Ljerka Dočkal

NORMALENKOMPLEX DER FLÄCHEN EINER FLÄCHENSCHAR 2. GRADES

EINLEITUNG

Prof. Niče hat in seinem Artikel »Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades« die Grundeigenschaften dieses Komplexes bearbeitet. Einem Flächenbüschel ist eine Flächenschar dual und wegen seiner Besonderheiten ist es vom Interesse die Eigenschaften des der Flächenschar zugeordneten Normalenkomplexes aufzusuchen. [1]

In einem projektiven Raum P^3, dem als Modell der durch die Fernebene ergänzte euklidische Raum E^3 dient, sei eine Flächenschar 2. Grades $|F^2|$ gegeben. Ein beliebig angenommener Raumpunkt P liegt auf drei Flächen F^2 der Schar $|F^2|$ und eine beliebige Ebene π berührt nur eine. Nimmt man eine Ebene π beliebig an und errichtet man im Berührpunkt B dieser Ebene mit einer Fläche der Schar $|F^2|$ die Normale n an diese Ebene, so erhält man die Normale n der Fläche F^2. Jeder Ebene π des Raumes ist auf diese Weise eine Normale n einer Fläche F^2 der Flächenschar $|F^2|$ zugeordnet. Alle Normalen n bilden eine dreiparametrige Mannigfaltigkeit, also einen Komplex, der als einer Flächenschar 2. Grades $|F^2|$ zugeordnete Normalenkomplex NK genannt wird.

Bevor der Normalenkomplex NK ausgeprüft wird, werden jene Grundeigenschaften der Flächenschar $|F^2|$ erwähnt, welche bei der Untersuchung dieses Problems in Anspruch genommen werden.

1. Die Pole einer beliebigen Ebene π bezüglich der Flächen der Schar $|F^2|$ liegen auf einer Geraden p.
2. Die Polarebenen eines beliebigen Punktes P hüllen bezüglich der Flächen der Schar $|F^2|$ ein Ebenengewinde 3. Klasse um.
3. Legt man durch einen beliebigen Raumpunkt P die Berührebenen an alle Flächen der Schar $|F^2|$, bilden die Berührpunkte B eine Berührfläche 5. Ordnung B^5.
4. Wenn eine Ebene π ein Ebenenbüschel $\pi(g)$ erzeugt, bilden die zugeordneten Berührpunkte B eine Raumkurve 3. Ordnung b^3.
5. Wenn man in den Punkten P einer Geraden g an die diesen Punkt P enthaltenden Flächen der Schar $|F^2|$ die Berührebenen τ legt, dann hüllen sie ein Ebenengewinde 5. Klasse T^5 um.

6. Es besteht ein Ebenengewinde 4. Klasse 1. Art, deren Ebenen alle Flächen der Schar $|F^2|$ berühren.
7. Die in den Ebenen τ des Ebenengewindes T^4 sich befindenden Berührpunkte der Flächen der Schar $|F^2|$ liegen auf einer Geraden t.
8. Die Schnittgeraden t der konsekutiven Ebenen τ des Ebenengewindes T^4 erzeugen eine Torse T^8.

GRUNDEIGENSCHAFTEN DES *NK* KOMPLEXES

Satz 1. *Die einen Fernpunkt enthaltenden eigentliche Strahlen n des Normalenkomplexes NK bilden einen Zylinder 3. Grades Z^3.*

Beweis. Es sei ein Fernpunkt N_u gegeben. Die Fernpolare dieses Fernpunktes bezüglich der Absolute sei mit p_u bezeichnet. Man nehme das Parallelebenenbüschel $\pi(p_u)$ an, dessen Fernspur die Ferngerade p_u sei. Die Berührpunkte B der Ebenen des Büschels $\pi(p_u)$ mit den Flächen F^2 der Schar $|F^2|$ bilden eine Raumkurve 3. Ordnung b^3. Errichtet man in diesen Berührpunkten die Normalen an die Ebenen des Büschels $\pi(p_u)$, so sind alle diese Normalen zueinandern parallel und bilden einen Zylinder 3. Grades mit dem Scheitelpunkt im Fernpunkt N_u. Also alle eigentliche einen Fernpunkt N_u enthaltende Strahlen n des Normalenkomplexes NK bilden einen Zylinder 3. Grades Z^3.

Da jeder Fernpunkt auch die Fernstrahlen enhält, soll man ausprüfen, wann eine Ferngerade ein Normalenkompelxstrahl wird.

Satz 2. *Jede Ferngerade ist ein fünffacher Strahl n des Nornalenkomplexes NK.*

Beweis. Legt man an eine Fläche 2. Grades F^2 eine Berührebene mit dem Berührpunkt in einem Fernpunkt F_u der Fläche F^2, so erhält man in diesem Fernpunkt F_u errichtete Normale der Fläahe F^2 als die Verbindungsgerade des Fernpunktes F_u mit dem Fernpol der Berührebenenferngerade bezüglich der Absolute. Nimmt man eine Ferngerade g_u beliebig an und legt man in jedem Fernpunkt F_u dieser Ferngeraden g_u die Ferntangenten f_u an die, diesen Fernpunkt F_u enthaltenden, Fernkurven der Flächenschar $|F^2|$ so erhält man eine Fernkurve 5. Klasse. Die Fernpole P_u dieser Ferntangenten bezüglich der Absolute bilden eine Fernkurve 5. Ordnung p_u^5. Diese Fernkurve p_u^5 schneidet die Ferngerade g_u in fünf Fernpunkten P_u so dass auf der Ferngeraden g_u je fünf Fernpole P_u samt den ihnen zugeordneten Fernberührpunkten F_u liegen. Also jede Ferngerade g_u ist ein fünffacher Strahl n des Normalenkomplexes NK.

Um die weiteren Grundeigenschaften des NK zu erhalten, soll zu erst diejenige Fläche geprüft werden, welche von den Fusspunkten der mit einer Ebene parallelen Komplexstrahlen gebildet wird.

Satz 3. *Die Fusspunkte der mit einer Ebene parallelen Komplexstrahlen bilden eine Fläche 5. Ordnung B^5.*

Beweis. Man nehme einen Fernpunkt N_u beliebig an. Die Polarebene des Fernpunktes N_u bezüglich einer Fläche 2. Ordnung F^2 ist eine Diametralebene

δ, die die Fläche F^2 in einer Kurve 2. Ordnung b^2 schneidet. Errichtet man in den Punkten der Kurve b^2 als Fusspunkten die Normalen n an die Fläche F^2, dann sind alle diese Normalen n mit der dem Fernpunkt N_u bezüglich der Absolute konjugierten Ebene π parallel. Alle diese Normalen bilden ein Konoid 4. Grades. Nämlich je zwei dieser Normalen sind parallel und man erhält dieses Konoid indem man zwischen den Punkten der Kurve b^2 und der Ferngeraden p_u der Ebene π eine (1, 2)-deutige Zuordnung hergestellt hat. Die Verbindungsgeraden der so zugeordneten Punkten bilden das Konoid 4. Grades K^4.

Lasse man den Fernpunkt N_u festbleiben und die Fläche F^2 eine Flächenschar 2. Grades $|F^2|$ erzeugen. Die Polarebenen des Fernpunktes N_u bezüglich der Flächen der Flächenschar $|F^2|$ bilden, wie bekannt, ein Ebenengewinde 3. Klasse. Die Ebenen dieses Gewindes schneiden die entsprechenden Flächen F^2 der Schar $|F^2|$ in je einer Kurve 2. Ordnung b^2. Es ist bekannt, dass alle diese Kurven b^2 eine Fläche 5. Ordnung B^5 bilden. Die in den Punkten der Fläche B^5 an die zugeordnete Flächen F^2 der Schar $|F^2|$ errichtete Normalen n sind mit der Ebene π parallel. Also die Fusspunkte der mit einer Ebene π parallelen Normalkomplexstrahlen bilden eine Fläche 5. Ordnung B^5.

Da der Fernpunkt N_u beliebig angenommen war, kann man irgend eine Ebene π der Parallelebenbüschels $\pi(p_u)$ als beliebig angenommene betrachten. Die Fusspunkte der in dieser Ebene liegenden Normalkomplexstrahlen n bilden eine Kurve 5. Ordnung, die die Schnittkurve der Fläche B^5 mit der Ebene π ist.

Satz 4. *Die in einer Ebene liegenden Komplexstrahlen n hüllen eine Kurve 8. Klasse um.*

Beweis. Die Fusspunkte der in einer beliebigen Ebene π liegenden Komplexstrahlen bilden, wie es im Satz 3 bewiesen war, eine kurve 5. Ordnung. Jedem Punkt dieser Kurve gehört nur eine Normale n als Komplexstrahl. Da die einen Fernpunkt enthaltenden Komplexstrahlen nach dem Satz 1 einen Zylinder 3. Grades bilden, so enthalten je drei in der Ebene π liegenden Komplexstrahlen denselben Fernpunkt. Zwischen den Punkten der Fusspunktkurve 5. Ordnung b^5 und den Fernpunkten der Ferngeraden p_u besteht eine (1, 3)-deutige Zuordnung. Wie bekannt, hüllen die Verbindungsgeraden der so zugewiesenen Punktepaare dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip nach, eine Kurve 8. Klasse um. Diese Verbindungsgeraden sind Komplexstrahlen n des betrachteten Normalenkomplexes, der also 8. Grades ist.

Da die Klasse eines Komplexes gleich seiner Ordnung ist, ergibt sich auf Grund dessen, das ein Normalkomplexkegel des Normalkomplexes NK 8. Ordnung ist.

Satz 5. *Die Fusspunkte auf den einen Komplexkegel bildenden Komplexstrahlen bilden eine Raumkurve 11. Ordnung.*

Beweis. Um dies zu bewiesen, beachten wir, dass alle Normalen einer Flächen 2. Grades, wie bekannt, eine Kongruenz 6. Ordnung, 2. Klasse bilden. Man nehme eine Ebene π beliebig an. Sie berührt eine Fläche F^2 der Schar $|F^2|$ im Punkte P. Wenn man den Komplexkegel mit dem Scheitelpunkt im Punkte P betrachtet, bemerkt man, dass jede Erzeugende n dieses Kegels je einen Fusspunkt enthält und alle diese Fusspunkte eine Raumkurve bilden. Um die Ordnung dieser Fusspunktkurve zu erhalten, werden wir die Schnittpunkte dieser Kurve mit einer Fläche 2. Ordnung aufsuchen. Im unseren Fall wird das diejenige Fläche F^2 der Schar $|F^2|$ sein, dessen Berührebene die Ebene π ist.

Da eine Normalenkongruenz einer Fläche 2. Grades von 6. Ordnung ist, kann man durch den Punkt P sechs Normalen an die diesen Punkt P enthaltende und die Ebene π berührende Fläche der Schar $|F^2|$ legen, deren Fusspunkte an der Fläche F^2 liegen.

Die Fläche F^2 wird auch die Fusspunkte jener Normalen enthalten, welche durch den Punkt P rechtwinklig an die Fläche der Biplanaren T^8 gelegt sind. Es ist nämlich bekannt, dass ein Ebenengewinde T^4 4. Klasse 1. Art besteht, dessen konsekutive Biplanaren eine Torse T^8 8. Grades bilden. Stellt man in den Punkten einer Biplanare t die Normalen n an die entsprechende Ebene des Ebenengewindes T^4 auf, entsteht ein Büschel $n\,(C_u)$ der Parallelgeraden, das dem Normalenkomplex gehört. Jede dieser Normalen wird nur dann den Punkt P enthalten, wenn sie in einer Ebene (Pt) liegt, die durch den Punkt P und eine Biplanare t aufgespannt ist, welche auch ein Parallelgeradenbüschel $n\,(C_u)$ enthält. Da alle diese Biplanaren t eine Torse 8. Grades T^8 bilden, werden sie aus dem Punkt P durch einen Kegel 8. Klasse Σ^8 projiziert. Die Fernpunkte C_u der an die Ebenen des Berührebenengewindes T^4 gelegten Normalen bilden eine Fernkurve 4. Ordnung c_u^4, welche sich durch das Polarisieren der Ferngeraden t_u des Ebenengewindes T^4 bezüglich der Absolute ergibt.

Die Ferntangenten der Fernkurve σ^8 des Kegels Σ^8 und die Fernpunkte der Fernkurve c_u^4 sind (1, 1)-deutig zugeordnet, was, wie bekannt, eine Inzidenz von zwölf entsprechenden Elementen ergibt.

Auf Grund dieser Betrachtungen könnte man schliessen, dass die Fläche F^2 18 Fusspunkte enthält, also die Fusspunktkurve von 9. Ordnung sein müsste, weil sie mit einer Fläche 2. Grades 18 Schnittpunkte enthält. Im Punkte P befinden sich aber auch die Fusspunkte der Normalen der beiden anderen den Punkt P enthaltenden Flächen, so dass der Punkt P ein dreifacher Punkt der Fusspunktkurve ist, die selbst deswegen von 11. Ordnung ist. Projiziert man diese Kurve aus den dreifachen Punkt P, erhält man einen Projektionskegel 8. Ordnung K^8, was mit dem Komplexkegel übereinstimmt.

Wenn der Punkt P ein Fernpunkt ist, zerfält die Fusspunktkurve in eine eigentliche Raumkurve 3. Ordnung und eine Fernkurve 8. Ordnung.

SINGULARITÄTEN

Unter den Singularitäten eines Komplexes versteht man die Punkte bzw. Ebenen, welche die Scheitel von zweiparametrigen Mannigfaltigkeiten der Komplexstrahlen sind oder eine solche enthalten.

Als singuläre Ebene soll zu erst die Fernebene erwähnt sein. Nämlich im Satz 2 wurde bewiesen, dass jede Ferngerade ein fünffacher Normalenkomplexstrahl ist.

Jede Flächenschar 2. Grades $|F^2|$ enthält vier in die Kurven 2. Klasse ausgearteten Flächen, die in den Hauptebenen des Haupttetraeders liegen. In den Fernpolen G_u der Ferngeraden der diese Kurven 2. Klasse enthaltenden Ebenen bezüglich der Absolute erhält man vier Fernpunkte, die die Singulärpunkte sind, weil jeder Strahl eines solchen Fernpunktes als Normale der entsprechenden Ebene betrachtet werden kann.

Zu den Singularitäten gehören auch diejenige Punkte bzw. Ebenen in denen die Komplexkegel bzw. Komplexkurven ausarten.

SINGULÄRE EBENEN

1. In jeder auf eine Hauptebene des Haupttetraeders der Flächenschar $|F^2|$ normal gelegte Ebene zerfällt die Komplexkurve in ein Parallelstrahlbüschel und eine Komplexkurve 7. Klasse.

Nehme man einen Fernpol H_u auf der Ferngeraden einer Hauptebene χ beliebig an. Wenn man das dem Fernpol H_u zugeordneten Polarebenengewinde und die entsprechende Berührfläche B^5 ausprüft, bemerkt man dass diese Berührfläche in eine Ebene, nämlich die Hauptebene χ und eine Fläche 4. Ordnung B^4 zerfällt. Eine Ebene ε, deren Ferngerade e_u die Fernpolare des Fernpunktes H_u bezüglich der Absolute ist, also eine Ebene die den Fernpol G_u der Hauptebene χ bezüglich der Absolute enthält, schneidet die Berührfläche B^4 in einer Kurve 4. Ordnung. Die Komplexkurve besteht in diesem Falle aus einem Parallelstrahlenbüschel mit dem Scheitel im Fernpunkt G_u und einer Kurve 7. Klasse, die man durch die Verbindung der (1, 3)-deutig zugeordneten Punkten der Kurve 4. Ordnung b^4 und der Ferngeraden e_u der Ebene ε enthält. Alle diese Ebenen bilden vier Ebenenbündel mit den Scheiteln in vier Fernpunkten G_u.

2. In einer auf zwei Hauptebenen des Haupttetraeders normale Ebene $\varkappa$, also in einer Ebene die an eine Kante des Tetraeders normalsteht, zerfällt die Komplexkurve in zwei Parallelstrahlenbüschel und eine Kurve 6. Klasse.

Wählt man den Fernpunkt K_u einer Haupttetraederkante als Pol, dann zerfällt die Berührfläche in zwei die Tetraederkante bildende Hauptebenen und eine Fläche 3. Ordnung. Die Komplexkurve zerfällt hier in zwei Parallelstrahlenbüschel mit den Scheiteln in den Fernpolen G_u und in eine Kurve 6. Klasse die durch die Verbindungsgeraden der (1, 3)-deutig zugeordneten Punktepaare der Berührkurve 3. Ordnung b^3 und der Ferngeraden e_u der Ebene ε gebildet ist.

3. Nimmt man die in einer Hauptebene des Haupttetraeders liegende Kurve 2. Klasse h^2 der Flächenscher $|F^2|$ in Betracht und legt man in einem Berührpunkt B dieser Kurve h^2 die Tangente h als Achse eines Berührebenbüschels, dann bilden die zugeordneten Normalen ein in der an die Tangente h normal gelegten Ebene ε liegendes Komplexstrahlbüschel. In dieser Ebene ε zerfällt die Komplexkurve in zwei Komplexstrahlbüschel, das eine mit dem Scheitel B, das andere mit dem Fernscheitelpunkt G_u und in eine Kurve 6. Klasse. Wie im Fall 1 auch hier ist die dem Fernpunkt H_u der Tangente h zugeordnete Berührfläche von 4. Ordnung B^4.
Schneidet man diese Fläche B^4 mit der Ebene ε, dann werden in dieser Ebene von je drei einen Fernpunkt E_u enthaltenden Komplexstrahlen einer den Berührpunkt B enthalten. Es bleibt übrig, dass die Komplexkurve durch die Verbindungsgeraden der (1,2)-deutig zugeordneten Punktepaare der Kurve 4. Ordnung b^4 und der Ferngeraden e_u der Ebene ε umgehüllt wird.

4. Es besteht, wie bekannt, ein Grundebenengewinde 4. Klasse T^4 dessen Ebenen τ alle Flächen F^2 der Flächenschar $|F^2|$ berühren. Die Berührpunkte mit allen Flächen der Schar $|F^2|$ liegen in einer dieser Ebene τ auf einer Geraden t, welche die Biplanare zweier konsekutiven Ebenen des Grundgewindes T^4 ist. Nehme man den Fernpol C_u der Ferngeraden t_u einer dieser Ebenen τ bezüglich der Absolute an und betrachte man die entspechende Berührfläche 5. Ordnung

B^5. Eine Ebene ν, die durch die Biplanare t normal an die entsprechende Ebene τ des Grundgewindes T^4 gelegt ist, schneidet die Fläche B^5 in der Biplanare t und einer Kurve 4. Ordnung b^4. In dieser Ebene ν besteht die Komplexkurve aus einem Parallelstrahlbüschel mit dem Scheitel im Fernpol C_u der Ferngeraden t_u der entsprechenden Ebene τ bezüglich der Absolute und einer Kurve 7. Klasse n^7. Diese Kurve wird durch die Verbindungsgeraden der (1, 3)-deutig zugeordneten Punkte der Berührkurve 4. Ordnung b^4 und der Ferngeraden n_u der Ebene ν gebildet.

Alle diese Ebenen ν, die durch die Biplanaren t normal an die entsprechenden Ebenen τ des Grundgewindes T^4 gelegt sind, hüllen ein Ebenengewinde 12. Klasse N^{12} um.

5. Jede Fläche 2. Grades enthält drei Symmetrieebenen in denen die Normalenkomplexkurve in je zwei Kurven 4. Klasse ausartet.

Nehme man den Fernpunkt A_u einer Flächenachse a als Fernpol an und ordne man ihm die Berührpunktfläche 5. Ordnung zu. Betrachtet man die Schnittkurve der Polarebenen des Fernpunktes A_u bezüglich einer Fläche F^2 der Flächenschar $|F^2|$, also einer Symmetrieebene σ dieser Fläche mit der dem Fernpol A_u zugeordneten Berührfläche B^5, so zerfällt diese Schnittkurve in eine Hauptkurve 2. Ordnung s^2 und eine Restkurve 3. Ordnung b^3. Da jede Hauptkurve 2. Ordnung je zwei parallele Normalen enthält, kann man zwischen den Punkten dieser Hauptkurve s^2 und den Fernpunkten der Ferngeraden s_u der Polarebene σ eine (1, 2)-deutige Zuordnung herstellen. Dem Chaslesschen Korrespondenzprinzip nach ergibt dies eine Kurve 4. Klasse, nämlich die bekannte Normalenkurve einer Kurve 2. Ordnung. Der Restteil besteht auch aus einer Kurve 4. Klasse, die man durch eine (1, 1)-deutige Zuordnung der Punkten der Kurve 3. Ordnung b^3 und der Punkte der Ferngeraden s_u erhält.

Alle Symmetrieebenen der Flächen der Schar $|F^2|$ hüllen ein Ebenengewinde 6. Klasse um.

SINGULARE PUNKTE

1. Ein Fernpol C_u, der der Fernpol einer Ferngeraden t_u der dem Grundgewinde T^4 angehörigen Ebene τ bezüglich der Absolute ist, ist ein singulärer Punkt, da der ihm zugeordnete Komplexzylinder in ein Parallelstrahlbüschel und in einen Zylinder 2. Grades zerfällt.

2. Ein Punkt B der auf einer dem Flächenschar $|F^2|$ angehörigen Kurve 2. Klasse als Berührpunkt liegt, ist ein singulärer Punkt, da der ihm zugeordnete Komplexkegel in ein Strahlbüschel und einen Kegel 7. Ordnung zerfällt.

EINIGE AUSGEZEICHNETE FLÄCHEN UND KONGRUENZEN

Satz 6. *Die den Ebenen eines Ebenenbüschels zugeordnete Normalen bilden ein Konoid* 4. *Grades.*

Beweis. Es sei eine Gerade g gegeben. Legt man durch diese Gerade g die Ebenen β eines Ebenenbüschels $\beta(g)$, dann bilden die Berührpunkte B der Ebenen dieses Büschels mit den entsprechenden Flächen F^2 der Flaächenschar $|F^2|$

eine Raumkurve 3. Ordnung b^3. Errichtet man in den Punkten B die Normalen an die entsprechenden Ebenen β des Ebenenbüschels $\beta(g)$, dann sind alle diese Normalen mit einer zu der Gerade g normalen Ebene η parallel. Sie bilden ein Konoid 4. Grades, weil seine Erzeugenden die Verbindungsgeraden der (1, 1)-deutig zugeordneten Punkte der Raumkurve 3. Ordnung b^3 und der Ferngeraden e_u der Ebene η sind.

Wenn die Achse des Ebenenbüschels $\beta(g)$ also die Gerade g eine Ferngerade wird, dann zerfällt das Konoid 4. Grades in ein Ferngeradenbüschel mit dem Scheitel im Scheitelpunkt des der Flächenschar $|F^2|$ gehörigen hyperbolischen Paraboloides und den Zylinuer 3. Grades mit dem Scheitel im Fernpol G_u der Ferngeraden g_u bezüglich der Absolute.

Satz 7. *Die Komplexstrahlen dessen Fusspunkte auf einer Geraden liegen, bilden eine Regelfläche* 8. *Grades.*

Beweis. Es sei eine Gerade g gegeben. Legt man durch diese Gerade eine Ebene ϱ dann umhüllen die Komplexstrahlen in dieser Ebene eine Kurve 8. Klasse. Die an diesen Strahlen liegenden Fusspunkte bilden eine Kurve 5. Ordnung b^5, die die Gerade g in fünf Punkten schneidet. Es ergibt sich daraus, dass die Ebene ϱ fünf Komplexstrahlen mit den auf der Gerade g liegenden Fusspunkten enthält. Da jeder Punkt der Geraden g an drei Flächen der Schar $|F^2|$ liegt, so wird diese Gerade eine dreifache Gerade der Regelfläche. Also in jeder durch die Gerade g gelegte Ebene ϱ liegt die Gerade g als eine dreifache Gerade und noch fünf Komplexstrahlen. Auf Grund dessen ergibt sich, dass die Komplexstrahlen, deren Fusspunkte auf der Geraden g liegen, eine Regelfläche 8. Grades R^8 bilden.

Ist die Gerade g ein Komplexstrahl n, wird sein Fusspunkt ein vierfacher Punkt der Regelfläche R^8 sein, weil jede diesen Fusspunkt enthaltende Gerade die Fläche R^8 in noch vier Punkten schneidet.

Satz 8. *Alle Komplexstrahlen n deren Fusspunkte auf einer Ebene liegen, bilden eine Kongruenz 11. Ordnung* 5. *Klasse.*

Beweis. Es sei eine Ebene η gegeben. Man wähle einen Raumpunkt P beliebig aus. Der dem Punkt P gehörige Komplexkegel enthält eine Fusspunktkurve 11. Ordnung, wie es im Satz 5 beweisen war. Die Ebene η schneidet die Fusspunktkurve b^{11} in 11 Punkten, denen also 11 den Punkt P enthaltende Komplexstrahlen gehören.

In einer beliebig angenommenen Ebene π hüllen die Komplexstrahlen eine Kurve 8. Klasse um, an welcher die Fusspunkte eine Kurve 5. Ordnung b^5 bilden. Die Ebene η schneidet diese Kurve b^5 in fünf Punkten, und dies bedeutet, dass es in jeder beliebig angenommenen Ebene π fünf Komplexstrahlen gibt, die die Fusspunkte in der Ebene η erhalten. Die Kongruenz ist also 11. Ordnung und 5. Klasse.

KONGRUENZ DER DOPELSTRAHLEN

Da jeder Fernpunkt auf nur einem eigentlichen Doppelstrahl des Normalenkomplexes liegt, was im Satz 1 bewiesen wurde, bilden alle Doppelstrahlen eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit, also eine Kongruenz.

Satz 9. *Die Doppelstrahlen des Normalenkomplexes bilden eine Kongruenz 3. Ordnung und 4. Klasse.*

Um die Klasse dieser Kongruenz zu erhalten, wird ein Ebenenbüschel und das ihm zugeordnete Berührkurvensystem betrachtet. Näm.lich, durch eine beliebig angenommene Gerade g wird eine Ebene ϱ gelegt. Betrachtet man alle der Ebene ϱ parallelen Ebenen, so bilden die Berührpunkte B mit den entsprechenden Flächen F^2 der Schar $|F^2|$ eine Raumkurve 3. Ordnung b^3, welche der Ebene ϱ zugeordnet wird. Lässt man die Ebene ϱ ein Ebenenbüschel $\varrho\,(g)$ erzeugen, so wird die zugeordnete Berührkurve b^3 ein Kurvensystem auf dem der Fernpunkt G_u der Geraden g zugeordneten Berührpunktfläche B^5 bilden. Eine Bisekante d der Raumkurve b^3 wird nur dann ein Doppelstrahl des Normalenkomplexes sein, wenn sie den Fernpol D_u der Ferngerade r_u der Ebene ϱ bezüglich der Absolute enthält. Alle Fernpunkte D_u bilden eine Ferngerade d_u, die die Fernpolare des Fernpunktes G_u bezüglich der Absolute ist. Irgend eine durch die Ferngerade d_u gelegte Ebene π schneidet die Raumkurven b^3 des Kurvensystems $|b^3|$ in je drei Punkten. Die Verbindungsgeraden dieser Punkte, also die Bisekanten dieser Kurven b^3 sind nur dann Kongruenzstrahlen oder Doppelstrahlen des Normalenkomplexes, wenn ihr Fernpunkt mit dem der entsprechenden Raumkurve b^3 zugeordneten Fernpol D_u zusammenfällt. Jedem Fernpunkt D_u an der Fernpolare d_u sind je drei Fernpunkte der dreien Bisekanten d der entsprechenden Raumkurve b^3 zugeordnet. Auf diese Weise ist an der Ferngeraden d_u eine (1, 3)-deutige Zuordnung hergestellt, welche, wie bekannt, vier Inzidenzpunkte enthält. Daraus ergibt sich, dass in jeder beliebig angenommenen Ebene π vier Kongruenzstrahlen liegen oder dass die Kongruenz der Doppelstrahlen 4. Klasse ist.

Um die Ordnung dieser Kongruenz festzustellen, betrachten wir diejenige Fläche die durch die Kongruenzstrahlen, welche eine beliebig angenommene Gerade treffen, erzeugt wird. Da in jeder die Gerade g enthaltenden Ebene je vier Kongruenzstrahlen sich befinden, könnte man schliessen, dass diese Fläche vom 5. Grade ist. Die Fernebene aber schneidet diese Fläche in einer Fernkurve 5. Ordnung und in zwei Ferntangenten der Absolute. Nämlich, jede Ferntangente der Absolute ist ein Doppelstrahl des Normalenkomplexes und gehört der Kongruenz an, weil sie je zwei Flächen F^2 der Schar $|F^2|$ berührt und den gemeinsamen Fernpol bezüglich der Absolute im Berührpunkt an ihr enthält. Deswegen ist die betrachtete Regelfläche eine Fläche 7. Grades D^7 und die Gerade g ist eine dreifache Gerade dieser. Daraus ergibt sich, dass jeder Punkt der Geraden g je drei Doppelstrahlen enthält, dass also die Kongruenz 3. Ordnung ist.

Die bekanteste dieser Flächen D^7 ist die Fläche, die von den Achsen der die Schar $|F^2|$ bildenden Flächen F^2 erzeugt wird. Die Achsen der Flächen sind die einzige Kongruenzstrahlen die die doppelte Normalen derselben Fläche F^2 der Schar $|F^2|$ sind. Sonst sind die Doppelstrahlen gemeinsame Normalen verschiedener Flächen der Schar $|F^2|$.

Wenn als eine beliebig angenommene Gerade g ein Doppelstrahl d gewählt wird, dann wird die Fläche von 6. Grade D^6. In der Fernebene befinden sich eine Fernkurve 4. Ordnung und ein Paar Ferntangenten der Absolute. Die Fläche D^6 wird von einer Doppeltorse 3. Klasse eingehüllt. Je zwei Ebenen der Doppeltorse sind parallel und ihre Ferngeraden bilden ein doppeltes Ferngeradenbüschel. Da die Fernebene der Doppeltorse gehört, ist sie ein Zylinder 3. Klasse.

Wenn die Gerade g eine Ferngerade ist, dann zerfällt die Regelfläche in ein Fläche 5. Grades[5] und die Absolute als eine Kurve 2. Klasse.

NORMALENKOMPLEX EINER FLACHENSCHAR $|F^2|$ DEREN GRUNDEBENENGEWINDE IN VIER EBENENBÜSCHEL AUSARTET

Wenn eine Flächenschar 2. Grades $|F^2|$ gegeben ist, deren Grundebenengewinde in vier Ebenenbüschel ausartet, hat diese Schar auch die Eigenschaften eines Flächenbüschels 2. Grades $|F^2|$ dessen Grundkurve in vier einen windschiefe Grundvierkant bildende Geraden zerfällt. Ein beliebig angenommener Raumpunkt P liegt auf einer Fläche und eine beliebig gewählte Ebene berührt eine Fläche der Schar $|F^2|$. Eine beliebig angenommene Gerade g berührt zwei Flächen der Schar.

Die Grundeigenschaften dieser Flächenschar $|F^2|$ sind:

1. Wenn eine Ebene π ein Ebenenbüschel $\pi(g)$ erzeugt, bilden die Berührpunkte B eine Raumkurve 3. Ordnung
2. Einer Ebene π zugeordnete Pole bezüglich der Flächen der Schar $|F^2|$ bilden eine Gerade p.
3. Einem Raumpunkt P zugeordnete Polarebenen bezüglich der Flächen der Schar $|F^2|$ bilden ein Ebenenbüschel.
4. Einem Raumpunkt P zugeordnete Berührfläche ist eine Fläche 3. Ordnung B^3.
5. Wenn eine Gerade g gegeben ist, dann bilden die in den Punkten dieser Geraden an die diesen Punkte enthaltenden Flächen der Schar $|F^2|$ gelegten Berührebenen ein Berührebenengewinde 3. Klasse.

Auf Grund der Untersuchungen des Normalenkomplexes NK einer allgemeinen Flächenschar 2. Grades $|F^2|$, bekommt man im Fall einer speziellen Flächenschar $|F^2|$ mit Berücksichtigung seiner Grundeigenschaften für den Normalenkomplex folgende Ergebnisse:

1. Einen Fernpunkt enthaltende Komplexstrahlen n bilden einen Zylinder 3. Grades.
2. Eine Ferngerade ist ein dreifacher Strahl des Komplexes.
3. In einer beliebig angenommenen Ebene π liegenden Komplexstrahlen hüllen eine Komplexkurve 6. Klasse um, also ist der Normalenkomplex, der einer Flächenschar $|F^2|$ zugeordnet ist, vom 6. Grade.
4. Die an einem Normalenkomplexkegel liegende Fusspunktkurve ist 7. Ordnung.
5. Die eine beliebig angenommene Gerade g schneidenden Geraden bilden eine Regelfläche 7. Grades.
6. Die Komplexstrahlen dessen Fusspunkte auf einer Geraden liegen, bilden eine Regelfläche 4. Grades.
7. Alle Komplexstrahlen deren Fusspunkte auf einer Ebene liegen, bilden eine Kongruenz 7. Ordnung 3. Klasse.
8. Die Doppelstrahlen des Normalenkomplexes bilden eine Kongruenz 3. Ordnung 4. Klasse.

Wegen der Vollständgkeit soll man zu diesem Normalkomplex NK 6. Grades zwei lineare Komplexe zuzählen, deren Achsen jene Geraden sind, welche das Grundvierkant zum Tetraeder ergänzen, weil sie die Schnittgeraden der in der Schar $|F^2|$ sich befindenden Ebenenpaare sind.

NORMALENKOMPLEX DER EINER SCHAR DER KONFOKALEN FLÄCHEN ZUGEORDNET IST

Wenn eine Schar der Flächen 2. Ordnung $|F^2|$ die Absolute enthält, ist sie als eine Schar der konfokalen Flächen $|F^2|$ bekannt. Der dieser Schar zugeordnete Normalenkomplex NK ist mit dem der Schar zugewiesenen tetraedralen Komplex identisch, bzw. ist mit dem zu einer Fläche der Schar gehörigen Axenkomplex gleich.

Wenn wir die Eigenschaften dieses Normalenkomplexes vom Standpunkt einer allgemeinen Flächenschar $|F^2|$ betrachten, wird folgendes bemerkt.

1. Wenn ein beliebiges Ebenenbüschel $\pi(g)$ gegeben, ist bilden die Berührpunkte B eine Raumkurve 3. Ordnung. In diesen Berührpunkten B errichtete Normalen an die entsprechenden Ebenen des Büschels $\pi(g)$ bilden ein Konoid 4. Grades.

2. Ist die Gerade g eine Normale n einer Fläche der Schar $|F^2|$, dann bilden die Berührpunkte eine ebene rationale Kurve 3. Ordnung b^3, welche im Fusspunkt der Normale n einen Doppelpunkt erhält. Diese Kurve b^3 liegt in einer an die Normale n orthogonale Ebene ν, in welcher auch die an die Ebenen π des Ebenenbüschels $\pi(n)$ errichtete Normalen liegen. Sie umhüllen eine Parabel, da zwischen den Punkten der Kurven b^3 und der Ferngeraden n_u der Ebene ν eine (1, 1)-deutige Zuordnung besteht. In dieser Zuordnung entsprechen die Fernpunkte der Absolute sich sel st und das Ergebnis der Zuordnung ist eine Kurve 2. Klasse, die die Ferngerade berührt, also eine Parabel.

3. Wenn die Gerade g als Achse des Ebenenbüschels eine Ferngerade ist, dann ist sie eine Fernnormale n_u. Die Berührpunkte B liegen dann in einer Durchmesserbene δ und bilden eine gleichseitige Hyperbel b^2, welche durch zwei zu einandern orthogonalen Parallelstrahlebüschel erzeugt wird, nämlich durch die in der Ebene δ liegenden parallelen Schnittgeraden mit den Ebenen des Ebenenbüschels $\pi(n_u)$ und die parallelen Normalen mit dem Scheitel im Fernpunkt N_u, dem Fernpol der Ferngeraden n_u bezüglich der Absolute. Die Komplexstrahlen bilden in der Diametralebene δ zwei Strahlbüschel, das eine mit dem Scheitel im gemeinsamen Mittelpunkt aller Flächen der Schar und das andere im Fernpunkt N_u.

Wegen der Vollständigkeit soll im Einklang mit dem allgemeinem Fall zu den die Parabel umhüllenden Komplexstrahlen n in der Ebene ν, wie auch den Komplexstrahlenbüschel in der Ebene δ noch zwei Strahlenbüschel mit den Scheiteln in den Punkten der Absolute als dreifache zuzählen.

Einen Raumpunkt P enthaltende Normalenkomplexstrahlen bilden einen Kegel 2. Ordnung, an welchem die Fusspunkt kurve eine Raumkurve 5. Ornung ist, die im Scheitel einen dreifachen Punkt enthält. Diesem Kegel soll der isotropen Kegel als dreifacher zugezählt werden.

LITERATUR

1. *V. Niče*, Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Glasnik matematički, II 18 1963, 255—268.

Ljerka Dočkal, Zagreb

KOMPLEKS NORMALA NIZA PLOHA 2. STUPNJA

SADRŽAJ

U svom radu Kompleks normala pramena ploha 2. stupnja prof. Niče je obradio osnovna svojstva tog kompleksa. Pramenu ploha 2. stupnja dualan je niz takvih ploha, a zbog osobitosti tog niza vrijedno je istražiti kompleks normala koji je pridružen nizu ploha 2. stupnja.

U projektivnom prostoru P^3, kojemu je model euklidski prostor nadopunjen beskonačno dalekom ravninom, zadan je niz ploha 2. stupnja $|F^2|$. Svakom po volji odabranom točkom P prostora prolaze tri plohe niza, a po volji odabrana ravnina π dira samo jednu njegovu plohu. Ako u diralištu ravnine uzdignemo noramlu n, dobijemo normalu plohe F^2. Na taj način je svakoj ravnini prostora pridružena po jedna normala n i sve one čine kompleks normala koji je pridružen nizu ploha 2. stupnja $|F^2|$.

Prije negoli se istraži taj kompleks, navedimo osnovna svojstva niza ploha 2. stupnja:

1. Polovi po volji odabrane ravnine π s obzirom na plohe niza leže na nekom pravcu p.
2. Polarne ravnine neke točke P s obzirom na plohe niza omataju kubnu omotaljku Π^3.
3. Položimo li točkom P dirne ravnine na plohe niza, tada leže dirališta na plohi 5. reda B^5.
4. Opisuje li neka ravnina pramen $\pi(p)$, tada tvore dirališta prostornu krivulju 3. reda b^3.
5. Polože li se u točkama nekog pravca tangencijalne ravnine na plohe niza koje prolaze tim točkama, tada dirne ravnine omataju omotaljku 5. razreda.
6. Postoji omotaljka 4. razreda 1. vrste T^4 i njene ravnine diraju sve plohe niza.
7. Dirališta u nekoj ravnini omotaljke T^4 leže na nekom pravcu t.
8. Presječnice konsekutivnih ravnina omotaljke T^4 tvore torzu 8. stupnja.

Na temelju tih činjenica dokazana su ova svojstva kompleksa normala:

1. Međusobno paralelne zrake n kompleksa NK tvore valjak 3. stupnja.
2. Svaki beskonačno daleki pravac je peterostruka zraka n kompleksa NK.

3. Nožišta zraka kompleksa koje su paralelne s nekom ravninom tvore plohu 5. reda.
4. Zrake kompleksa koje leže u po volji odabranoj ravnini omataju krivulju 8. razreda i prema tome je kompleks NK 8. stupnja.
Naime, u po volji odabranoj ravnini svakom beskonačno dalekom točkom prolaze po tri zrake kompleksa, a dirališta svih zraka kompleksa koje ležeu toj ravnini tvore krivulju 5. reda b^5. između točaka krivulje b^5 i beskonačno dalekog pravca uspostavljeno je na taj način (1, 3)-pridruženje. Spojnice tako pridruženih točaka omataju krivulju 8. razreda.
5. Nožišta zraka kompleksa tvore na nekom kompleksnom stošcu krivulju 11. reda.

Nadalje su istraženi singulariteti kompleksa. Očito je takva ravnina beskonačno daleka ravnina, koja je peterostruka ravnina kompleksa. Polovi ravnina temeljnog tetraedra s obzirom na apsolutu su singularne točke kompleksa.

Singularne ravnine u kojima se raspada kompleksna krivulja jesu:

1. Ravnine koje su okomite na bilo koju ravninu temeljnog tetraedra.
2. Ravnine koje su nekom biplanarom t položene okomito na odgovarajuću ravninu temeljne omotaljke T^4.
3. Ravnine simetrije neke plohe niza u kojima se kompleksna krivulja raspada u dvije krivulje 4. razreda, od kojih je jedna poznata krivulja normala krivulje 2. reda.

Singularne točke u kojima se raspada kompleksni stožac jesu:

1. Polovi beskonačno dalekih tragova ravnina temeljne omotaljke s obzirom na apsolutnu.
2. Dirališta na krivuljama 2. razreda koje su degenerirane plohe niza.
Istaknute plohe i kongruencije jesu:
1. Zrake koje su pridružene pramenu ravnina tvore konoid 4. stupnja.
2. Zrake kompleksa kojima su nožišta na nekom pravcu tvore pravčastu plohu 8. stupnja.
3. Zrake kompleksa kojih su nožišta na nekoj ravnini čine kongruenciju 11. reda 5. razreda.
4. Dvostruke zrake kompleksa tvore kongruenciju 3. reda 4. razreda.
Dvostruke zrake koje sijeku neki po volji odabrani pravac tvore plohu 7. stupnja. Najpoznatija od tih ploha je ploha osi. Osi ploha su jedine zrake kompleksa koje su dvostruke normale iste plohe.

U specijalnom slučaju kad temeljna omotaljka degenerira u četiri pramena ravnina, niz ploha prima karakteristike i pramena ploha kojemu je temeljna krivulja vitoperi četverobrid, a pridruženi kompleks normala /ima ova svojstva:

1. Paralelne zrake kompleksa i ovdje čine valjak 3. reda.
2. Svaki beskonačno daleki pravac je trostruka zraka kompleksa.
3. Zrake kompleksa omataju u nekoj ravnini krivulju 6. razreda i prema tome je kompleks normala 6. stupnja. Radi potpunosti treba tom kompleksu pribrojiti

dva linearna kompleksa s osima u pravcima koji nadopunjuju vitoperi četverobrid na tetraedar.

4. Nožišta zraka čine na nekom kompleksnom stošcu krivulju 7. reda.
5. Zrake kompleksa koje sijeku po volji odabrani pravac tvore pravčastu plohu 7. stupnja.
6. Zrake kompleksa kojima nožišta leže na nekom pravcu tvore plohu 4. stupnja.
7. Zrake kompleksa kojima su nožišta na nekoj ravnini tvore kongruenciju 7. reda 3. razreda.
8. Dvostruke zrake kompleksa čine kongruenciju 3. reda 4. razreda.

Promatra li se niz konfokalnih ploha, dakle niz ploha koji sadrži apsolutu, tada je kompleks normala identičan s tetraedarskim kompleksom, odnosno s osnim kompleksom jedne plohe tog niza. Kao što je poznato, taj kompleks je kvadratni, no ako se promatra kao specijalni slučaj općeg niza ploha treba kompleksnom stošcu 2. stupnja pribrojiti izotropni stožac kao trostruki. Analogno kompleksnoj krivulji koja je u tom slučaju parabola, treba u toj ravnini pridružiti pramenove izotropnih pravaca kao trostruke.

Primljeno u II. razredu
17. 10. 1978.