GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 6 (26) — No. 1 — 1971.

ÜBER EINE ABBILDUNG SECHSTER ORDNUNG

Ljerka Dočkal, Zagreb

Einführung

Zwei projektive, korrelative, involutorisch verwandte Räume Σ und Σ' bilden, wie bekannt, einen Polarraum Π. Diejenige Punkte dieser Räume, welche mit den ihnen zugeordneten Polarebenen zusammenfallen, bilden dabei die Inzidenzfläche zweiter Ordnung H^2 dieses Polarraumes. Wenn ein Raum Σ mit ∞^1 Räumen projektiv, korrelativ und involutorisch so zugeordnet ist, dass die jedem Punkt P des Raumes Σ zugeordneten Ebenen π_n' der Räume Σ_n' ein Ebenenbüschel (π_n') bilden, dann bildet der Raum Σ mit jedem der ∞^1 Räume Σ_n' einen Polarraum Π_n. Die ∞^1 auf diese Weise verwandten Räume Π_n bilden ein Polarraumbüschel (Π_n), dessen Inzidenzflächen ein Büschel von Flächen zweiter Ordnung (H_n^2) bilden. Die gemeinsame Durchdringungskurve aller Flächen dieses Büschels (H_n^2) ist eine Raumkurve vierter Ordnung erster Art k^4, die als Grundkurve dieses Büschels (H_n^2) bekannt ist. Jeder Raumpunkt P, der sich nicht auf der Grundkurve k^4 befindet, enthält eine Fläche dieses Inzidenzflächenbüschels (H_n^2) und jede Ebene τ des Raumes berührt drei Flächen desselben.

Es sei ein Polarraumbüschel (Π_n) gegeben. Legt man in einem Raumpunkt P die Berührungsebene τ auf die den Raumpunkt P enthaltende Fläche H_n^2 des Flächenbüschels (H_n^2), dann wird die Ebene τ noch zwei andere Flächen desselben Flächenbüschels (H_n^2) berühren, deren Berührungspunkte wir mit D_1 und D_2 bezeichnen werden und als das dem Punkte P zugeordnete Punktepaar betrachten. Man stelle jetzt die Frage, von welcher Ordnung die Raumkurve ist, die durch Berührungspunkte D_1 und D_2 erzeugt wird, wenn der Punkt P eine Gerade p beschreibt.

I

Die Verbindungsgerade der Punkte D_1 und D_2 ist ein dem Punkte P zugeordneter Strahl t des tetraedralen Strahlenkomplexes (TK), der mit dem Polarraumbüschel (Π_n) verbunden ist. Auf Grund der Definition, bilden nämlich die Polarebenen eines Raumpunktes P bezüglich aller Flächen des Inzidenzflächenbüschels (H_n^2) ein Polarraumbüschel (Π_n), dessen Achse ein dem Raumpunkt P zugeordneter Strahl t des mit dem Polarraumbüschel (Π_n) verbundenen tetraedralen Strahlenkomplexes (TK) ist.

Wie bekannt, ist der tetraedrale Strahlenkomplex vom zweiten Grade, was bedeutet, dass die einen Raumpunkt P enthaltenden Komplexstrahlen einen Komplexkegel T^2 zweiten Grades bilden und die in einer Ebene η liegenden Komplexstrahlen eine Komplexkurve τ^2 zweiter Klasse umhüllen.

Um die Ordnung der durch die beschriebenen, den Punkten P einer Geraden p zugeordneten Berührungspunktepaare gebildeten Raumkurve d^6 zu bestimmen, muss man die folgenden Eigenschaften des tetraedralen Komplexes (TK) benützen.

1. Die den Punkten P einer Geraden p zugeordneten Strahlen t des tetraedralen Strahlenkomplexes (TK) bilden ein Erzeugendensystem einer Regelfläche zweiten Grades P^2.

2. Die den Punkten P eines Komplexstrahles t zugeordneten Komplexstrahlen t_P bilden einen Komplexkegel zweiten Grades T^2.

3. Ein Punkt, dessen Polarebenen bezüglich aller Flächen des Inzidenzflächenbüschels (H_n^2) mit einer Ebene identisch sind, ist ein Hauptpunkt und die zugeordnete Polarebene ist eine Hauptebene des Komplexes (TK). Es gibt vier Hauptpunkte und vier Hauptebenen. Sie bilden ein gemeinsames Polartetraeder aller Flächen des Inzidenzflächenbüschels (H_n^2). Die Hauptpunkte sind die Scheitel der vier Kegel, die sich im Büschel (H_n^2) befinden.

4. Die Pole einer Ebene η bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels (H_n^2) bilden eine Raumkurve dritter Ordnung t^3, die als Ordnungskurve des Komplexes (TK) bekannt ist und die alle vier Hauptpunkte enthält.

5. Den Punkten und den Komplexstrahlen einer Ebene η sind bezüglich der Flächen des Flächenbüschels (H_n^2) die Bisekanten und die Punkte einer kubischen Ordnungskurve t^3 konjugiert. Umgekehrt sind den Bisekanten und den Punkten einer kubischen Ordnungskurve die Punkte und die Komplexstrahlen einer Ebene η bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels (H_n^2) konjugiert [2].

6. Die Komplexstrahlen t hüllen in einer Ebene η eine Komplexkurve t^2 zweiter Ordnung ein. Den Punkten dieser eingehüllten Kurve t^2 sind die Tangenten der zu der Ebene η zugeordneten Ordnungskurve t^3 zugeordnet. Wie bekannt, bilden die Tangenten t_t einer Raumkurve dritter Ordnung t^3 eine Regelfläche vierten Grades T^4, welche, nach R. Sturm, ein Spezialfall der Flächen vierten Grades dritter Art ist.

7. Eine beliebig angenommene Ebene η schneidet das Inzidenzflächenbüschel (H_n^2) in einem Büschel von Kurven zweiter Ordnung (h_n^2). Diese Ebene η schneidet die Tangentenfläche T^4 der Ordnungskurve t^3 in einer Kurve vierter Ordnung t^4, die in den Ecken des Polardreiecks des Kurvenbüschels (h_n^2) die Rückkerpunkte hat. Diese Ecken sind die Schnittpunkte der Ordnungskurve t^3 mit der Ebene η. Die durch diese Punkte gelegte Schmiegungsebenen der

Ordnungskurve t^3 schneiden sich in demjenigen Punkt der Grundkurve k^4, der sich innerhalb des Polardreiecks befindet. Die in der Ebene η sich befindenden Schmiegstrahlen der Ordnungskurve t^3 sind die Erzeugenden derjenigen Flächen des Flächenbüschels (H_n^2), die die Ebene η berühren. Die Schnittpunkte dieser Schmiegstrahlen mit den gegenüberliegenden Seiten des Polardreiecks sind die Berührungspunkte der Einhüllungskurve t^2 mit den Seiten des Polardreiecks. Die anderen Erzeugenden der die Ebene η berührenden Flächen des Flächenbüschels (H_n^2) schneiden die gegenüberliegenden Seiten des Polardreiecks in den Punkten, welche sich auf der in der Ebene η liegenden Biplanare der Ordnungskurve t^3 befinden.

8. Da nach I.5 den Komplexstrahlen in einer Ebene η, also den Tangenten der Komplexkurve t^2 die Punkte der dieser Ebene zugeordneten Ordnungskurve t^2 ein-eindeutig zugeordnet sind, so bilden die Verbindungsebenen der Tangenten der Kurve t^2 und der ihnen zugeordneten Punkte der der Raumkurve t^3 eine Torse fünfter Klasse T^5, in welcher die Ebene η eine dreifache Ebene ist.

9. Jeder Punkt einer Ordnungskurve t^3, die einer beliebig angenommenen Ebene η zugeordnet ist, enthält eine Fläche des Flächenbüschels zweiter Ordnung (H_n^2), also enthält er je zwei Erzeugende dieser Fläche. Alle die Punkte der Ordnungskurve t^3 enthaltenden Erzeugenden der Flächen des Flächenbüschels (H_n^2) bilden eine Fläche sechzehnter Ordnung, welche wir mit H^{16} bezeichnen werden. Nämlich, diese Fläche H^{16} wird als Schnitt des kubischen Komplexes der Unisekanten der Raumkurven dritter Ordnung t^3 und der Kongruenz (2, 6) der Bisekanten der Grundkurve vierter Ordnung k^4 des Flächenbüschels (H_n^2) erhalten. Dieser Schnitt ist eine Regelfläche der $k(n+m)$-ten Ordnung, wobei k der Grad des Komplexes, n die Ordnung und m die Klasse der Kongruenz ist [1]. Wir erhalten also eine Regelfläche $[3(2+6) = 24]$ vierundzwanzigster Ordnung. Diese Fläche zerfällt aber in die vier bekannten Kegel zweiter Ordnung im Flächenbüschel (H_n^2) und in eine Regelfläche sechzehnter Ordnung die wir mit H^{16} bezeichnen werden. Verbindet man einen beliebig angenommenen Punkt P der Grundkurve k^4 mit allen Punkten derselben Kurve, so erhält man einen Kegel dritter Ordnung K^3. Wenn man denselben Punkt P mit allen Punkten der Ordnungskurven dritter Ordnung t^3 verbindet, erhält man auch einen Kegel dritter Ordnung T^3. Diese beide Kegel K^3 und T^3 haben neun Erzeugende gemein, von denen vier zu dem im Flächenbüschel (H_n^2) sich befindenden Kegel zweiter Ordnung gehören. Es ergibt sich also, dass jeder Punkt P der Grundkurve vierter Ordnung k^4 des Flächenbüschels zweiter Ordnung (H_n^2) je fünf Erzeugende dieser Flächen, die zugleich zu den Regelflächen H^{16} gehören, enthält. Die Grundkurve k^4 ist also eine fünffache Kurve der Fläche H^{16}.

Die in I.8 erwähnte Torse fünfter Klasse ist eine Doppeltorse dieser Regelfläche H^{16}. Die Ebene η schneidet diese Fläche in sechs Erzeugenden, die zu den drei die Ebene η berührenden Flächen des Flächenbüschels zweiter Ordnung (H_n^2) gehören und in einer Kurve zehnter Ordnung.

Jede Fläche H_n^2 des Flächenbüschels (H_n^2) enthält sechs Punkte der Ordnungskurve t^3, deswegen hat sie mit der Regelfläche H^{16} zwölf Erzeugende und die für die Fläche H^{16} fünffache Grundkurve k^4 gemein.

10. Jede Gerade p berührt zwei Flächen des Flächenbüschels (H_n^2). Im allgemeinen sind die in diesen Berührungspunkten an die beiden Flächen gelegten Berührunsebenen verschieden. Wenn aber die Gerade p ein Komplexstrahl also $p = t$ ist, fallen beide derartigen Berührungsebenen zusammen.

11. Jede Gerade p schneidet die Flächen des Flächenbüschels (H_n^2) in je zwei Punkten, so dass diese Schnittpunkte auf der Geraden p eine Involution bilden. Die zwei Doppelpunkte dieser Involution sind die Berührungspunkte dieser Geraden mit zwei Flächen des Flächenbüschels (H_n^2). Wenn die Gerade eine Unisekante der Grundkurve k^4 ist, ist diese Involution parabolisch mit dem Doppelpunkt im auf der Unisekante sich befindenden Punkt der Grundkurve k^4.

12. Eine Bisekante der Grundkurve k^4, also eine Erzeugende einer Fläche des Flächenbüschels (H_n^2), ist im allgemeinen kein Komplexstrahl. Nur wenn die Erzeugende eine Tangente der Grundkurve k^4 ist, oder wenn diese Gerade einen Hauptpunkt des Flächenbüschels enthält, also wenn sie eine Erzeugende des im Flächenbüschel (H_n^2) sich befindenden Kegel ist, dann ist diese Gerade auch ein Komplexstrahl.

13. Die Grundkurve k^4 des Flächenbüschels (H_n^2) schneidet eine Regelfläche zweiter Ordnung P^2 in acht assoziierten Punkten.

14. Die Tangenten der Grundkurve k^4 des Flächenbüschels (H_n^2) bilden eine Regelfläche achter Ordnung.

II

Auf Grund und mittels dieser eben erwähnten 14 Eigenschaften eines Flächenbüschels zweiten Grades (H_n^2) und des ihm zugeordneten tetraedralen Komplexes, werden wir jetzt einige neue Eigenschaften herleiten und in unseren weiteren Ausführungen betrachten.

SATZ 1. *Legt man in einem Raumpunkt P die Berührungsebene τ an die diesen Punkt enthaltende Fläche H_n^2 des Flächenbüschels (H_n^2), dann wird die Ebene τ noch zwei andere Flächen desselben Flächenbüschels (H_n^2) berühren. Diese Berührungspunkte* *werden wir mit D_1 und D_2 bezeichnen und sie als das dem Punkte P zugeordnete Punktepaar betrachten. Wenn der Punkt P eine Gerade p beschreibt, wird das zugeordnete Punktepaar D_1 und D_2 eine Raumkurve sechster Ordnung d^6 erzeugen.*

a) Es liege eine beliebige Gerade p in einer Ebene η. Lässt man einen Punkt P diese Gerade p beschreiben, dann wird der dem Punkt P zugeordnete Komplexstrahl t_P das Erzeugendensystem einer Regelfläche zweiten Grades P^2 erzeugen. Jeder dieser Komplexstrahlen ist nach I.5 eine Bisekante der zur Ebene η zugeordneten Ordnungskurve t^3. Aber der Definition im Satz 1 nach, ist jede dieser Erzeugenden der Träger eines Punktepaares D_1 und D_2, also demnach auch eine Bisekante der gesuchten Raumkurve d^6. Die Leitschar der Regelfläche P^2 wird durch die Polaren der Geraden p bezüglich aller Flächen des Flächenbüschels (H_n^2) gebildet. Jede dieser Polaren ist eine Unisekante der Ordnungskurve t^3, so dass man fragen kann, wieviele der Berührungspunkte D enthält.

Die Gerade p schneidet eine beliebig angenommene Fläche H_n^2 des Flächenbüschels (H_n^2) zweiter Ordnung in zwei Punkten H_{n1} und H_{n2}. Legt man in diesen Punkten die Berührungsebenen τ_{n1} und τ_{n2} auf dieselbe Fläche H_n^2, dann ist die Schnittgerade dieser Ebenen die konjugierte Polare p_n^* der Geraden p bezüglich der Fläche H_n^2. Jede dieser Berührungsebenen τ_{n1} bzw. τ_{n2} enthält den dem Punkt H_{n1} bzw. H_{n2} zugeordneten Komplexstrahl t_{n1} bzw. t_{n2}. Jeder dieser Komplexstrahlen t_{n1} bzw. t_{n2} berührt je zwei Flächen des Flächenbüschels (H_n^2), also enthält er je ein Berührungspunktepaar D_{11}, D_{12} bzw. D_{21}, D_{22}. Jeder dieser vier Berührungspunkte enthält je eine Erzeugende der Leitschar, also je eine Polare der Geraden p bezüglich je einer Fläche des Flächenbüschels (H_n^2). Auf diese Weise sind die Erzeugenden und die Leitgeraden der Regelfläche P^2 durch eine $(2, 4)$-deutige Zuordnung einander zugeordnet. Nämlich, jeder Fläche des Flächenbüschels (H_n^2) sind derartig zwei Komplexstrahlen zugeordnet, welchen man, auf die beschriebene Weise, vier Polaren zuweisen kann. Irgend eine Ebene ϱ des Raumes schneidet die Fläche P^2 in einer Kurve P_r^2, deren Punkte man als die Schnittpunkte der Komplexstrahlen bzw. Polaren der Fläche P^2 mit der Ebene ϱ betrachten kann. Auf die früher beschriebene Weise sind auch die Punkte dieser Kurve p_r^2 durch eine $(2, 4)$-deutige Zuordnung verbunden. Wie bekannt, gibt diese Zuordnung sechs Punkte, die sich selbst zugeordnet sind. Diese Inzidenz des Schnittpunktes eines Komplexstrahles mit dem Schnittpunkt der zugewiesenen Polare bedeutet, dass es sich um einen in der Ebene ϱ liegenden Berührungspunkt D, also um einen Punkt der in dem Satz 1 beschriebenen Kurve d^6 handelt. Damit ist bewiesen, dass, wenn der Punkt P eine Gerade p beschreibt, das auf dem zugeordneten Komplexstrahl t sich befindende Berührungspunktepaar D_1, D_2 eine Raumkurve sechster Ordnung beschreibt.

Irgend eine Berührungsebene der Fläche P^2 schneidet diese Fläche in zwei Geraden, von welchen eine ein Komplexstrahl und die andere eine Polare ist. Da der Komplexstrahl zwei Punkte der Kurve d^6 enthält, müssen sich deren vier Punkte auf der Polare befinden. Also eine Berührungspunktkurve d^6 befindet sich auf einer Regelfläche P^2 zweiter Ordnung auf welcher das System der Komplexstrahlen von Bisekanten und das System der Polaren von Quadrisekanten dieser Kurve gebildet wird.

Die Grundkurve k^4 des Flächenbüschels zweiter Ordnung (H_n^2) schneidet die Regelfläche P^2 in acht assoziierten Punkten K. Nach I.10 werden diese Punkte zu der Berührungspunktkurve d^6 als Doppelpunkte gehören.

b) Wenn der Punkt P einen Komplexstrahl t in einer Ebene η beschreibt, wird das zugeordnete Punktepaar D_1 und D_2 eine Raumkurve sechster Ordnung d^6 erzeugen, welche im Punkte T, der dem Komplexstrahl t zugeordnet ist, einen Doppelpunkt enthält.

Wenn ein Punkt P einen Komplexstrahl t beschreibt, wird der ihm zugeordnete Komplexstrahl t_P einen Komplexkegel T^2 erzeugen. Der Komplexstrahl t berührt zwei Flächen des Flächenbüschels (H_n^2), deren Berührungspunkte wir mit D_E und D_F bezeichnen werden. Diese nach I.10 gemeinsame Berührungsebene enthält den dem Komplexstrahl t zugeordneten Punkt T. Da dem Punkt $P \equiv D_E$ der Komplexstrahl $D_F T$ und dem Punkt $P \equiv D_F$ der Komplexstrahl $D_E T$ zugeordnet ist, entspricht offenbar der Punkt T als Berührungspunkt den beiden Punkten D_E und D_F, ist also der Doppelpunkt der Raumkurve d^6, die von den Berührungspunktepaaren D_1 und D_2 gebildet wird.

Jede den Scheitelpunkt T des Kegels T^2 enthaltende Ebene schneidet den Kegel T^2 in zwei Erzeugenden, welche Komplexstrahlen sind. Jeder von ihnen ist der Träger eines Punktepaares der Berührungspunkte D_1 und D_2, während der Schnittpunkt dieser zwei Komplexstrahlen, also der Scheitel des Kegels, ein Doppelpunkt der Raumkurve d^6 ist. Es ergibt sich also hieraus, dass die Kurve d^6 sechster Ordnung ist. In der Ebene η enthält diese Kurve sechs Punkte, von welchen sich zwei in den Berührungspunkten D_E und D_F des Komplexstrahles befinden, während vier andere sich in den Schnittpunkten der in der Ebene η liegenden Schnittkurven des Kegels T^2 und derjenigen Fläche H_n^2 des Flächenbüschels (H_n^2), die im Punkt P den Pol enthält, befinden.

Die Grundkurve k^4 schneidet auch den Komplexkegel T^2 in acht assoziierten Punkten K und diese Punkte sind Doppelpunkte der Berührungspunktkurve d^6.

c) Wenn ein Punkt P die Ebene η beschreibt, dann wird das zugeordnete Punktepaar D_1 und D_2 eine Fläche sechster Ordnung D^6 erzeugen.

In II.b haben wir bewiesen, dass die einem Komplexstrahl zugeordnete Raumkurve d^6 im Scheitel des zugeordneten Kegels T^2, also im entsprechenden Punkt der Ordnungskurve t^3 den Doppelpunkt enthält. Auf Grund dessen schliessen wir, dass die Abbildungsfläche D^6 der Ebene η die Ordnungskurve t^3 als Doppelkurve enthält. Dass die Fläche D^6 von der sechsten Ordnung sein muss, folgt daraus, dass sie mit jedem Komplexkegel T^2 oder jeder Regelfläche zweiter Ordnung P^2 eine Raumkurve sechster Ordnung d^6 und die Ordnungskurve t^3 als Doppelkurve gemein hat.

In II.a haben wir bemerkt, dass jeder einen Punkt der Grundkurve k^4 enthaltende Komplexstrahl die parabolische Involution der Schnittpunkte mit den Flächen des Flächenbüschels $(H_n{}^2)$ enthält, was bedeutet, dass die diesen Punkt enthaltende Raumkurve d^6 in ihm den Doppelpunkt enthält. Also ist die Grundkurve k^4 die Doppelkurve jeder Abbildungsfläche D^6.

d) Wenn ein Punkt P eine Kurve zweiter Ordnung p^2 in der Ebene η beschreibt, erzeugt der diesem Punkt zugeordnete Komplexstrahl eine Regelfläche, die nach Sturm vierter Ordnung P^4 dritter Art ist. Wenn die Kurve p^2 mit der Einhüllenden t^2 zusammenfällt, geht diese Regelfläche P^4 in die Tangentenfläche T^4 der Ordnungskurve t^3 über. Im Falle dass die Kurve p^2 alle drei Ecken des Polardreiecks des Kurvenbüschels $h_n{}^2$ enthält, wird diese Fläche P^4 vierter Art und durch diejenigen Bisekanten der Ordnungskurve t^3 gebildet, welche die dieser Kurve p^2 zugeordnete Gerade p schneiden. Diese Fläche P^4 durchdringt die Fläche D^6 in einer Kurve zwölfter Ordnung d^{12} und in der Ordnungskurve t^3, die für beide Flächen die gemeinsame Doppelkurve ist.

e) Auf diese Weise werden die den Punkten jeder in der Ebene η liegenden Kurve n-ter Ordnung zugeordneten Komplexstrahlen eine Regelfläche $2n$-ter Ordnung bilden, auf welcher die Ordnungskurve t^3 eine n-fache Kurve ist. Die Durchdringungskurve der Flächen D^6 und P^{2n} ist von $(6 \cdot 2n = 12n)$ $12n$-ter Ordnung. Diese Kurve zerfällt in eine Kurve $6n$-ter Ordnung und die Ordnungskurve t^3 die für die Fläche D^6 eine Doppelkurve und für die Fläche P^{2n} eine n-fache Kurve ist. Also ist die Ordnungskurve t^3 ein Teil $6n$-ter Ordnung der Durchdringungskurve.

f) Die in I.9 beschriebene Regelfläche H^{16} durchdringt die Abbildungsfläche D^6 in der Ordnungskurve t^3 die für die beiden Flächen die Doppelkurve ist und in der Grundkurve k^4, welche für die Abbildungsfläche D^6 eine Doppelkurve ist und der Regelfläche H^{16} als fünffache Kurve angehört. Die beiden Flächen haben noch vierundvierzig Erzeugende der Flächen aus dem Flächenbüschel $(H_n{}^2)$ gemein.

g) Wenn die Ebene η ein Ebenenbüschel $\eta_n\,(p)$ beschreibt, werden die zugeordneten Flächen D^6 eine Familie dieser Flächen bilden, deren Doppelkurven die Ordnungskurven $t_n{}^3$ der zu dem Ebenenbüschel $\eta_n(p)$ gehörigen Ebenen sind und sich, wie bekannt, auf der Geraden p zugeordneten Regelfläche P^2 befinden. Alle Flächen dieser Familie haben die Grundkurve k^4 des Flächenbüschels (H_n^2) als Doppelkurve und die der Geraden p zugeordnete Berührungspunktraumkurve d^6 gemeinsam.

LITERATUR:

[1] *E. Müller*, Vorlesungen über darstellende Geometrie, III Bd, Deuticke Verlag, Leipzig und Wien, 1931.

[2] *Th. Reye*, Geometrie der Lage, III Abt., Kröner Verlag, Leipzig, 1910.

(Eingegangen am 24. XI 1970)

Mathematisches Institut der Universität Zagreb

O JEDNOM PRESLIKAVANJU ŠESTOG REDA

Ljerka Dočkal, Zagreb

Sadržaj

Neka je zadan pramen polarnih prostora. Incidentne plohe tog pramena tvore pramen ploha drugog reda. Po volji odabranom tačkom P prostora prolazi jedna ploha H^2 iz pramena ploha, a bilo koja ravnina τ dira tri plohe tog pramena. Položimo li u bilo kojoj tački P prostora tangencijalnu ravninu τ na onu plohu H^2 iz pramena ploha, koja prolazi tom tačkom P, tada ravnina τ dira još dvije plohe iz pramena ploha, a njihova dirališta ćemo označiti s D_1 i D_2. Spojnica dirališta D_1 i D_2 je zraka tetraedarskog kompleksa koji je pridružen zadanom pramenu polarnih prostora. Na osnovu svojstva tog tetraedarskog kompleksa dokazan je stavak:

Ako neka tačka P opiše po volji odabrani pravac p, tada će pridruženi par dirališta D_1 i D_2 opisati prostornu krivulju šestog reda d^6.

Opiše li tačka P neku ravninu η, tada će pridruženi par dirališta opisati plohu šestog reda D^6 na kojoj su temeljna krivulja pramena ploha drugog reda, dakle prostorna krivulja četvrtog reda prve vrste k^4 i redna kubna krivulja t^3 koja je u tetraedarskom kompleksu pridružena ravnini η, dvostruke krivulje.