Ljerka Dočkal

ÜBER EINEN REGELFLÄCHENSYSTEM 2. GRADES DAS DURCH DREI PROJEKTIVE STRAHLBÜSCHEL BESTIMMT IST

EINLEITUNG

Es seien drei projektiv zugeordnete Strahlbüschel $a(A)$, $b(B)$, $c(C)$ gegeben, welche in den Ebenen α, β, γ liegen. Wählt man ein Tripel projektiv zugeordneten, in diesem Fall windschiefen, Strahlen (abc) beliebig aus, dann bilden die Transversalen t dieser drei Strahlen einen Regulus auf einer Regelfläche 2. Grades R^2. Lässt man das Tripel (abc) die drei gegebene Strahlbüschel $a(A)$, $b(B)$, $c(C)$ erzeugen, werden sich die Reguli an einem Regelflächensystem 2. Grades $|R^2|$ befinden. Dieses Regelflächensystem $|R^2|$ ist weder ein Flächenbüschel, noch eine Flächenschar, deswegen ist es von Interesse seine Eigenschaften aufzusuchen.

Bei flüchtigem Einblick bemerkt man dass hier die Punkte A, B, C wie auch die Ebenen α, β, γ hervorgehoben sind.

Jede der Ebenen α, β, γ berührt alle Flächen R^2 des Systems $|R^2|$.

Man nehme z. B. die gegebene Ebene α im Betracht. Die Strahllen der gegebenen Strahlbüschel $b(B)$ und $c(C)$ stossen sie in projektiv zugeordneten Punktreihen $B_A(b)$ und $C_A(c)$. Da die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punktepaare B_AC_A in der Ebene α liegen, sind sie zugleich die Transversalen t des Tripels der zugeordneten Strahlen (abc). Dies bedeutet, dass sich in der Ebene α je eine Erzeugende jeder Fläche R^2 des Flächensystems $|R^2|$ befindet und deswegen ist die Ebene α eine Berührebene aller Flächen des Systems $|R^2|$.

Die in der Ebene α liegende Transversalen t hüllen eine Kurve 2. Klasse α^2 um.

Die Berührpunkte der Ebene α mit den Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ billden eine rationale Kurve 3. Ordnung a^3, mit dem Doppelpunkt im Punkte A. Man erhält sie als das Ergebnis der Schnittpunkte der projektiv zugeordneten Strahlen des Strahlbüschels $a(A)$ und der Tangenten t der Kurve 2. Klasse α^2.

Jeder der drei gegebenen Punkte A, B, C liegt auf allen Flächen R^2 des Systems $|R^2|$. Die Erzeugenden t dieser Flächen, welche einen der Punkte A, B, C enthalten, bilden je einen Kegel 2. Grades A^2, B^2 oder C^2.

Nämlich, z. B. durch den Punkt A und die Strahlen des Strahlbüschels $b(B)$ wird das Ebenenbüschel $\beta_A(AB)$ gelegt, analog durch die Strahlen des Strahlbüschels $c(C)$ das Ebenenbüschel $\gamma_A(AC)$. Diese Ebenenbüschel sind projektiv zugeordnet und bilden deswegen die Schnittgeraden der zugeordneten Ebenenpaare die Erzeugenden des Kegels 2. Grades A^2. Jede Erzeugende t des Kegels

A^2 ist die Transversale je eines gegebenen Tripels (abc), also die Erzeugende je einer Fläche R^2 des Systems $|R^2|$.

Die durch einen Strahl a und die zugeordneten Transversale t gelegte Ebene τ ist die Berührebene der entsprechenden Fläche R^2 des Systems $|R^2|$.

Wenn der Strahl a das Strahlbüschel $a\,(A)$ durchläuft, erzeugt die zugeordnete Transversale t den Kegel 2. Grades A^2 und die entsprechenden Ebenen τ hüllen einen Kegel 3. Klasse A^3 mit der Ebene α als ihrer Doppelebene.

Ausgeartete Flächen des Systems $|R^2|$

Das System $|R^2|$ enthält 6 in je zwei Strahlbüschel 1. Stufe ausgearteten Flächen. Nämlich zwei projektiv zugeordnete Strahlbüschel enthalten zwei Paare entsprechende sich schneidende Strahllen. Nimmt man z. B. ein Paar (ab) sich schneidende zugeordnete Strahlen im Betracht. Die dem entsprechenden Strahltripel (abc) zugeordnete Regelfläche R^2 zerfällt in zwei Strahlbüschel 1. Stufe. Das eine liegt in der Ebene (ab) mit dem Scheitel im Stosspunkt des Strahles c in der Ebene (ab) und das zweite in der Ebene (Sc), die durch den Schnittpunkt S der Strahlen (ab) und den Strahl c aufgespannt ist.

Da die drei gegebenen projektiv zugeordneten Strahlbüschel 6 Paare sich schneidenden Strahlen enthalten, befinden sich im Regelflächensystem $|R^2|$ 6 Flächen, die in je zwei Strahlbüschel, also in je zwei Ebenen ausgeartet sind.

GRUNDEIGENSCHAFTEN DES SYSTEMS $|R^2|$

Satz 1. *Jede beliebige Ebene ϱ berührt drei Flächen des Flächensystems $|R^2|$.*

Beweis. Es sei eine beliebig angenommene Ebene ϱ gegeben. Sie schneidet die gegebenen projektiv verundenen Strahlbüschel $a\,(A)\; b\,(B)\; c\,(C)$ in projektiven Punktreihen $A_r\,(a_r)$, $B_r\,(b_r)$, $C_r\,(c_r)$. Wie bekannt, bestehen in diesem Fall drei Geraden t die die Verbindungsgeraden je drei Tripel projektiv zugeordneten Punkte $(A_rB_rC_r)$ sind. Nämlich, die Verbindungsgeraden der projektiv zugeordneten Punktpaare der Punktreihen $A_r\,(a_r)$ und $B_r\,(b_r)$ hüllen eine Kurve 2. Klasse ϱ_1^2 um und die der projektiven Punktreihen $A_r\,(a_r)$ und $C_r\,(c_r)$ eine andere Kurve ebenso 2. Klasse ϱ_2^2. Die beide Kurven haben vier Tangenten gemeinsam, von welchen eine eben die Gerade a_r, sie ist aber keine Transversale t eines projektiv zugeordneten Strahltripels (abc), während die drei übriggebliebene gemeinsame Tangenten dies sind. Die Gerade a_r ist keine Transversale t, weil dies bedeuten könnte, jede Gerade der Ebene α sei die Transversale t. In der Einleitung wurde aber gezeigt dass die transversalen t in der Ebene α eine Kurve 2. Klasse α^2 umhüllen.

Da die Fernebene auch drei Flächen des Systems $|R^2|$ berührt, schliesst man, dass dieses System drei hiperbolische Paraboloide enthält.

Satz 2. *Ein beliebig angenommener Raumpunkt P liegt an drei Flächen R^2 des Systems $|R^2|$.*

Beweis. Durch einen beliebig angenommenen Raumpunkt P und die Strahlen des Strahlbüschels $a\,(A)$ lege man das Ebenenbüschel $\pi\,(PA)$. Ebenso bilden die durch den Punkt P und die Strahlen des Strahlbüschels $b\,(B)$ gelegte Ebenen das Ebenenbüschel $\pi\,(PB)$. Diese Ebenenbüschel sind projektiv zugeordnet, also die

Schnittgeraden der zugeordneten Ebenenpaare bilden einen Kegel 2. Grades P_{AB}, der den Scheitel im Punkt P hat und die Punkte A und B enthält. Analog besteht ein Ebenenbüschel $\pi(PC)$. Die Schnittgeraden der projektiv zugerodneten Ebenenpaare der Ebenenbüschel $\pi(PA)$ und $\pi(PC)$ bilden einen Kegel 2. Grades P^2_{AC}. Die Kegel P^2_{AB} und P^2_{AC} haben vier Erzeugenden gemein. Die gemeinsame Erzeugende PA dieser beiden Kegel ist keine Transversale eines Tripels (abc), weil es bedeuten würde jede Gerade des Punktes A sei eine Transversale t, während es in der Einleitung gezeigt wurde, dass die den Punkt A enthaltenden Transversalen t einen Kegel 2. Grades A^2 bilden. Die drei übriggebliebenen gemeinsamen Erzeugenden sind die Transversalen t der je drei zugeordneten Tripel (abc).

Satz 3. *Die Pole einer beliebig angenommenen Ebene ϱ bezüglich der Flächen R^2 des Regelflächensystems $|R^2|$ bilden eine Raumkurve* 3. *Ordnung p^3.*

Beweis. Unter den gegebenen projektiv zugeordneten Strahlbüschel $a(A)$, $b(B)$, $c(C)$ wähle man ein Tripel entsprechender Strahlen (abc). Durch dieses Tripel ist eine Regelfläche R^2 des Systems $|R^2|$ bestimmt. Eine beliebige angenommene Ebene ϱ schneidet die Strahlen a, b, c in den Punkten A_r, B_r, C_r. Legt man in diesen Punkten A_r, B_r, C_r die Berührebenen τ_A, τ_B, τ_C an die Fläche R^2 dann ist ihr Schnittpunkt P der Pol der Ebene bezüglich der Fläche R^2.

Lasse man das Strahltripel (abc) die Strahlbüschel $a(A)$, $b(B)$, $c(C)$ durchlaufen, dann bilden die zugeordneten Regelflächen das System $|R^2|$ und die entsprechenden Berührebenen τ_A, τ_B, τ_C hüllen drei Kegel 4. Klasse T^4_A, T^4_B, T^4_C um.

Die Schnittpunkte A_r der Strahlen a erzeugen in der Ebene ϱ die Punktreihe $A_r(a_r)$ auf der Geraden a_r, welche die Schnittgerade der Ebenen α und ϱ ist. Die im Punkt A_r an die zugeordnete Regelfläche R^2 gelegte Berührebene τ_A ist durch den Strahl a und die den Punkt A_r enthaltende Transversale t der zugeordneten Strahlen b und c aufgespannt. Man erhält diese Transversale als die Schnittgerade der Ebenen β_r und γ_r, die durch den Punkt A_r und die Strahlen b bzw. c gelegt sind. Läuft der Punkt A_r die Punktreihe $A_r(a_r)$ durch, werden die Ebenen β_r bzw. γ_r zwei Kegel 2. Klasse T^2_B bzw. T^2_C mit den Schneitel B, C umhüllen. Ihre Berührebenen sind in Paaren offenbar projektiv zugeordnet. Die Schnitgeraden der entsprechenden Ebenen dieser Kegel bilden eine Regelfläche 4. Grades T^4. Projiziert man die Erzeugenden der Fläche T^4 aus dem Punkt A, erhält man den Projektionskegel 4. Klasse T^4_A. Analog erhält man die Kegel 4. Klasse T^4_B und T^4_C.

Die Schnittpunkte der entsprechenden Ebenen dieser drei Kegel T^4_A, T^4_B, T^4_C sind die Pole der Ebene ϱ bezüglich der zugeordneten Flächen R^2 des Systems $|R^2|$. Man erhält sie, indem man zuerst die Schnittgeraden der zugeordneten Ebenenpaare der Kegel T^4_B und T^4_C aufgesucht werden. Sie bilden eine Regelfläche 8. Grades R^8. Danach werden die Fläche R^8 und der Kegel T^4_A mit einer beliebigen Ebene π geschnitten. Die Schnittkurven sind eine Kurve 8. Ordnung r^8 auf der Fläche R^8 und eine Kurve 4. Klasse auf dem Kegel τ^4_A. Sie sind projektiv verbunden. Die inzidenten Punkte der Kurven r^8 mit den entsprechenden Tangenten der Kurve τ^4_A sind die in der Ebene ϱ sich befindenden Pole der Ebene bezüglich der Flächen des Systems $|R^2|$. Es gibt, wie bekannt, 12 solcher Punkte auf Grund dessen man schliessen könnte, die Polkurve sei 12. Ordnung. Man soll aber hier im Betracht ziehen, dass sich in der Ebene ϱ drei Transversalen t der zugeordneten Strahltripel (abc) befinden. Deswegen schneiden sich drei Tripel zugeordneten Ebenen der Kegel T^4_A, T^4_B, T^4_C in drei Geraden t. Diese drei Geraden t stossen die Ebene π in drei Punkten durch, welche als dreideutige Inzidenzpunkte aufgefasst werden müssen. Sie sind aber keine Pole der Ebene ϱ bezüglich der Flächen des Regelflächensystems $|R^2|$.

Also die Pole einer beliebig angenommenen Ebene ϱ bezüglich der Flächen eines Regelflächensystems $|R^2|$ bilden eine Raumkurve 3. Ordnung p^3.

Auf duale Weise wird das einem beliebig angenommenen Raumpunkt P zugeordnete Polarebenengewinde aufgesucht.

Satz 4. *Die Polarebenen eines beliebig angenommenen Raumpunktes P bezüglich der Flächen eines Regelflächensystems $|R^2|$ hüllen ein Ebenengewinde 3. Klasse um.*

Bewei. Um die Polarebene π eines beliebig angenommenen Raumpunktes P bezüglich einer durch ein beliebig gewählten gegebenen Strahltripel (abc) bestimmte Fläche 2. Ordnung R^2 zu erhalten, legt man durch den Punkt P und die Strahlen a, b, c die Ebenen $\tau_A = [Pa]$, $\tau_B = [Pb[$ $\tau_C = [Pc]$. Sie sind die Berührebenen der Fläche R^2. Ihre Berührpunkte D_A, D_B, D_C spannen die Polarebene π des Punktes P auf.

Den Berührpunkt D_A erhält man als den Schnittpunkt des Strahls a mit der Verbindungsgerade B_A B_C, wobei die Punkte B_A und C_A die Stosspunkte der Strahlen b und c mit der Berührebene τ_A sind. Analog erhält man die Berührpunkte D_B und D_C.

Lasse man den Strahl a das Strahlbüschel $a\,(A)$ durchlaufen. Die zugeordnete Berührebenen τ_A bilden dann ein Ebenenbüschel $\tau_A\,(PA)$ mit der Verbindungsgerade der Punkte P und A als Achse. Die Strahlen b des Büschels $b\,(B)$ stossen die entsprechenden Ebenen des Ebenenbüschels $\tau_A\,(PA)$ in den Punkten B_T einer Kurve 2. Ordnung b_T^2 durch. Denn die Strahlbüschel $b\,(B)$ und Ebenenbüschel $\tau_A\,(PA)$ sind zu einander projektiv bezogen, so dass die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Elemente eine in der Ebene β liegende Kurve 2. Ordnung b_T^2 ergeben. Analog erhält man in der Ebene γ eine Kurve 2. Ordnung c_T^2. Die Verbindungsgeraden der Paare projektiv verbundenen Punkte Kurven b_T^2 und c_T^2 erzeugen eine Regelfläche 4. Grades, welche die Ebene α in einer Berührpunktkurve 4. Ordnung d_A^4 schneidet. Die Punkte dieser Kurve sind die in der Ebene α liegenden Berührpunkte des Berührebenenbüschels $\tau_A\,(PA)$. Analog erhält man in den Ebenen β und γ die Berührpunktkurven d_B^4 und d_C^4. Diese Kurven d_A^4, d_B^4 und d_C^4 dind projektiv verbunden. Die durch die entsprechenden Punkte dieser Kurven aufgespannten Ebenen sind die Polarebenen π des Punktes P bezüglich der Flächen R^2 des Systems $|R^2|$.

Um die Polarebenen π zu erhalten, werden zuerst die Verbindungsgeraden der entsprechenden Punktepaare der Kurven d_A^4 und d_B^4 aufgesucht. Sie erzeugen eine Regelfläche 8. Grades T^8. Die durch diese Erzeugenden der Fläche T^8 und durch die entsprechenden Punkte der Kurve d_C^4 werden danach die Polarebenen π aufgespannt. Sie hüllen ein Ebenengewinde, dessen Klasse zu bestimmen ist. Zu diesem Zweck werden die Erzeugenden der Fläche T^8 aus einem beliebigen Raumpunkt T projiziert, womit man einen Kegel 8. Klasse T^8 bekommt. Die Punkte der Kurve 4. Ordnung d_C^4 sind projektiv zugeordnet den Ebenen des Kegels T^8. Deswegen bestehen 12 Punkte, welche mit den entsprechenden Ebenen des Kegels T^8 inzidieren, woraus man beschliessen könnte, das Polarebenengewinde sei 12. Klasse. Hier aber muss in Betracht gezogen werden, dass der im Anfang beliebig angenommener Punkt P sich auf drei dem Flächensystem $|R^2|$ angehörigen Flächen R^2 befindet. Die Erzeugenden t dieser Flächen liegen auf der Fläche T^8. In den drei durch den Punkt T und diese Erzeugenden t gelegten Ebenen inzidiert die Verbindungsgerade der Punkte $D_A D_B$ mit dem Punkt D_C. Diese Ebenen musss man als dreideutige Ebenen auffassen, die aber keine Polarebenen des Punktes P bezüglich der entsprechenden Flächen des Systems $|R^2|$ sind, Auf Grund dieser Betrachtungen ergibt sich dass der beliebig angenommene Raumpunkt T auf nur drei Polarebenen des Punktes P liegt.

Also das dem beliebig angenommenen Raumpunkt P angehörige Ebenengewinde ist 3. Klasse Π^3.

Satz 5. *Eine beliebig angenommene Gerade g berührt sechs Flächen R^2 des Regelflächensystems $|R^2|$.*

Beweis. Um dies zu beweisen, werden wir uns in diesen Fall mit dem bekannten Satz bedienen: Unter den Kurven eines Systems n-ter Ordnung und vom Index N gibt es im allgemeinen $2N(n - 1)$ Kurven, welche eine beliebig gegebene Gerade berühren, wobei der Index N die Zahl der einen Punkt enthaltenden Kurven des Systems ist.

Eine durch beliebige Gerade g gelegte Ebene schneidet das Flächensystem $|R^2|$ in einem Kurvensystem $|r^2|$ 2. Ordnung mit dem Index 3. Dem erwähnten Satz nach ergibt sich, dass die Gerade g $/2 \cdot 3 (2 - 1) = 6/$ 6 Kurven, also auch 6 Flächen des Flächensystems $|R^2|$ berührt.

Satz 6. *Die konjugierten Polaren einer beliebigen Geraden g bezüglich der Flächen R^2 des Scstems $|R^2|$ bilden eine Regelfläche 6. Grades P^6.*

Beweis: Durch eine beliebige Gerade g lege man zwei Ebenen π und σ. Man bestimme die diesen Ebenen angehörige Polkurven p^3 und s^3, die wie es im Satz 3 bewiesen war, Raumkurven 3. Ordnung sind. Verbindet man diejenige Punkte dieser Kurven, welche die Pole bezüglich der selben Fläche R^2 des Flächensystems $|R^2|$ sind, erhält man die konjugierten Polaren der Geraden g bezüglich der entsprechenden Fläche dieses Systems. Da durch diese Verbindung zwischen den Punkten der Kurven p^3 und s^3 eine (1, 1)-deutige Zuordnung hergestellt ist, erhält man dass die der Geraden g konjugierten Polaren bezüglich der Flächen R^2 des Flächensystems eine Regelfläche 6. Grades P^6 erfüllen.

Satz 7. *Die in den Punkten einer beliebigen Geraden an die diese Punkte enthaltenden Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ gelegte Berührebenen hüllen ein Ebenengewinde 9. Klasse T^9 um.*

Beweis. Es sei eine beliebige Gerade g gegeben. Legt man in einem Punkt B dieser Geraden g die Berührebene τ an die den Punkt B enthaltende Fläche R^2 des Systems $|R^2|$, kann man sie als eine durch den Berührpunkt B und die Polare p der Geraden g bezüglich der Fläche R^2 des Systems $|R^2|$ aufgespannte Ebene annehmen. Da durch jeden Punkt der Geraden g je drei Flächen des Systems $|R^2|$ gehen und jeder Polaren bzw. Erzeugenden der im Satz 6 beschrieben Fläche P^6 durch die Berührebenen je zwei Punkte B der Geraden g entsprechen, kann man zwischen den Erzeugenden der Fläche P^6 und den Punkten B der Geraden g eine (2, 3)-deutige Zuordnung herstellen. Durch die vom Punkte B der Geraden g

und der Erzeugenden p der Fläche P^6 aufgespannten Ebenen τ ist das gesuchte Berührenebenengewinde eingehüllt. Auf Grund des Chaslesschen Korrespondenzprinzips erhält man dass das Berührebenengewinde 9. Klasse T^9 ist. Hier wurde im Betracht gezogen dass in der beschriebenen Zuordnung sechs Elemente sich selbst zugewiesen sind, weil die Gerade g sechs Flächen des Systems berührt. $/6 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 6 = 9/$

Satz 8. *Legt man durch einen beliebigen Raumpunkt P die Berührebenene an die Flächen R^2 des Flächensystems $|R^2|$ bilden die Berührpunkte eine Berührpunktfläche* 9. *Ordnung* B^9.

Beweis. Wie bekannt, legt man durch einen beliebigen Raumpunkt P die Berührebenen an eine Fläche 2. Grades, erhält man die Berührpunktkurve als die Schnittkurve der Fläche R^2 mit der Polarebene π des Punktes P bezüglich der Fläche R^2. Lasse man die Regelfläche das Regelflächensystem $|R^2|$ erzeugen, werden die Polarebenen des Punktes P bezüglich der Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ dem Satz 4 nach ein Ebenengewinde 3. Klasse π^3 umhüllen. Die Polarebenen werden die entsprechenden Flächen R^2 in den Punkten der dem Punkt P zugeordneten Berührfläche schneiden. Um die Ordnung dieser Fläche zu bestimmen, wird auf einer beliebigen Geraden g die Inzidenz der Schnittpunkte der Polarebenen mit den entsprechenden Flächen R^2 des Flächensystems $|R^2|$ gesucht. Um dies zu erreichen wird auf der Geraden g eine (3, 6)-deutige Zuordnung hergestellt. Nämlich, wählt man auf der Geraden g einen Punkt G beliebig aus, wird dieser auf drei Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ liegen, denen drei Polarebenen des Gewindes Π^3 zugeordnet sind. Die Stosspunkte dieser Ebenen mit der Geraden g werden mit E bezeichnet. Derselbe Punkt G liegt auf drei Polarebenen des Polarebenengewindes Π^3, denen drei Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ entsprechen, welche die Gerade g in 6 Punkten R durchstossen. Auf diese Weise sind auf der Geraden g jedem Punkt G je 3 Punkte E und 6 Punkte R zugeordnet. Diese (3, 6)-deutige Zuordnung der Stosspunkte der Polarebenen π und der Regelflächen R^2 ergibt 9 inzidente Punkte E und R. Es bedeutet, dass die Berührpunktfläche 9. Ordnung B^9 ist.

Satz 9. *Die Berührpunkte B der Ebenen eines Ebenenbüschels π (g) dessen Achse eine beliebige Gerade g ist, bilden eine Raumkurve* 9. *Ordnung* b^9.

Beweis. Jede durch eine beliebige Gerade g gelegte Ebene π berührt dem Satz 1 nach drei Plächen R^2 des Systems $|R^2|$. Da die Gerade g selbst dem Satz 5 nach sechs Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ berührt, befinden sich in jeder Ebene π des Ebenenbüschels π (g) 9 Berührpunkte B, also ist die Berührpunktkurve 9. Ordnung b^9.

Satz 10. *Die Transversalen t die eine beliebige Gerade g schneiden, bilden eine Regelfläche* 6. *Grades* T^6.

Beweis. Durch eine beliebig angenommene Gerade g lege man eine Ebene ϱ. In dieser liegen dem Satz 1 nach drei Transversalen t. Lasse man die Ebene ϱ ein Ebenenbüschel ϱ (g) mit der Achse g erzeugen, wird sich jeder Punkt der Geraden g auf je drei Transversalen t befinden. Daraus ergibt sich, dass alle die Gerade g schneidende Transversalen t eine Regelfläche 6. Grades T^6 bilden, auf der die Gerade g eine dreifache ist.

Wenn die gewählte Gerade eine Transversale t ist, bilden die diese Transversale t schneidende Transversalen t eine Regelfläche 4. Grades. Nämlich, legt man durch diese Gerade t eine Ebene ϱ, dann liegen in ihr noch zwei die gewählte Transversale t schneidenden Transversalen t. Erzeugt die Ebene ϱ ein Ebenenbüschel $\varrho(t)$, werden durch jeden Punkt der Achse t noch zwei anderen Transversalen t gehen. Diese Achse t wird eine Doppelgerade der Regelfläche sein, die nach Sturm eine Fläche 4. Grades 1. Art ist. Auf dieser Fläche besteht noch eine andere Doppelgerade. Die beiden Doppelgeraden gehören demselben Regulus einer Fläche R^2 des Systems $|R^2|$. Auf diese Weise sind die Erzeugenden eines Regulus involutorisch verbunden.

Liegt die Gerade g in einer der gegebenen Ebenen z. B. α, dann bilden die Gerade g schneidenden Transversalen t eine Regelfläche 6. Grades, die in eine Regelfläche 4. Grades 4. Art und die Kurve 2. Klasse α^2 zerfällt.

Wenn die Gerade g die Tangente der in der Ebene α liegenden Kurve 2. Klasse ist, bilden die diese Tangente schneidenden Transversalen t die Kurve 2. Klasse α^9 und eine Regelfläche 3. Grades T^3, wobei die Tangente die einfache Leitgerade ist und die Doppelgerade demselben Regulus wie die Tangente gehört.

Enthält die Gerade g den Scheitelpunkt A, dann erzeugen die diese Gerade schneidenden Transversalen t den Kegel 2. Grades A^2 und eine Regelfläche 4. Grades 10. Art.

DER DEM REGELFLÄCHENSYSTEM ZUGEORDNETE NORMALENKOMPLEX

Jede beliebig angenommene Ebene π berührt drei Flächen des Regelflächensystems $|R^2|$. Errichtet man in den Berührpunkten B die Normalen an diese Ebene, erhält man die Normalen n der entsprechenden Flächen. Alle Normalen n der Flächen eines Regelflächensystems $|R^2|$ bilden eine dreiparametrige Mannigfaltigkeit, also einen Komplex NK. Es werden sein Grad und einige seine Grundeigenschaften aufgesucht.

Satz 11. *Die einen Fernpunkt F_u enthaltenden Normalkomplexstrahlen n bilden einen Zylinder* 9. *Grades Z^9.*

Beweis. Man wähle beliebig einen Fernpunkt F_u und bestimme seine Fernpolare p_u bezüglich der Absolute. Die Fernpolare wird als die Ferngerade eines Parallelebenenbüschels $\pi(p_u)$ aufgefasst. Die Berührpunkte B der Ebenen dieses Büschels $\pi(p_u)$ mit den Flächen des Regelflächensystems $|R^2|$ bilden eine Raumkurve 9. Ordnung b^9, wie es im Satz 9 bewiesen wurde. Die den Punkten der Kurve b^9 an die Flächen R^9 des Regelflächensystems $|R^2|$ errichtete Normalen n sind zu einander parallel und bilden einen Zylinder 9. Grades mit dem Scheitel im Fernpunkt F_u.

Satz 12. *Die Fusspunkte der mit einer beliebigen Ebene ϱ parallelen Komplexstrahlen n des Normalenkomplexes NK bilden eine Fläche* 9. *Ordnung B^9.*

Beweis. Man wähle beliebig eine Ebene ϱ. Ihrer Ferngeraden p_u sei der Fernpol F_u bezüglich der Absolute zugewiesen. Fasst man diesen Fernpunkt F_u als Fernpol irgend einer Fläche R^2 des Regelflächensystems $|R^2|$ auf, dann schneidet sie die die ihm zugeordnete Polarebene π in einer Kurve 2. Ordnung b^2. Errichtet man in den Punkten dieser Kurve als Fusspunkten die Normalen an die Fläche R^2, werden sie offenbar alle mit der gewählten Ebene π parallel. Die dem Fernpunkt P_u zugeordnete Polarebenen hüllen ein Ebenengewinde 3. Klasse π^3 um und die zugeordneten Berührpunkte bilden eine Fläche 9. Ordnung B^9, wie es im Satz 8 bewiesen wurde. Also die Fusspunkte B mit einer Ebene π parallelen Normalkomplexstrahlen n bilden eine Fläche 9. Ordnung B^9, welche mit der dem Fernpunkt F_u zugeordneten Berührfläche identisch ist.

Satz 13. *Die in einer beliebigen Ebene π liegenden Normalenkomplexstrahlen n hüllen eine Kurve* 18. *Klasse ν^{18} um.*

Beweis. Die Fusspunkte der in einer beliebigen Ebene π liegenden Komplexstrahlen n bilden eine Kurve 9. Ordnung b^9, wie es auf Grund des Satzes 11 hervorgeht. Jeder Punkt B dieser Kurve b^9 ist als Fusspunkt nur einem Komplexstrahl n zugeweisen. Jeder Fernpunkt P_u der Ebene π liegt auf 9 eigentlich Komplexstrahlen n die in der Ebene π liegen. Auf diese Weise kann man zwischen den Punkten P_u der Ferngeraden p_u der Ebene π und den Punkten B der Kurve b^9 eine (9, 1)-deutige Zuordnung herstellen. Die Verbindungsgeraden der so zugeordneten Punktepaare sind Normalkomplexstrahlen n die in der Ebene π eine Komplexkurve 18. Klasse ν^{18} umhüllt. $/1 \cdot 9 + 9 \cdot 1 = 18/$

Satz 14. *Die Komplexstrahlen n die die Fusspunkte auf einer Geraden g enthalten, bilden eine Regelfläche 12. Grades.*

Beweis. Durch eine beliebige Gerade g lege man eine Ebene ϱ. Die in dieser Ebene liegenden Komplexstrahlen n hüllen eine Komplexkurve 18. Klasse ν^{18} um. Die auf den Strahlen n sich befindenden Fusspunkte bilden dem Satz 8 nach eine Kurve 9. Ordnung, welche offenbar die Gerade g in 9 Punkten B schneidet. Also in der Ebene ϱ befinden sich 9 Komplexstrahlen n, welche die Fusspunkte auf der Geraden g haben. Anderseits ist jeder Punkt der Geraden g der Fusspunkt je drei Komplexstrahlen n, woraus folgt, dass die Komplexstrahlen n, die die Fusspunkte B auf der Geraden g haben, eine Regelfläche 12. Grades bilden, auf der die Gerade g eine dreifache ist.

Satz 15. *Die Komplexstrahlen n, die die Fusspunkte B auf einer Ebene haben, bilden eine Kongruenz K* 21. *Ordnung,* 9. *Klasse.*

Beweis. Die Komplexstrahlen n welche ihre Fusspunkte auf einer beliebigen Ebene ϱ haben, bilden eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit, also eine Kongruenz.

Offenbar wird jeder Raumpunkt P soviele Kongruenzstrahlen n enthalten, wieviele Fusspunkte B des dem Punkt P gehörigen Normalenkomplexkegels K^{18} sich in der Ebene ϱ befinden. Also die Ordnung dieser Kongruenz ist gleich der Ordnung der auf dem Kegel K^{18} sich befindenden Fusspunktkurve. Da diese Kurve offenbar eine Kurve 21. Ordnung b^{21} ist, ist die Ordnung der Kongruenz auch 21.

Die Klasse der Kongruenz ist gleich der Ordnung jener Fusspunktkurve, welche sich auf der in einer beliebigen Ebene liegenden Komplexkurve ν^{18} befindet. Diese Fusspunktkurve ist dem Satz 8 nach eine Kurve 9. Ordnung b^9, die also auch die Klasse dieser Kongruenz ist.

Um das Studium des Regelflächensystems $|R^2|$ zu vervollständigen, werden die Achsenfläche, die Hauptkurvenfläche, das System der asymptotischen Kegel, die Striktionskurvenfläche und die Fläche der zentrischen Normalkurven aufgesucht.

DIE ACHSENREGELFLÄCHE

Da jede Regelfläche 2. Grades R^2 drei Achsen hat, bilden die Achsen der Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ eine Regelfläche deren Grad zu bestimmen ist. Um diesen Ziel zu erreichen, soll zuerst in der Fernebene diejenige Fernkurve gesucht werden, die von den Scheiteln der gemeinsamen Poldreiecke der Absolute und je einer Fernkurve r^2 der das Regelflächensystem $|R^2|$ bildenden Flächen R^2 erzeugt wird. 1] Um sie zu erhalten, wird die Tatsache im Betracht gezogen, dass die Pole einer Geraden q bezüglich der Kurven r^2 eines Kurvensystems $|r^2|$ eine Polkurve 6. Ordnung r^6 bilden, was auf Grund des Satzes 6 folgt. Weiterhin hüllen die Polaren eines Punktes P bezüglich der Kurven des Kurvensystems $|r^2|$ eine Kurve 3. Klasse ϱ^3 um, was aus dem Satz 4 hervorgeht.

Man nehme auf einer beliebigen Ferngeraden g_u einen Fernpunkt G_u an und bestimme seine Fernpolare q_u bezüglich der Absolute. Die Fernpole R_u der Fernpolare q_u bezüglich der Fernkurven r_u^2 des Fernkurvensystems $|r_u^2|$ bilden eine Fernkurve 6. Ordnung r_u^6, die die Ferngerade g_u in sechs Fernpunkten R_u schneidet. Die Fernpolaren des Fernpunktes G_u bezüglich der Fernkurven r_u^2 des Fernkurvensystems $|r_u^2|$ hüllen eine Fernkurve 3. Klasse ϱ_u^3 um. Der Fernpol Q_u der Ferngeraden p_u bezüglich der Absolute enthält drei Ferntangenten dieser Fernkurve ϱ_u^3, deren drei Fernpole P_u auf der Ferngeraden g_u liegen. Auf diese Weise sind die Fernpunkte R_u und P_u auf der Ferngerade g_u durch eine (6, 3)-deutige Zuordnung verbunden. Die Inzidenz eines Fernpunktes R_u mit den entsprechenden Fernpunkt P_u bedeutet, dass dies ein Scheitelpunkt des gemeinsamen Poldreiecks der Absolute und einer Fernkurve r_u^2 der Fläche R^2 des Systems $|R^2|$ ist.

Auf Grund der Tatsache, dass eine (6, 3)-deutige Zuordnung auf einer Geraden 9 Inzidenzpunkte hat, schliesst man, dass die Scheitelpunkte der gemeinsamen Poldreiecke der Absolute und je einer Fernkurve r_u^2 des Fernkurvensystems $|r_u^2|$ eine Fernkurve 9. Ordnung bilden, welche mit o_u^9 bezeichnet sei.

Satz 16. *Die Achsen der Flächen R^2 eines Regelflächensystems $|R^2|$ bilden eine Regelfläche 15. Grades O^{15}.*

Beweis. Man erhält die Achsenfläche die einem Regelflächensystem zugeordnet ist, durch die Verbindung der Mittelpunkte M der Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ mit den entsprechenden Fernscheiteln gemeinsamen Fernpoldreiecke der Absolute und der Fernkurven r_u^2 des Fernkurvensystems $|r_u^2|$. Die Mittelpunkte M der Flächen R^2 als Pole der Fernebene bezüglich der Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ bilden dem Satz 3 nach eine Raumkurve 3. Ordnung m^3 und die Fernscheitelpunkte erzeugen eine Fernkurve 9. Ordnung o_u^9.

Jedem Fernpunkt O_u der Fernkurve o_u^9 entspricht nur ein Punkt M der Kurve m^3, und jedem Punkt M der Kurve m^3 sind drei Fernpunkte O_u der Fernkurve o_u^9 zugeordnet. Auf diese Weise sind beide Kurven o_u^9 und m^3 durch eine (1, 3)-deutige Zuordnung verbunden. Dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip nach erzeugen die Verbindungsgeraden der zugeordneten Punktepaare eine Regelfläche 15. Grades O^{15}. $/9 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 = 15/$. Da das Regelflächen system drei hyperboloidische Paraboloide enthält, bestehen in beschriebener Zuordnung drei Fernpunkte O_u und M_u, nämlich die Fernscheitelpunkte der hyperbolischen Paraboloide, welche zusammenfallen und sich selbst zugeordnet sind. Deswegen wird das Erzeugnis in der Chaslesschen Relation um 3 verringert.

DAS SYMMETRIEEBENENGEWINDE

Jede Fläche 2. Grades hat drei Symmetrieebenen, welche auch als Hauptebenen bekannt sind. Da jede Symmetrieebene auf die entsprechende Achse orthogonal ist, erhält man seine Fernspur als die Fernpolare des Fernpunktes O_u der Achse bezüglich der Absolute. Die Symmetrieebenen aller Flächen eines Regelflächensystems hüllen ein Ebenengewinde um, dessen Klasse zu bestimmen ist.

Satz 17. *Die Symmetrieebenen der Fflächen R^2 eines Regelflächensystems $|R^2|$ hüllen ein Ebenengewinde 12. Klasse Γ^{12} um.*

Beweis. Da die Fernpunkte der Achsen der Flächen R^2 des Flächensystems $|R^2|$ eine Fernkurve 9. Ordnung o_u^9 bilden, hüllen offenbar die Fernpolaren dieser Fernpunkte bezüglich der Absolute eine Fernkurve 9. Klasse γ_u^9 um. Man erhält die Ebenen des Symmetrieebenengewindes als die Verbindungsebenen der Flächenmittelpunkte M der Kurven m^3 mit den entsprechenden Ferntagenten g_u der Fernkurve γ_u^9. Jeder Ferntangente g_u der Fernkurve γ_u^9 entspricht ein Mittelpunkt M der Kurve m^3 und jedem Punkt M der Kurve m^3 sind drei Ferntangenten g_u der Fernkurve γ_u^9 zugeordnet. Auf Grund solcher Verbindung der Ferntangenten g_u der Fernkurve γ_u^9 und der Punkte M der Kurve m^3 ensteht eine (1, 3)-deutige Zuordnung. Die Verbindungsebenen der Punkte M mit den entsprechenden Ferntangenten g_u hüllen, der Chaslesschen Relation nach, ein Ebenengewinde 12.Klasse Γ^{12} um. $/9 \cdot 1 + 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 = 12/$. Wegen der drei im Regelflächensystem $|R^2|$ sich befindenden hyperbolischen Paraboloide wird in der beschriebenen Zuord nung die Inzidenz des Fernscheitels mit je zwei Fernspuren der Symmetrieebenen vorkommen. Deshalb wird in dieser Chaslesschen Relation das Erzeugniss um 6 vermindert.

DIE HAUPTKURVENFLÄCHE

Die in den Symmetrieebenen liegenden Kurven der Regelfläche R^2 sind als die Hauptkurven dieser Fläche bekannt. Alle diese Kurven auf den Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ bilden eine Hauptkurvenfläche, deren Ordnung jetzt gesucht wird. [1]

Satz 18. F*ie Hauptkurven der Regelflächen R^2 des Systems $|R^2|$ bilden eine Fläche 21. Ordnung G^{21}.*

Beweis. Um die Ordnung der Hauptkurvenfläche zu bestimmen, werden auf einer Geraden g die Inzidenzpunkte der Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ mit den entsprechenden Symmetrieebenen gesucht.

Man nehme eine beliebige Gerade g an. Ein Punkt P dieser Geraden liegt auf drei Flächen R^2 des Systems $|R^2|$, denen 9 Symmetrieebenen zugeordnet sind, welche die Gerade g in 9 Punkte G schneiden. Durch denselben Punkt P gehen 12 Symmetrieebenen, welchen 12 Flächen R^2 entsprechen, die von der Geraden g in 24 Punkten R durchgestossen sind. Auf diese Weise bilden die Punkte G und R auf der Geraden g eine (9, 24)-deutige Zuordnung, die, wie bekannt, 33 Inzidenzpunkte ergibt. Hier soll beachtet werden dass das Regelflächensystem $|R^2|$ sechs in je zwei Ebenen ausgeartete Flächen enthält. Die Stosspunkte der Geraden g mit diesen Ebenen befinden sich unter den erwähnten Inzidenzpunkten. Deshalb muss die Zahl der Inzidenzpunkte um 12 verringert werden. Es ist übriggeblieben, dass die Gerade g die Hauptkurvenfläche in 21 Punkten schneidet, also eine Fläche 21. Ordnung G^{21} ist.

DAS SYSTEM DER ASYMPTOTISCHEN KEGEL

Jeder Fläche 2. Grades R^2 ist ein asymptotischer Kegel 2. Grades A^2 zugeordnet. Wenn die Flächen R^2 ein Regelflächensystem $|R^2|$ bilden, erfüllen auch die asymptotischen Kegel A^2 ein stetiges lineares System $|A^2$j. Um den Index des Systems $|A^2|$ zu erreichen, werden in einem beliebig angenommenen Raumpunkt P die asymptotischen Ebenen an den Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ gelegt und die von den Fernberührpunkten A_u erzeugte Fernkurve aufgesucht.

Satz 19. *Die Fernberührpunkte der durch einen beliebigen Punkt P an die Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ gelegten asymptotischen Ebenen erzeugen eine Fernkurve* 9. *Ordnung a^9.*

Beweis. Die Fernberührpunkte A_u liegen offenbar auch auf den Ferngeraden der Polarebenen des Punktes P bezüglich der Flächen R^2 des Systems $|R^2|$. Da die Polarebenen des Punktes P ein Ebenengewinde 3. Klasse Π^3 umhüllen, wird die Ordnung der Fernberührkurve bestimmt, indem man auf einer beliebigen Ferngeraden g_u die inzidente Fernpunkte der entsprechenden Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ und der Polarebenen des Gewindes Π^3 aufsuchen werden. Ein Fernpunkt G_u der Ferngerade g_u liegt auf drei Flächen R^2 des Systems $|R^2|$, denen drei Polarebenen des Gewindes Π^3 entsprechen. Diese haben auf der Ferngeraden g_u drei Fernstosspunkte P_u. Derselbe Fernpunkt G_u liegt auf drei Polarebenen π des Gewindes Π^3, welchen drei Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ zugeordnet sind und die von der Ferngeraden g_u in sechs Fernpunkten R_u durchgestossen werden. Auf diese Weise ist auf der Ferngerade g_u eine (3, 6)-deutige Zuordnung der Punkte P_u und R_u hergestellt, welche 9 Inzidenzpunkte hat. Auf Grund dieser Überlegungen geht hervor, dass die Fernberührpunktkurve des Kegels der durch den Punkt P an die Flächen des Systems $|R^2|$ gelegten asymptotischen Ebenen eine Fernkurve 9. Ordnung a^9 ist.

In weiteren Betrachtungen wird diese Fernkurve von einer besonderen Wichtigkeit sein.

Satz 20. *Der Index des Systems der asymptotischen Kegel $|A^2|$ das einem Regelflächensystem $|R^2|$ zugeordnet ist, ist gleich* 6.

Beweis. Die durch einen beliebigen Raumpunkt P an die Flächen R^2 des System $|R^2|$ gelegten asymptotischen Ebenen hüllen einen Kegel um. Ihre Fernberührpunkte erzeugen eine Fernkurve 9. Ordnung a_u^9. Die Fernpunkte A_u der Fernkurve a_u^9 sind mittels der Ferngeraden p_u des dem Punkt P bezüglich der Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ zugeordneten Polarebenengewindes Π^3 involutorisch verbunden. Die Inzidenzpunkte in dieser Involution sind diejenige Fernpunkte, die mit dem Punkt P verbunden, die Erzeugenden des den Punkt P enthaltenden asymptotischen Kegel darstellen. Die Zahl dieser Erzeugenden ist der Index des Systems der asymptotischen Kegel $|A^2|$. Auf Grund der Chaslesschen Relation geht hervor, dass ein beliebiger Raumpunkt P auf sechs Kegeln A^2 liegt welche dem System der asymptotischen Kegel $|A^2|$, das dem Regelflächensystem $|R^2|$ zugeordnet ist, gehören.

Satz 21. *Die durch einen Raumpunkt P an die Flächen eines Regelflächensystem $|R^2|$ gelegte asymptotische Ebenen hüllen einen Kegel 9. Klasse A^9 um.*

Beweis. Die durch einen beliebigen Raumpunkt P an die Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ gelegten asymptotischen Ebenen sind durch die den Punkt P enthaltenden Diameter d und die entsprechenden Fernberührpunkte A_u aufgespannt. Die Fernberührpunkte A_u erzeugen die Fernkurve 9. Ordnung a_u^9 und die Diameter d bilden einen Kegel 3. Grades D^3. Zwischen ihren Elementen besteht eine (1, 2)-deutige Zuordnung, welche der Chalesschen Relation nach einen Kegel 9. Klasse A^9 umhüllen. In dieser Relation wird es um 6 vermindert, weil 6 die Zahl der den Punkte P enthaltenden Erzeugenden der asymptotischen Kegel des Systems $|A^2|$ ist. Auf diesen Erzeugenden fallen die Fernpunkte der Diameter mit den entsprechenden Fernberührpunkten zusammen. $/9 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 6 = 9/$.

DIE STRIKTIONSLINIENFLÄCHE

Beide Reguli auf einer Regelfläche 2. Grades haben die Striktionslinien, welche man als die Durchdringungskurven der Fläche R^2 mit einem Zentralkegel 4. Grades Z^4 angenommen werden kann. Wenn die Regelfläche R^2 das System $|R^2|$ erzeugt, werden die zugeordneten Zentralkegel Z^4 ein System $|Z^4|$ bilden und die entsprechenden Striktionslinien eine Striktionslinienfläche 24. Ordnung S^{24} erfüllen. [2].

Satz 22. *Die Zentralkegel Z^4, die den Flächen 2. Grades R^2 eines Systems $|R^2|$ zugeordnet sind, bilden ein System $|Z^4|$ mit dem Index 6.*

Beweis. Um festzustellen wieviele Zentralkegel Z^4 einen Raumpunkt P enthalten, wird ein Direktionskegel betrachtet, dessen Erzeugenden denjenigen Zentralebenen konjugiert sind, welche den den Punkt P enthaltenden asymptotischen Ebenen zugeordnet sind. Durch einen beliebigen Raumpunkt P lege man an die Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ die asymptotischen Ebenen. Sie hüllen dem Satz 20 nach einen Kegel 9. Klasse A^9 um mit der Fernberührpunktkurve 9. Ordnung a_u^9. Die Fernpole C_u der Ferngeraden dieser Ebenen erzeugen bezüglich der Absolute eine Fernkurve 9. Ordnung c_u^9. Die Verbindungsgeraden der entsprechenden-Fernberührpunkte A_u und Fernpole C_u sind die Ferngeraden der den asymptotie schen Ebenen zugeordneten Zentralebenen und hüllen eine Fernkurve 18. Klasse ζ_u^{18} um. Die Fernpole Z_u der Ferntangenten dieser Fernkurve ζ_u^{18} befinden sich auf den Fernspuren der entsprechenden asymptotischen Ebenen und sind die Fernpunkte der den Direktionskegel bildenden Erzeugenden. Da die Fernpunkte Z_u den Fernberührpunkten A_u (1, 1)-deutig zugeordnet sind, kann man der Chaslesschen Relation nach erhalten, dass die Fernpolkurve eine Fernkurve 18. Ordnung z_u^{18} ist. In der Relation wird das Erzeugnis um 18 verringert, weil der Kegel A^9 mit der Absolute 18 Ferntangenten gemein hat auf denen die zugeordnete Fernpunkte A_u und Z_u zusammenfallen. $/9 \cdot 1 + n \cdot 1 - 18 = 9;\ n = 18/$.

Projiziert man die Fernkurve z_u^{18} aus dem Punkt P erhält man dadurch den Direktionskegel Z^{18}. Diejenige Erzeugenden des Kegels Z^{18}, welche auch die Diameter der entsprechenden Flächen R^2 sind, also welche dem Kegel D^3 der von den den Punkt P enthaltenden Diameter d gebildet ist, angehören, sind die Erzeugenden z des durch den Punkt P gehenden Zentralkegels Z^4. Zwischen den Erzeugenden z des Direktionskegels Z^{18} und den Erzeugenden d des Kegels D^3 besteht eine (1, 2)-deutige Zuordnung. Die Zahl der in dieser Zuordnung zusammenfallenden und einander zugeordneten Elemente stellt vor, wieviele der Zentralkegel Z^4 den Punkt P enthalten. Da in der beschriebener Zuordnung die Verbindungsgeraden wiederum die Fernkurve des Kegels A^9 umhüllen, erhält man dem Chasles nach die Zahl 15. $/18 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - x = 9;\ x = 15/$. Man muss berücksichtigen, dass drei dieser 15 Erzeugenden die Verbindungsgeraden des Punktes P mit den Fernscheitelpunkten der im System $|R^2|$ sich befindenden hyperbolischen Paraboloide sind und nicht ihren ausgearteten Zentralkegeln gehören. Ferner sind sechs Verbindungsgeraden des Punktes P mit den Fernpunkten der Schnittgeraden der im System $|R^2|$ sich befindenden in zwei Ebenen ausgearteten Flächen keine Erzeugenden der Zentralkegel. Demnach ist der Index des Systems der Zentralkegel $|Z^4|$ gleich 6.

Satz 23. *Die Striktionslinien der Flächen R^2 eines Regelflächensystems $|R^2|$ bilden eine Fläche* 24. *Ordnung S^{24}.*

Beweis. Um die Ordnung der Striktionslinienfläche zu erhalten, werden auf ei er beliebigen Gerade g diejenige Punkte gesucht, die die Inzidenzpunkte der Regelfläche R^2 mit den zugeordneten Zentralkegeln Z^4 sind. Ein Punkt P der Geraden g liegt auf drei Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ denen drei Zentralkegel Z^4 entsprechen die von der Geraden g in 12 Punkten durchgestossen sind. Derselbe Punkt P liegt auf 6 Zentralkegel Z^4, denen 6 Flächen R^2 zugeordnet sind und welche von der Geraden g in 12 Punktten durchgestossen sind. Auf diese Weise sind diese Punkte Z und R der Geraden g durch eine (12, 12)-deutige Zuordnung verbunden. Daraus geht hervor, die Striktionslinienfläche sei 24. Ordnung S^{24}.

DIE FLÄCHE DER ZENTRISCHEN FUSSPUNKTE

Nimmt man den Mittelpunkt M einer Fläche 2. Grades R^2 als Pol einer Fusspunktkurve, bekommt man auf jedem Regulus eine zentrische Fusspunktkurve, die eine Raumkurve 4. Ordnung 2. Art ist. Diese Kurven können als die Durchdringungskurve der Fläche R^2 und eines zentrischen Normalkegels N^4 betrachtet werden. Wenn die Regelfläche R^2 das System $|R^2|$ erzeugt, bilden die zugeordneten zentrischen Normalkegel N^4 ein System $|N^4|$, während die zentrischen Fusspunktkurven die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven erfüllen. [3]

Satz 24. *Die zentrischen Normalkegel N^4 die den Flächen R^2 eines Regelflächensystems $|R^2|$ zugeordnet sind, bilden ein System $|N^4|$ mit dem Index* 6.

Beweis. Die einen beliebigen Punkt P enthaltenden asymptotischen Ebenen hüllen, dem Satz 20 nach, einen Kegel 9. Klasse A^9 um. Um den Index des Systems der zentrischen Normalkegel zu erhalten, wird ein Direktionskegel untersucht, dessen Erzeugenden n der der Ebenen des Kegels A^9 zugeordneten Normalen parallel sind. Die Erzeugemden n sind die Schnittgeraden der asymptotischen und derjenigen Ebenen deren Ferngeraden die Fernpolaren der Fernberührpunkten A_u der asymptotischen Ebenen bezüglich der Absolute sind. Da die Fernberührpunkte A_u der asymptotischen Ebenen des Kegels A^9 eine Fernkurve 9. Ordnung a_u^9 bilden, hüllen die entsprechenden Polaren bezüglich der Absolute eine Fernkurve 9. Klasse v^9 um. Die Fernschnittpunkte der Ferntangenten der Fernkurven a_u^9 und v_u^9 erzeugen eine Fernkurve 18. Ordnung n_u^{18}. Wenn man diese Fernkurve aus dem Punkt P projiziert, erhält man dadurch den Direktionskegel N^{18}. Die den Punkt P enthaltenden Diameter erzeugen den Kegel 3. Grades D^3. Jeder Erzeugenden des Kegels D^3 sind je zwei Erzeugenden des Direktionskegels N^{18} zugeordnet. Auf Grund dieser (1, 2)-deutigen Zuordnung geht hervor, dass die in dieser Verbindung sich selbst zugeordneten Erzeugenden die Erzeugenden n der zentrischen Normalkegel N^4 des Systems $|N^4|$ sind. Der Chaslesschen Relation nach schliesst man, dass in dieser Zuordnung 15 Erzeugenden auch die Erzeugenden der zentrischen Normalkegel N^4 sind. $/18 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - x = 9; x = 15/$. Unter ihnen sind drei Verbindungsgeraden des Punktes P mit den Fernscheiteln im System $|R^2|$ sich befindenden hyperbolischen Paraboloide die aber nicht den ausgearteten Normalkegeln dieser Flächen gehören. Sechs Parallelen mit den Schnittgeraden der in je zwei Ebenen ausgearteten Flächen des Systems $|R^2|$ sind auch nicht die Erzeugenden der Normalkegel. Demnach ergibt sich, dass der Index des Systems der zentrischen Normalkegel $|N^4|$ gleich 6 ist.

Satz 25. *Die zentrische Normalkurven die an den Flächen R^2 eines Regelflächensystems $|R^2|$ liegen, bilden eine Fläche der zentrischen Fusspunktkurven, welche* 24. *Ordnung N^{24} ist.*

Beweis. Die Ordnung der Fläche der zentrischen Fusspunktkurven wird bestimmt, indem auf einer beliebigen Geraden g die Inzidenzpunkte der Fläche R^2 mit den entsprechenden zentrischen Normalkegeln N^4 festgestellt werden. Durch einen beliebigen Punkt P der Geraden g gehen drei Flächen R^2 des Systems $|R^2|$ denen drei zentrischen Normalkegel N^4 entsprechen. Die Gerade g stosst diese Kegel in 12 Punkten N durch. Durch denselben Punkt P gehen 6 zentrische Normalkegel N^4, denen 6 Flächen R^2 zugeordnet sind. Die Gerade g stosst diese Flächen in 12 Punkten N. Zwischen den Punkten R und N besteht also auf der Geraden g eine (12, 12)-deutige Zuordnung, welche dem Chasles nach 24 Inzidenzpunkte hat. Man schliesst daraus, dass die Fläche der zentrischen Normalkurven welche einem Regelflächensystem zugeordnet ist, von 24. Ordnung N^{24} ist.

LITERATUR:

1. *Lj. Dočkal,* Die Hauptkurvenfläche in linearen Flächensystemen 2. Ordnung, Rad JAZU 370, XIV, 1975. 107—115.
2. *Lj. Dočkal,* Die Striktionslinienfläche eines linearen Regelflächensystems 2. Ordnung, Glasnik matematički, 9 (29) (1974), 109—124.
3. *Lj. Dočkal,* Die Fläche der zentrischen Fusspunktkurven in linearen Regelflächensystemen 2. Ordnung, Rad JAZU 370, XIV, 1975, 93 106.