom pravcu t_1. Centralne projekcije tih točaka nalaze se na centralnim projekcijama tih pravaca, a sva četiri pravca s^*_1, s^*_2, t^*_1 i t^*_2 prolaze točkom T'_2. Da čunjosjeci c^*_1 i c^*, a prema tome i svi ostali na tome konoidu, budu slični i slično položeni valja nam dokazati, da je $V'Z^* \parallel V'_1 Z^*_1$ i $L^*K^* \parallel L^*_1 K^*_1$ a ostalo je već dokazano u prvom dijelu radnje. Dijametri L^*K^* i $L^*_1 K^*_1$ paralelni su, jer su tetive LK i $L_1 K_1$ kao i tetive svih ostalih čunjosjeka toga konoida u ravnini izvodnica s_1 i s_2, paralelne sa dvostrukom izvodnicom konoida. Da bude $V'Z^* \parallel V'_1 Z^*_1$ mora postojati ovaj dvoomjer:

$V'T'_2 : V'_1 T'_2 = Z^*T_2' : Z^*_1 T'_2$. U našoj slici vidimo da postoje ovi omjeri:

$$V'T'_2 : V'_1 T'_2 = V''T''_2 : V''_1 T''_2 = Z''T''_1 : Z_1''T_1'' = Z''^*T''_2 : Z''^*_1 T''_2 =$$
$$= Z^*T'_2 : Z^*_1 T'_2.$$

Posve analogno vrijedi za onaj dijametar svakog čunjosjeka, čije se krajnje točke nalaze na torzalnim pravcima.

Dakle svi čunjosjeci toga konoida, centralno projicirani iz točke O na dvostrukom pravcu u direkcionu ravninu π_1, daju slične i slično položene čunjosjeke.

Ako se točka O nalazi između kuspidalnih točaka unutar površine ili u kuspidalnoj točci, nadalje ako su čunjosjeci površine hiperbole ili parabole, tada za sve takove slučajeve vrijedi posvema ono isto, kao kod konoida trećeg reda.