TRANSVERSALENKOMPLEX DER ZUGEORDNETEN STRAHLENTRIPEL DREIER KOLLINEARZUGEORDNETEN STRAHLENBÜNDEL

KOMPLEKS TRANSVERZALA PRIDRUŽENIH TROJKI ZRAKA TRIJU KOLINEARNIH SVEŽANJA

Ljerka Dočkal, Zagreb

Sonderabdruck aus
GLASNIK MATEMATIČKI 2 (22) (1967), 245—263

Štamparski zavod „Ognjen Prica" Zagreb, Savska cesta 31, 1967.

GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 2 (22) — No. 2 — 1967.

TRANSVERSALENKOMPLEX DER ZUGEORDNETEN STRAHLENTRIPEL DREIER KOLLINEARZUGEORDNETEN STRAHLENBÜNDEL

Ljerka Dočkal, Zagreb

Einleitung

Drei kollineare Strahlenbündel $[A]$, $[B]$ und $[C]$ werden durch vier Strahlen a_1, a_2, a_3, a_4 des Bündels $[A]$ gegeben, denen vier Strahlen b_1, b_2, b_3, b_4 des Bündels $[B]$ und vier Strahlen c_1, c_2, c_3, c_4 des Bündels $[C]$ ein-eindeutig zugeordnet sind. Durch kollineare Zuordnung ist auf diese Weise jedem Strahl a des Bündels $[A]$ je ein Strahl b des Bündels $[B]$ und je ein Strahl c des Bündels $[C]$ eindeutig zugeordnet. Wählen wir beliebig irgendein Tripel kollinearverwandter Strahlen z. B. a_n, b_n, c_n, dann bilden die Transversalen (Durchschnittgeraden) dieser Strahlen das Erzeugendensystem einer windschiefen Regelfläche zweiten Grades H_n^2, die die Strahlen a_n, b_n, c_n als Leitgeraden dieses Systems enthält. Eine Erzeugende erhalten wir, indem wir durch den Strahl a_n eine beliebige Ebene α legen, die von den Strahlen b_n und c_n in den Punkten B_n und C_n durchstossen wird. Die Verbindungsgerade $(B_n C_n)$ dieser Punkte ist Transversale der kollinearzugeordneten Strahlen a_n, b_n und c_n. Wenn die Ebene α ein Ebenenbüschel $\alpha(a_n)$ mit dem Strahl a_n als Achse beschreibt, werden die Punkte B_n und C_n die Punktreihen $B_n(b_n)$ und $C_n(c_n)$ beschreiben, die zum Ebenenbüschel $\alpha(a_n)$ perspektiv, also zueinander projektiv zugeordnet sind. Die Verbindungsgeraden der so zugeordneten Punkte bilden das Erzeugendensystem der Fläche H_n^2. Dasselbe Erzeugendensystem erhält man auch indem man durch irgendeinen beliebig gewählten Punkt A_n des Strahls a_n und den Strahl b_n die Ebene $\beta' = (A_n b_n)$, danach durch denselben Punkt A_n und den Strahl c_n die Ebene $\gamma' = (A_n c_n)$ legt. Die Schnittgerade $h \equiv (\beta' \times \gamma')$ der Ebenen β' und γ' ist dann die Transversale des kollinearverwandten Strahlentripels a_n, b_n und c_n. Wenn der Punkt A_n die Punktreihe (a_n) beschreibt, erzeugen die Ebenen β' und γ' die Ebenenbüschel $\beta'(b_n)$ und $\gamma'(c_n)$ und die Schnittgerade h der so zugeordneten Ebenen wird das Erzeugendensystem der Fläche H_n^2 beschreiben.

In diesem Erzeugendensystem der Fläche H_n^2 befinden sich offenbar auch diejenigen Erzeugenden, die je einen der Punkte A, B

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

oder C enthalten. Man bezeichne diese mit h_{nA}, h_{nB}, h_{nC}. Irgendeinem Strahl a_n des Bündels $[A]$ ist als Leitgeraden die Regelfläche H_n^2 eindeutig zugeordnet, die die kollinearzugeordneten Strahlen a_n, b_n, c_n als Leitgeraden und die Transversalen h_{nA}, h_{nB} und h_{nC} im erwähnten Erzeugendensystem enthält. Jeder Strahl a des Bündels $[A]$ ist eine Leitgerade einer Regelfläche H^2, aber er kann auch als eine Erzeugende einer Regelfläche H_n^2 aufgefasst und mit h_{nA} bezeichnet werden. So erhalten wir den Satz:

Jeder Strahl eines der drei kollinearzugeordneten Strahlenbündel $[A]$, $[B]$ *oder* $[C]$ *ist Transversale eines Tripels kollinearzugeordneter Strahlen* a, b *und* c.

Um dies zu beweisen, soll irgend ein Strahl eines der gegebenen Bündel z. B. a des Bündels $[A]$ mit h bezeichnet werden. Durch die Gerade h und den Bündelscheitelpunkt $[B]$ kann man eine Ebene β' des Bündels $[B]$ legen, zu der eine Ebene γ' des Bündels $[C]$ kollinearzugeordnet wird. Die Ebene γ' wird im Punkte C' von der Geraden h durchstossen. Die Ebene $\beta' \equiv (hB)$ enthält den Strahl b der zur Geraden $c \equiv CC'$ des Bündels $[C]$ kollinearzugeordnet ist. Es ist selbstverständlich, dass der den Strahlen $c \equiv CC'$ und b kollinearzugeordnete Strahl a die Gerade h schneidet, weil die beiden Geraden a und h den Punkt A enthalten. So haben wir also bewiesen, dass die Gerade h eine Transversale eines kollinearzugeordneten Strahlentripels ist. Hätten wir statt der Ebene $\beta' \equiv (hB)$ die Ebene $\gamma' \equiv (hC)$ benutzt, hätten wir ganz dasselbe Resultat bekommen. Die Ebene $\gamma \equiv (hC)$ enthält bestimmt den Strahl $c \equiv (CC')$, weil er die Gerade h schneidet, und die der Ebene $\gamma \equiv (hC)$ kollinearzugeordnete Ebene β muss den der Geraden $c \equiv (CC')$ kollinearzugeordneten Strahl b enthalten. Deswegen ist die Gerade h Transversale eines einzigen Tripels der kollinearzugeordneten Strahlen a, b und c. Die Ausnahmen von dieser Regel werden wir später betrachten.

In dem Bündel $[A]$, wie wir bewiesen haben, ist einem Strahl a immer nur eine einzige Transversale h_A zugeordnet, wie auch jeder Transversale h_{nA} nur ein einziger Strahl a_n zugeordnet ist. Diese Zuordnung soll aber nicht involutorisch sein. Im allgemeinen ist einem Strahl a_1 die Transversale h_{1A} zugeordnet, aber die dem Strahle $a_2 \equiv h_{1A}$ zugeordnete Transversale h_{2A} ist vom Strahl a_1 verschieden. Die gerade a ist in den zwei erwähnten Flächen H^2 und H'^2 enthalten. Die Fläche H^2 enthält den Strahl a als Leitgerade, während die Fläche H'^2 die Gerade $a' \equiv h_A$ als Erzeugende enthält. Die Durchdringungskurve der Flächen H^2 und H'^2 artet in die Gerade a und eine kubische Raumkurve dritter Ordnung h^3 aus.

Jedem Strahle a_n, den wir als Leitgerade betrachten, ist eine Regelfläche H_n^2 zugeordnet, die ∞^1 Transversalen der kollinearzugeordneten Strahlentripel a, b und c enthält. Dem Strahlenbündel $[A]$ sind also ∞^2 Regelflächen H^2, die ein Regelflächenbündel $[H^2]$ erzeugen, zugeordnet. ∞^3 Erzeugende dieser Flächen erzeugen den

Komplex der Transversalen der kollinearzugeordneten Strahlentripel dreier kollinearen Strahlenbündel $[A]$, $[B]$, $[C]$, den wir mit (HK) bezeichnen werden.

Ordnung des Komplexes (HK)

Unter der Ordnung eines Komplexes versteht man, wie bekannt, die Ordnung des Kegels, den die einen Raumpunkt S enthaltenden Komplexstrahlen h erzeugen. Um dies beim Komplex (HK) zu erreichen, nehmen wir eine die Verbindungsgerade (SA) enthaltende Ebene α des Bündels $[A]$, die ein Strahlenbüschel $a(\alpha)$ des Bündels $[A]$ enthält. Diesem Strahlenbüschel $a(\alpha)$ sind die Strahlenbüschel $b(\beta)$ und $c(\gamma)$ kollinearzugeordnet, die in den der Ebene α kollinearzugeordneten Ebene β und γ liegen. Legen wir durch den Raumpunkt S und die Geraden des Strahlenbüschels $b(\beta)$ das Ebenenbüschel mit der Achse (SB), dann durch denselben Raumpunkt S und die Geraden des Strahlenbüschels $c(\gamma)$ das Ebenenbüschel mit der Achse (SC). Diese Ebenenbüschel mit den im Punkte S sich schneidenden Achsen sind projektiv, und ihr Schnittgeradenerzeugnis ist, wie bekannt, ein Kegel zweiten Grades. Die Erzeugenden dieses Kegels sind Transversalen der kollinearzugeordneten Strahlenpaare b und c, aber nur diejenigen von ihnen, die in der Ebene α liegen, sind Transversalen dreier kollinearzugeordneten Strahlen a, b und c. Es gibt offenbar deren zwei, man muss jedoch die Gerade (AS) dazuzählen, da wir in der Einleitung gezeigt haben, dass jeder Strahl der drei gegebenen Bündel $[A]$, $[B]$ bzw. $[C]$ ein Komplexstrahl h des Transversalenkomplex (HK) ist. Man kann auch zeigen, dass jede durch die Verbindungsgerade (SA) gelegte Ebene α je drei Komplexstrahlen enthält. Wenn die Ebene α das Ebenenbüschel $\alpha(AS)$ beschreibt, beschreiben die kollinearzugeordneten Ebenen β und γ die Ebenenbüschel $\beta(b_{AS})$ und $\gamma(c_{AS})$. Dem vorher beschriebenen Kegel zweiten Grades analog, erzeugen die Ebenenbüschel $\beta(b_{AS})$ und $\gamma(c_{AS})$ das Kegelbüschel zweiten Grades, das als Grunderzeugende die Geraden SB, SC, ferner die den Raumpunkt S enthaltende Transversale der Geraden b_{AS} und c_{AS}, und die den Punkt S enthaltende Transversale der Geraden b_{CS} und c_{BS} besitzt. Das Erzeugnis dieses Kegelbüschels zweiten Grades und des ihm projektiv zugeordneten Ebenenbüschels $\alpha(AS)$ ist ein Kegel dritten Grades S^3, der alle den Raumpunkt S enthaltenden Komplexstrahlen h enthält und ein Komplexkegel des Komplexes (HK) ist. Der Transversalenkomplex (HK) *ist also dritter Ordnung.*

Da beim Strahlkomplex die Ordnung und die Klasse gleich sind, ergibt sich, dass die Komplexstrahlen in irgendeiner Ebene σ eine ebene Kurve dritter Klasse σ^3 umhüllen, die man eine Komplexkurve nennt. Die Ebene σ enthält drei kollokale kollineare Punktfelder, die von den Durchstosspunkten der Strahlen der kollinearzugeordneten Strahlenbündel $[A]$, $[B]$ *und* $[C]$ erzeugt werden. In der Ebene σ gibt es, wie bekannt, ∞^1 Geraden, die je drei kollinearentsprechende Punkte enthalten und diese Geraden hüllen eine Kurve dritter Klasse ein. Auf diese Weise haben wir einen besonders wichtigen und bekannten Satz erhalten:

In drei kollokalen kollinearen Punktfeldern gibt es ∞^1 Geraden, die je drei kollinearzugeordnete Punkte enthalten und eine Kurve dritter Klasse erzeugen.

Diesen Satz haben wir mittels der dualen Eigenschaft des Komplexkegels und der Komplexkurve enthalten. Den Beweis können wir aber auch direkt führen, wie folgt: Wählen wir irgend drei Punkte A^*, B^* und C^* in denen die Ebene σ von den kollinearzugeordneten Strahlen a, b und c durchstossen wird. Einer beliebigen Geraden a^* der Ebene σ werden in dieser Ebene die Geraden b^* und c^* kollinear zugeordnet, wobei die kollinearzugeordneten Ebenen $\alpha \equiv (Aa^*)$, $\beta \equiv (Bb^*)$ und $\gamma \equiv (Cc^*)$ der Bündel $[A]$, $[B]$, $[C]$ in entsprechenden Geraden a^*, b^*, c^* die Ebene σ schneiden. Die Verbindungsgeraden der kollinear, also projektiv zugeordneten Punktepaare der Punktreihen b^* und c^* hüllen eine Kurve zweiter Klasse ein. Der Punkt A^* enthält zwei Tangenten dieser Kurve. Wenn die Gerade a^* ein Geradenbüschel $a^*(A^*)$ in der Ebene σ beschreibt, werden die kollinearzugeordneten Geraden b^* und c^* kollineare Geradenbüschel $b^*(B^*)$ und $c^*(C^*)$ beschreiben, und die erwähnte Kurve zweiter Klasse wird eine Kurvenschar erzeugen. Diese Kurvenschar enthält die Gerade (B^*C^*) und drei in der Ebene σ liegende Bisekanten einer kubischen Raumkurve k^3_{AB} (welche später betrachtet wird) als Grundtangenten der Schar. Zu jeder Geraden a^* des Büschels $a^*(A^*)$ ist eine Kurve zweiter Klasse der Schar eindeutig zugeordnet und der Punkt A^* enthält zwei Tangenten dieser Kurve. Auf diese Weise entsteht im Punkte A^* eine ein-zweideutige Zuordnung der Geraden des Büschels A^* und der Paare der durch den Punkt A^* gelegten Tangenten der Kurven zweiter Klasse. Die inzidenten Geraden dieser zwei kollokalen ein-zweideutigzugeordneten Strahlenbüschel sind Träger der kollinearzugeordneten Punkttripel dreier kollinearen Punktfelder in der Ebene σ. Da es in dieser ein-zweideutigen Zuordnung drei inzidente Elemente gibt, so enthält der Punkt A^* drei Tangenten der Kurve σ^3. Da man solche Betrachtungen für jeden Punkt der Ebene σ führen kann, darf man schliessen, dass die Komplexkurve in der Ebene σ von der dritten Klasse ist.

Der Transversalenkomplex (HK) und zwei Netze von Raumkurven dritter Ordnung auf der Fläche F^3 dritter Ordnung

Um die Singularitäten des Komplexes (HK) zu untersuchen, d. h. die Fälle wenn der Komplexkegel S^3 oder die Komplexkurve σ^3 ausarten werden wir die Beziehung der Regelflächen zweiten

Grades H^2 des Flächenbündels $[H^2]$ zur allgemeinen Fläche dritter Ordnung F^3, die als Ort der Schnittpunkte dreier kollinearzugeordneten Ebenen der gegebenen Ebenenbündel $[A]$, $[B]$ und $[C]$ definiert wird, betrachten. Sind die kollinearen Bündel $[A]$, $[B]$ und $[C]$ ganz allgemein gegeben, so dass sie keine zu sich selbst zugeordneten Strahlen oder Ebenen haben, und auch kein Tripel zugeordneter Strahlen besteht, die denselben Punkt enthalten, dann hat die Fläche F^3 keine Doppelpunkte. Der Voraussetzung nach ist in den kollinearen Strahlenbündeln $[A]$ und $[B]$ der Strahl (AB) nicht sich selbst zugeordnet. In diesem Fall gibt es ∞^1 kollinearzugeordnete Paare sich schneidender Strahlen a und b, deren Schnittpunkte K eine Raumkurve dritter Ordnung k^3_{AB} bilden. Diese Kurve befindet sich auf der Fläche F^3, denn jeder Punkt der Kurve ist ein Schnittpunkt dreier kollinearzugeordneten Ebenen α β und γ. Denn, wenn man durch den Strahl c, der zu den kollinearzugeordneten im Punkte K sich schneidenden Strahlen a und b kollinearzugeordnet ist, und den Punkt K eine Ebene $\gamma \equiv (K, c)$ legt, enthalten die zur Ebene γ kollinearzugeordneten Ebenen α und β die Geraden a bzw. b, also auch deren Schnittpunkt K, woraus sich ergibt, dass jeder Punkt K der Raumkurve k^3_{AB} ein Schnittpunkt dreier kollinearzugeordneten Ebenen α, β und γ ist.

Wir erhalten also auch folgenden Satz:

Jede Bisekante der Raumkurve dritter Ordnung k^3_{AB} ist ein Komplexstrahl des Transversalenkomplexes (HK).

Jede Bisekante k der Kurve k^3_{AB} ist die Schnittgerade zweier kollinearzugeordneten Ebenen α' und β', die von der kollinearzugeordneten Ebene γ' in einem Punkte C' durchschnitten wird. Die dem den Punkt C' enthaltenden Strahl c' kollinearzugeordneten Strahlen a' und b' sind in den kollinearzugeordneten die Bisekante k erzeugenden Ebenen α' und β' enthalten. Die Raumkurve k^3_{AB} enthält ∞^2 Bisekanten, die eine Kongruenz (1, 3) (erster Ordnung, dritter Klasse) bilden. Da analoge Betrachtungen auch für die Bündel $[A]$ und $[C]$, wie auch für $[B]$ und $[C]$ gelten, so enthält der Transversalenkomplex (HK) drei Kongruenz (1, 3) der Bisekanten der drei Raumkurven dritter Ordnung k^3, die je zwei Bündelscheitelpunkte enthalten. Jede Bisekante k schneidet die Fläche F^3 in je zwei Punkten K der Raumkurve k^3_{AB} und einem dritten Punkt, der in der Literatur gewöhnlich mit L bezeichnet wird.

Wählen wir eine beliebige Unisekante l der Kurve k^3_{AB}. Durch diese Unisekante l und die Raumkurve k^3_{AB} als Leitkurve ist eine Regelfläche zweiter Ordnung K^2_{AB} eindeutig bestimmt, und zwar so, dass eine Regelschar der Fläche K^2_{AB} aus den die Punkte der Unisekante l enthaltenden Bisekanten der Kurve k^3_{AB} besteht. Da die Durchdringungskurve der Flächen F^3 und K^2_{AB} von der sechsten

Ordnung ist, so beschreibt der Punkt L, als dritter Schnittpunkt der Bisekante k mit der Fläche F^3, eine Raumkurve l^3 dritter Ordnung, so dass die Durchdringungskurve sechster Ordnung in zwei Raumkurven dritter Ordnung zerfällt. Die Unisekante l der Kurve k^3_{AB} ist eine Bisekante der Kurve l^3, so dass die Leitschar der Fläche K^2_{AB} aus Bisekanten der Raumkurven l^3 und die Erzeugendenschar aus Bisekanten der Kurve k^3_{AB} besteht. ∞^3 Unisekanten dieser Kurven ergeben jedoch, wie bekannt, nur ∞^2 Regelflächen K^2_{AB}, weil jede Fläche dieses Bündels eine Leitschar von ∞^1 Unisekanten der Raumkurve k^3_{AB} enthält. Dieses Flächenbündel K^2_{AB} ist ein spezielles Flächenbündel, das statt acht assoziierte Grundpunkte die Raumkurve k^3_{AB} gemein hat. Jede Fläche K^2_{AB} dieses Bündels durchdringt die Fläche F^3 in der Kurve k^3_{AB} und noch je einer Kurve l^3, so dass die ∞^2 Raumkurven l^3 ein Netz der Raumkurven auf der Fläche F^3 erzeugen, das in der Literatur unter dem Namen »erstes Kurvennetz der Fläche dritter Ordnung« bekannt ist ([4], S. 76). Eine Charakteristik dieses Netzes ist, dass durch die Clebsche Abbildung die Netzkurven in Geraden einer Ebene abgebildet werden. Durch die Clebsche Abbildung werden nämlich jedem Punkte einer Ebene ϱ je eine Ebene dreier kollinearzugeordneten Ebenenbündel korrelativ zugeordnet. Die Schnittpunkte dieser Ebenen erzeugen, wie bekannt, eine Fläche dritter Ordnung F^3. Auf diese Weise ist jedem Punkte der Ebene ϱ ein Flächenpunkt der Fläche F^3 eindeutig zugeordnet. Der Punktreihe $L'(l')$ einer Geraden l' in der Ebene ϱ sind die Ebenenbüschel $\alpha(a)$, $\beta(b)$ und $\gamma(c)$ in den Bündeln $[A]$, $[B]$ bzw. $[C]$ zugeordnet, deren Erzeugnis eine Raumkurve dritter Ordnung l^3 auf der Fläche F^3 ist.

Durch die Punkte einer Raumkurve l^3 kann man ausser den Bisekanten der Raumkurve k^3_{AB} auch die Bisekanten der Raumkurven k^3_{AC} und k^3_{BC} legen, so dass man durch jede Raumkurve l^3 drei Regelflächen zweiter Ordnung K^2_{AB}, K^2_{AC} und K^2_{BC} legen kann. Diese drei Flächen gehören nicht zu demselben Flächenbüschel, sondern je zwei dieser Flächen gehören zu einem speziellen Flächenbüschel, das als Grundkurve die Raumkurve l^3 und eine Bisekante l dieser Kurve hat. Z. B. die Flächen K^2_{AB} und K^2_{AC} bestimmen das Flächenbüschel, das als Grundkurve die Kurve l^3 und die den Punkt A enthaltende Bisekante der Kurve l^3 hat. Der Punkt A ist der Gemeinpunkt der Kurven k^3_{AB} und k^3_{AC}. Da man durch jede Kurve dritter Ordnung l^3 je drei Regelflächen zweiter Ordnung K^2_{AB}, K^2_{AC} und K^2_{BC} legen kann, erhalten wir so drei spezielle Flächenbündel, deren Erzeugendenschar aus Komplexstrahlen des Transversalenkomplexes (HK) besteht. In jedem dieser Flächenbündel besteht ein Flächenbüschel dessen Flächen alle drei gegebenen Bündelscheitelpunkte enthalten. Dies sind auch spezielle Flächenbüschel, deren Grundkurven aus einer der drei Raumkurven k^3_{AB}, k^3_{AC} und

k^3_{BC} und jener Bisekante dieser Kurve besteht, die denjenigen Bündelscheitelpunkt enthält, welchen diese Raumkurve nicht enthält. Z. B. die Kurve k^3_{AB} und die den Punkt C enthaltende Bisekante dieser Kurve. Da die Flächen K^2 dieser Büschel alle Bündelscheitelpunkte A, B und C enthalten, gehören sie zu dem in der Einleitung beschriebenen Regelflächenbündel $[H^2]$.

Drei Raumkurven dritter Ordnung k^3_{AB}, k^3_{AC} und k^3_{BC} gehören zu dem zweiten Kurvennetz auf der Fläche F^3. Unter allen ∞^2 Kurven dieses Netzes sind für uns nur diese drei vom Interesse. Durch die Clebsche Abbildung werden, wie bekannt diese Netzkurven in ebene Kurven fünfter Ordnung abgebildet. Da eine Raumkurve l^3 bei dieser Abbildung in eine Gerade abgebildet wird, ergibt sich, dass die auf einer Regelfläche K^2 sich befindenden Raumkurven l^3 und k^3 fünf Punkte gemein haben, von denen mindestens einer reell ist.

Die Beziehung der Strahlen eines Strahlenbündels zu den Komplexstrahlen eines Komplexstrahlenbündels mit demselben Bündelscheitelpunkt

In der Einleitung haben wir bemerkt, dass jedem Strahl des Strahlenbündels $[A]$ ein den Punkt A enthaltender Komplexstrahl h des Transversalenkomplex (HK) eindeutig zugeordnet ist, aber auch umgekehrt ist jedem den Punkt A enthaltenden Komplexstrahl h_A ein Strahl a des Bündels $[A]$ ein-eindeutig zugeordnet. Diese Zuordnung kann, aber muss nicht involutorisch sein. Einem Strahl a sei die Transversale h_A zugeordnet. Wenn wir aber die Transversale h_A als einen Strahl a' des Bündels $[A]$ annehmen, so ist diesem Strahl a' eine neue Transversale h_A' zugeordnet, die aber nicht mit dem am Anfang angenommenen Strahl a identisch sein muss.

Es drängt sich die Frage auf, wie ein Komplexstrahl h seine Lage ändert, wenn der Strahl a des Bündels $[A]$ ein Strahlenbüschel $\alpha(a)$ in der Ebene $\alpha[A]$ beschreibt. Dem Strahlenbüschel $\alpha(a)$ sind die Strahlenbüschel $b(\beta)$ und $c(\gamma)$ kollinearzugeordnet. Die den Punkt A enthaltenden Transversalen der kollinearzugeordneten Strahlen b und c sind die Schnittgeraden der durch den Punkt A und den Strahl b bzw. den Punkt A und den Strahl c gelegten Ebenen. Wenn der Strahl a ein Strahlenbüschel $a(\alpha)$ beschreibt, werden die Ebenen (Ab) und (Ac) projektive Ebenenbüschel, mit den Geraden (AB) und (AC) als Achsen, beschreiben. Da diese Achsen den Punkt A gemein haben, erzeugen die Schnittgeraden der so projektiv zugeordneten Ebenen einen Komplexstrahlenkegel zweiter Ordnung S^3 mit dem Scheitelpunkt A. Wir erhalten so folgenden Satz:

Wenn der Strahl a des Strahlenbündels A ein Strahlenbüschel $a(\alpha)$ beschreibt, dann erzeugt der den Punkt A enthaltende Komplexstrahl h einen Komplexstrahlenkegel zweiter Ordnung S^2.

Wenn die Ebene α das Ebenenbüschel $\alpha(a)$ beschreibt, dann werden die kollinearverwandten Ebenen β und γ die Ebenenbüchel $\beta(b)$ und $\gamma(c)$ beschreiben, wobei die Achsen dieser Ebenenbüschel die kollinearzugeordneten Strahlen a, b und c sind. Der Komplexstrahlenkegel S^2 wird dabei ein Kegelbüschel (S^2) beschreiben, das als Grunderzeugende die Geraden (AB), (AC), dann die den Punkt A enthaltende Bisekante k_{BC} der Kurve k^3_{BC} und die durch den Punkt A gelegene Transversale der Geraden b und c hat, von denen die letzten zwei Achsen der erwähnten Ebenenbüschel $\beta(b)$ und $\gamma(c)$ sind. Betrachtet man alle Strahlenbüschel des Bündels $[A]$, so ergibt sich ein Kegelbündel $[S^2]$, das die Geraden (AB), (AC) und die den Punkt A enthaltende Bisekante k_{BC} der Kurve k^3_{BC} als Grunderzeugende hat.

Um Antwort auf die Frage zu bekommen, was der Strahl a erzeugt, wenn der Komplexstrahl h ein Komplexstrahlenbüschel $h(\alpha)$ mit dem Scheitelpunkt A beschreibt, können wir auf folgende Weise verfahren. Jeder Komplexstrahl h ist die Transversale dreier kollinearzugeordneten Strahlen a, b und c. Legen wir durch einen den Punkt A enthaltenden Komplexstrahl h und durch den ihm zugeordneten Strahl b die dadurch bestimmte Ebene β', ferner durch denselben Komplexstrahl h und durch den ihm zugeordneten Strahl c die Ebene γ', und beschreibt der Komplexstrahl h das Komplexstrahlenbüschel $h(\alpha)$, so werden die Ebenen β' und γ' die Ebenenbüschel $\beta'(BA)$ und $\gamma'(CA)$ beschreiben. Diese Ebenenbüschel sind zwar nicht kollinearzugeordnet, aber sie sind mit dem Strahlenbüschel $h(\alpha)$ perspektiv. Zu jedem dieser Ebenenbüschel ist im Bündel $[A]$ je ein Ebenenbüschel $\alpha(t_{AB})$ bzw. $\alpha(t_{AC})$ kollinearzugeordnet, wobei die Geraden t_{AB} und t_{AC} die Tangenten der Raumkurven k^3_{AB} und k^3_{AC} in dem Berührungspunkt A sind. Diese Ebenenbüschel sind projektiv, weil sie zu den perspektiven Ebenenbüscheln $\beta'(BA)$ und $\gamma'(CA)$ kollinearzugeordnet sind. Die Schnittgeraden der auf diese Weise projektivzugeordneten Ebenen dieser Ebenenbüschel erzeugen einen Strahlenkegel zweiter Ordnung A^2. Damit ergibt sich auch folgender Satz:

Wenn der den Bündelscheitelpunkt A enthaltende Komplexstrahl h das Komplexstrahlenbüschel erster Ordnung $h(\alpha)$ beschreibt, erzeugt der zugeordnete Strahl a einen Strahlenkegel zweiter Ordnung A^2.

Wenn die Ebene α ein Ebenenbüschel $\alpha(h)$ beschreibt, erzeugt der zugeordnete Strahlenkegel A^2 ein Strahlenkegelbüschel (A^2). Die ersten zwei Grunderzeugenden dieses Büschels t_{AB} und t_{AC} sind die Tangenten der Raumkurven k^3_{AB} und k^3_{AC}. Die dritte Grunderzeugende ist derjenige Strahl $\bar{a}$, der den in der Ebene (ABC)

liegenden kollinearzugeordneten Strahlen b und c kollinearzugeordnet ist. Nämlich, jeder in der Ebene (ABC) durch den Punkt A gelegte Komplexstrahl h ist die Transversale der kollinearzugeordneten in der Ebene (ABC) liegenden und sich schneidenden Strahlen b und c, deswegen muss der zu diesen Strahlen kollinearzugeordnete Strahl $\bar{a}$ eine Grunderzeugende des Strahlenbüschels sein. Die vierte Grunderzeugende des Büschels (A^2) ist identisch mit dem Strahl a, welcher der Achse h des Ebenenbüschels $\alpha(h)$ zugeordnet ist. Dem Komplexstrahlenbündel $h[A]$ ist das Strahlenkegelbündel $[A^2]$ zugeordnet, das die Tangenten t_{AB} und t_{AC}, und denjenigen Strahl $\bar{a}$ als Grunderzeugende hat, der den in der Ebene (ABC) liegenden und sich schneidenden Strahlen b und c kollinearzugeordnet ist.

Auf diese Weise ergibt sich im Punkt A eine quadratische Verwandtschaft zwischen den Strahlen und den zugeordneten Transversalenkomplexstrahlen h_A. Diese Verwandtschaft kann man so auffassen, dass man jeder Geraden des Bündels $[A]$ zwei korrelative, in einer neuen Kollineation entsprechende Ebenen zuordnet. Die Schnittgerade dieser Ebenen ist die der im Anfang angenommenen Geraden quadratisch verwandte Gerade. Nämlich, jeden Strahl a des Bündels $[A]$ kann man durch eine zweifache Korrelation erhalten, die man zwischen den Komplexstrahlen $h_A[A]$ und den Ebenen des Ebenenbündels $\alpha[A]$ herstellen kann. Durch jeden Komplexstrahl h_A kann man zwei Ebenen $\beta = (h_A, BA)$ und $\gamma = (h_A, CA)$ legen. Diesen Ebenen sind zwei Ebenen α_β und α_γ kollinear zugeordnet, die dem Komplexstrahl h_A korrelativ entsprechend sind. Die Schnittgerade dieser Ebenen α_β und α_γ ist der dem Komplexstrahl h_A quadratisch verwandte Strahl a. Jeden Komplexstrahl h_A erhält man durch eine spezielle zweifache Korrelation, die man zwischen den Strahlen a des Bündels $[A]$ und Ebenen der Ebenenbüschel $\beta(BA)$ bzw. $\gamma(CA)$ herstellen kann. Betrachten wir einen Tripel kollinear zugeordneter Strahlen a, b und c. Der den Punkt A enthaltende Komplexstrahl h_A wird als Schnittgerade zweier dem Strahl a korrelativen Ebenen $\beta \equiv (AB, b)$ und $\gamma \equiv (AC, c)$ aufgefasst. Hätten wir dasselbe mit allen kollinearzugeordneten Strahlentripeln durchgeführt, so hätten wir den Strahlen a des Bündels $[A]$ in einer speziellen Korrelation die Ebenen der Ebenenbüchel (BA) bzw. (CA) zuzuordnen. Die Schnittgerade dieser korrelativen, in einer neuen Kollineation zugeordneten Ebenen $\beta \equiv (BA, b)$ und $\gamma \equiv (CA, c)$ ist der dem Strahl a quadratisch verwandte Komplexstrahl h_A.

Wie bekannt, enthalten diese quadratisch verwandten kollokalen Strahlen- und Komplexstrahlenbündel $[A]$ je drei Hauptgeraden und je drei Hauptebenen. Jeder Hauptgeraden des einen Bündels sind die in der ihr zugeordneten Hauptebene des anderen Bündels gelegenen Strahlen des Strahlenbüschels erster Ordnung mit dem Scheitel A zugeordnet.

Die Strahlenhauptgeraden des Strahlenbündels $a[A]$ sind die Grunderzeugenden des Strahlenkegelbündels $[A^2]$. Nämlich, es sind das die Tangenten t_{AB}, t_{AC} der Raumkurven k^3_{AB}, k^3_{AC} und die Gerade $\bar{a}$. Das Komplexstrahlenbündel $h[A]$ enthält als Komplexstrahlhauptgeraden die Grunderzeugenden des Komplexstrahlkegelbündels $[S^2]$, also die Geraden (AB), (AC) und k_{BC}.

Die Komplexstrahlhauptgerade k_{BC} ist der allen Strahlen des Strahlenbüschels $a(A)$ in der Strahlhauptebene $\alpha \equiv (t_{AB}, t_{AC})$ zugeordnete Komplexstrahl. Die Komplexstrahlhauptgerade (AB) ist der dem Strahlenbüschel erster Ordnung $a(A)$ in der Strahlhauptebene $\alpha \equiv (t_{AC}, \bar{a})$ zugeordnete Komplexstrahl, während (AC) der dem Strahlenbüschel $a(A)$ in der Strahlhauptebene $\alpha \equiv (t_{BC}, \bar{a})$ zugeordnet ist. Die der Strahlhauptgeraden $\bar{a}$ zugeordneten Komplexstrahlen h bilden das Strahlenbüschel $h(A)$ in der Komplexstrahlhauptebene (ABC). Die der Strahlhauptgeraden t_{AB} zugeordneten Komplexstrahlen bilden das Komplexstrahlenbüschel in der Komplexstrahlhauptebene (AC, k_{BC}) und die der Strahlhauptgeraden t_{AC} zugeordneten Komplexstrahlen bilden das Komplexstrahlenbüschel in der Komplexstrahlhauptebene (AB, k_{BC}).

Zwischen den Strahlen $a[A]$ und den Tangentialebenen der Regelflächen $[H^2]$, die den Berührungspunkt im Punkte A haben, besteht eine kubische Verwandtschaft. Wenn die Strahlen ein Strahlenbüschel $a(\alpha)$ beschreiben, haben wir bewiesen, dass die Komplexstrahlen einen Kegel zweiter Ordnung S^2 erzeugen. Die Tangentialebene einer Fläche H^2, die je ein Strahl des Büschels $a(\alpha)$ und je ein Komplexstrahl h_A des Kegels S^2 enthält, wird in dieser ein- eindeutigen Zuordnung eine Kegel dritter Klasse erzeugen, der die Ebene α als zweifache Tangentialebene enthält. Auch, wenn der Komplexstrahl h_A das Komplexstrahlenbüschel $h_A(\alpha)$ in derselben Ebene α beschreibt, beschreibt der Strahl a den Strahlkegel zweiter Ordnung A^2. Die Tangentialebene einer Regelfläche H^2, die wiederum je einen Komplexstrahl h_A und einen Strahl a enthält, erzeugt einen neuen Kegel dritter Klasse, der aber dieselbe Ebene α als Doppeltangentialebene enthält. Diese zwei Kegel dritter Klasse mit demselben Scheitelpunkt haben diese Doppeltangentialebene α und noch weitere sechs Ebenen gemein. Diese sechs Ebenen enthalten je eine Hauptgerade der Fläche F^3, die die Schnittgerade von je drei kollinearzugeordneten Ebenen sind. Auf diese Weise ist jedem Strahl a die Tangentialebene der dem Strahle a zugeordneten Fläche H^2 eindeutig zugewiesen. Ebenso ist einem Komplexstrahl h_A die der zugeordneten Regelfläche H^2 entsprechende Tangentialebene eindeutig zugewiesen. Aber, jeder Ebene des Ebenenbündels $[A]$ sind zwei Strahlen, sowie auch zwei Komplexstrahlen, also dadurch auch zwei Flächen H^2 zugeordnet, welche diese Ebene als Tangentialebene im Berührungspunkt A haben.

Einige Singularitäten im Transversalenkomplex (*HK*)

Wir haben bewiesen, dass die Komplexstrahlhauptgeraden der quadratischen Verwandtschaft, die zwischen den Strahlen und Komplexstrahlen im Punkte A besteht, nämlich die Geraden AB, AC und k_{BC}, nicht nur Transversalen eines Tripels kollinearzugeordneter Strahlen a, b und c sind, sondern dass sie Transversalen von ∞^1 solchen Strahlentripels sind. Es ist selbstverständlich, dass die Komplexstrahlhauptgeraden in den Punkten B und C analoge Eigenschaften haben.

Es gibt aber noch sechs weitere Geraden mit derselben Eigenschaft. Das sind die Hauptgeraden der kubischen Fläche F^3. Wie bekannt, gibt es in drei kollinearzugeordneten Ebenenbüscheln Ebenentripel, deren Ebenen nicht nur einen Schnittpunkt, sondern eine Schnittgerade gemein haben. Diese Geraden sind als Hauptgeraden der Fläche F^3 bekannt und mit s bezeichnet. Jede der Geraden s ist, als Schnittgerade dreier kollinearzugeordneten Ebenen, eine gemeinsame Bisekante aller kubischen Raumkurven des zweiten Kurvennetzes auf der Fläche F^3, also ist sie die gemeinsame Bisekante aller drei kubischen Raumkurven k^3_{AB}, k^3_{AC} und k^3_{BC}. Deswegen ist jede dieser Geraden s ein Komplexstrahl im Transversalenkomplex (*HK*) und zwar ein solcher, der nicht nur einen, sondern ∞^1 kollinearzugeordneten Strahlentripel schneidet.

Diese sechs Geraden s werden bei der Bestimmung der Singularitäten im (*HK*)-Komplex von Bedeutung sein. Nämlich, die Singularitäten entstehen in einem Komplex dann, wenn in einem Raumpunkt der Komplexkegel oder in einer Ebene die Komplexkurve ausartet. Offenbar wird das besonders in den gegebenen Bündelscheitelpunkten, in den Hauptgeraden s der Fläche F^3, in den Komplexstrahlhauptgeraden und -ebenen der beschriebenen quadratischen Verwandtschaft und in den Kurvenpunkten der Raumkurven k^3 und c^3 geschehen.

1. *Der Komplexkegel S^3, der von den einen Raumpunkt S enthaltenden Komplexstrahlen erzeugt wird, artet in einen Komplexkegel zweiter Ordnung S^2 und ein Strahlenbüschel erster Ordnung aus, wenn der Raumpunkt S mit einem Kurvenpunkt K irgendwelcher der drei kubischen Raumkurven k^3_{AB}, k^3_{AC} oder k^3_{BC} identisch ist.*

Nimmt man den Punkt $S \equiv K$ auf der Kurve k^3_{AB} an, dann zerfällt der Komplexkegel S^3 in einen Kegel zweiter Ordnung S^2, der durch die den Punkt K enthaltenden Bisekanten der Kurve k^3_{AB} gebildet wird, und in ein Strahlenbüschel in der Ebene (K, c), wobei der Strahl c den im Punkte K sich schneidenden Strahlen a und b kollinearzugeordnet ist.

2. *Wenn die Ebene σ einen der gegebenen Bündelscheitelpunkte enthält, artet die Kurve σ^3 in eine Komplexkurve zweiter Klasse σ^2 und ein Komplexstrahlenbüschel erster Ordnung aus.*

Wenn die Ebene $\sigma \equiv \alpha$ den Punkt A enthält, dann schneiden die der Ebene α kollinearzugeordneten Ebenen β und γ die Ebene α in den Spuren b^* und c^*. Die kollinearzugeordneten Strahlen b und c in den Strahlenbüscheln $b(\beta)$ und $c(\gamma)$ schneiden die Ebene α in den projektiven Schnittpunktreihen $B^*(b^*)$ und $C^*(c^*)$. Jede Verbindungsgerade der projektiv zugeordneten Schnittpunkte B^* und C^* ist ein Komplexstrahl h des Transversalenkomplexes (HK), weil er die kollinearzugeordneten Strahlen b und c schneidet. Den kollinearzugeordneten Strahl a schneidet er auch, da er in der den Strahl a enthaltenden Ebene α liegt. Die Verbindungsgeraden der projektivzugeordneten Punktreihen $B^*(b^*)$ und $C^*(c^*)$ hüllen, wie bekannt, eine Kurve zweiter Klasse σ^2 ein. Da wir in der Einleitung den Satz bewiesen haben, nach dem jeder Strahl eines der gegebenen Bündel auch ein Komplexstrahl des Komplexes (HK) ist, ergänzt das Strahlenbüschel erster Ordnung $h(A)$ in der Ebene $\sigma \equiv \alpha$ die Kurve σ^2 zur Kurve dritter Klasse.

Die ∞^2 Flächen H^2 schneiden die Ebene α in einem Kurvennetz zweiter Ordnung, in dem jede Kurve dieses Netzes den Punkt A enthält und dieser Punkt ein Grundpunkt dieses Netzes ist. Das Regelflächenbündel $[H^2]$ enthält ∞^1 der die Ebene α berührenden Regelflächen H^2, wobei die Berührungspunkte in der Ebene α eine Jacobische rationale Kurve dritter Ordnung d^3 erzeugen, die den Doppelpunkt im Punkte A enthält. Diese Kurve ergibt sich als das Erzeugnis des den Schnittpunkten projektiv zugeordneten Strahlenbüschels $a(A)$ und des Komplexstrahlenbüschels zweiter Klasse $h(\sigma^2)$, das die Tangenten der Kurve zweiter Klasse σ^2 bilden.

3. *Wenn die Ebene $\sigma \equiv \alpha$ eine Hauptgerade s enthält, zerfällt die Komplexkurve σ^3 in das Komplexstrahlenbüschel erster Ordnung $h(\alpha)$ und in die Gerade s.*

Enthält die Ebene α eine Hauptgerade s, dann wird sie von den kollinear zugeordneten Ebenen β und γ in derselben Gerade s geschnitten, so dass die projektiven Schnittpunktreihen $B^*(b^*)$ und $C^*(c^*)$, sowie auch alle Verbindungsgeraden der so zugeordneten Schnittpunkte mit der Geraden s zusammenfallen.

Um die Lage der Geraden s auf der Fläche F^3 näher zu bestimmen, kann man folgermassen schliessen: Durch den Punkt A legen wir die Bisekante k_{BC} der Kurve k^3_{BC}. Die Schnittpunkte dieser Bisekante und dieser Kurve bezeichnen wir mit D und E. Diese Bisekante ist die Schnittgerade zweier kollinearzugeordneten Ebenen β und γ denen die Tangentialebene $\alpha \equiv (t_{AB}, t_{AC})$ der Fläche F^3 kollinear entspricht. Legt man in den Punkten D und E die Tangenten t_D bzw. t_E an die Kurve k^3_{BC}, so werden diese die Tangentialebene α in den Punkten A_D bzw. A_E schneiden. Die Strahlen

$a \equiv (AA_D)$ und $a \equiv (AA_E)$, die diese Schnittpunkte enthalten, sind den im Punkte D bzw. E sich schneidenden Strahlen b und c kollinear zugeordnet. Der Ebene $\alpha \equiv (k_{BC}, A_D)$ sind die in der Tangente t_D sich schneidenden Ebenen β und γ kollinear zugeordnet, so dass die Tangente t_D eine Hauptgerade der Fläche F^3 ist. Analog ist die Tangente t_E auch eine Hauptgerade. Die durch den Punkt B gelegte Bisekante der Kurve k^3_{AC} schneidet diese in den Schnittpunkten F und G. Die diese Punkte enthaltenden Tangenten der Kurve k^3_{AC} sind zwei weitere Hauptgeraden der Fläche F^3. Die den Punkt C enthaltende Bisekante der Kurve k^3_{AB} ergibt die Schnittpunkte H und I. Die diese Punkte enthaltenden Kurventangenten t_H bzw. t_I ergänzen die Zahl der Hauptgeraden auf sechs.

Der Komplexstrahlenkegel der im Punkte D den Scheitelpunkt hat und von den Bisekanten der Kurven k^3_{BC} erzeugt wird, enthält alle drei gegebenen Punkte A, B und C, gehört also zu dem Regelflächenbündel $[H^2]$. Analoges gilt für die Kegel mit den Scheitelpunkten E, F, G, H und I.

4. *Wenn die Ebene σ zwei der gegebenen Bündelscheitelpunkte enthält, zerfällt die Komplexkurve σ^3 in drei Strahlenbüschel erster Ordnung.*

Enthält die Ebene σ die Komplexstrahlhauptgerade (AB), artet die Komplexkurve σ^3 in zwei Komplexstrahlenbüschel mit den Scheiteln in den Punkten A und B aus, während das dritte Strahlenbüschel den Scheitel im Punkte C^* hat. In dieser Ebene σ befindet sich ein Paar kollinearzugeordneter Strahlen a und b, die sich in einem Punkte K der Raumkurve k^3_{AB} schneiden. Diesen Strahlen ist ein Strahl c kollinearzugeordnet, der die Ebene σ in dem Punkte C^* schneidet. Jeder Strahl h des Büschels $h(C^*)$ in der Ebene σ ist die Transversale eines Tripels kollinearzugeordneter Strahlen a, b und c. Die Regelfläche H^2, die von den diesen Tripel schneidenden Komplexstrahlen erzeugt wird, zerfällt in zwei Strahlenbüschel erster Ordnung, und zwar in dasjenige $h(C^*)$ in der Ebene σ und das andere in der Ebene (K, c).

Das Flächenbündel $[H^2]$ schneidet die Ebene σ in einem Netze von Kurven zweiter Ordnung, die zwei Grundpunkte A und B enthalten. In diesem Falle gibt es zweimal ∞^1 Regelflächen H^2 die die Ebene σ berühren. Die Berührungspunkte dieser Flächen bilden in der Ebene σ zwei Kurven d^2_{AB} und d^2_{BA} zweiter Ordnung. Nehmen wir zuerst an, dass die Ebene $\sigma(AB)$ dem Ebenenbündel $[A]$ angehört. Dieser Ebene $\sigma \equiv \alpha$ sind die Ebenen $\beta \equiv (BK, t_{BA})$ (t_{BA} ist die Tangente der Kurve k^3_{AB} im Punkte B) und $\gamma \equiv (c_K, c_{AB})$ zugeordnet. Der Strahl c_K ist den im Punkte K sich schneidenden Strahlen a und b kollinearzugeordnet, während c_{AB} der dem Strahle AB kollinear zugeordnete Strahl ist. Das Strahlenbüschel $c(\gamma)$ schneidet die Ebene $\sigma \equiv \alpha$ in der Schnittpunktreihe $C^*(c^*)$. Die

Verbindungsgeraden (C^*B) bilden ein in der Ebene α sich befindenden Komplexstrahlenbüschel $h(B)$, das dem Strahlenbüschel $a(A)$ projektiv zugeordnet ist. Das Erzeugnis dieser zweier projektiv verwandten Geradenbüschel ist die Kurve zweiter Ordnung d^2_{AB}, die die Punkte A, B und zwei in der Ebene α sich befindende Punkte der Kurve k^3_{AC} enthält. Der Komplexstrahl $h \equiv (B, C^*_{AB})$ ist die Tangente der Kurve d^2_{AB} im Punkte B. Im Punkte A is die Tangente ein Strahl a, dessen kollinear zugeordneter Strahl c sich in der Ebene $\gamma \equiv (ABC)$ befindet. Beschreibt die Ebene $\sigma \equiv \alpha$ ein Ebenenbüschel $\alpha(AB)$, so wird die Kurve d^2_{AB} eine die Kurve k^3_{AC} enthaltende Fläche D^2_{AB} zweiter Ordnung beschreiben. Die Tangentialebene dieser Fläche im Punkte A ist die der Ebene $\gamma \equiv (ABC)$ kollinearzugeordnete Ebene α. Die Tangentialebene dieser Fläche D^2_{AB} im Punkte B ist die Ebene $\beta \equiv (B, c_{AB})$. Die Schnittgerade dieser Tangentialebene ist die zur Geraden (AB) konjugierte Polare bezüglich der Fläche D^2_{AB}. Im Ebenenbüschel $\alpha(AB)$ besteht eine Ebene, welche die durch den Punkt B gelegte Bisekante k_{AC} der Kurve k^3_{AC} enthält. Die dieser Ebene $\sigma \equiv \alpha$ kollinear zugeordnete Ebene γ schneidet die Ebene α in der Bisekante k_{AC}. Da diese den Punkt B enthält, reduziert sich das Komplexstrahlbüschel im Punkte B auf diese Bisekante. Die Berührungspunktekurve d^2_{AB} zerfällt in dieser Ebene in die Bisekante k_{AC} und die Schnittgerade der zu der Ebene $\gamma \equiv (ABC)$ kollinear entsprechenden Ebene α mit der Ebene σ. Auch in der Ebene $\sigma \equiv \alpha(ABC)$ artet die Berührungspunktekurve in zwei Geraden aus. Das sind die Gerade (CB) und die den Punkt A enthaltende, von der Geraden AC verschiedene Bisekante der Kurve k^3_{AC}. Diese Bisekante ist die Schnittgerade der Ebene $\gamma \equiv (ABC)$ mit der zu ihr kollinearzugeordneten Ebene α, welche die Berührungsebene der Fläche D^2_{AB} im Punkte A ist.

Da in zwei Ebenen $\sigma \equiv \alpha$ des Ebenenbüschels $\sigma(AB)$ die Berührungspunktekurve d^2_{AB} in zwei Geraden ausartet, schliesst man, dass die Fläche D^2_{AB} eine Regelfläche ist. Die Leitkurve dieser Regelfläche D^2_{AB} ist die Raumkurve k^3_{AC} und ihre Unisekante (CB), das Erzeugendensystem dieser Fläche wird durch die Bisekanten der Kurve k^3_{AC} gebildet. Die Durchdringungskurve der Flächen F^3 und D^2_{AB} zerfällt in zwei Raumkurven dritter Ordnung, und zwar in die Kurve k^3_{AC} und in eine Kurve l^3_1 des ersten Kurvennetzes auf der Fläche F^3.

Das Ebenenbüschel $\sigma \equiv \beta(BA)$ gibt, analog betrachtet, die Berührungspunkteregelfläche D^2_{BA}, die die Raumkurve k^3_{BC} und ihre Unisekante (AC) als Leitkurve enthält. Ihr Erzeugendensystem ist von Bisekanten der Kurve k^3_{BC} gebildet. Die Durchdringungskurve der Flächen F^3 und D^2_{BA} zerfällt in zwei kubische Raumkurven k^3_{BC} und l^3_2.

Man kennt den Satz, dass der geometrische Ort der Berührungspunkte aller Flächen eines Netzes n-ter Ordnung mit den eine gegebene Gerade enthaltenden Tangentialebenen eine Fläche der $(3n—2)$-ten Ordnung ist ([3], S. 220). Die Eigenschaften der allgemeinen Fläche vierter Ordnung F^4, die der geometrische Ort der Berührungspunkte eines allgemeinen Flächenbündels zweiter Ordnung $[F^2]$ mit einem Ebenenbüschel ist, hat V. Niče beschrieben ([1], [2]). In unserem Falle, da das Flächenbündel $[H^2]$ von lauter Regelflächen gebildet wird, und da die Ebenenbüschelachse zwei Grundpunkte des Flächenbündels $[H^2]$ enthält, zerfällt die Fläche F^4 in zwei Regelflächen zweiter Ordnung. Wir haben nämlich gezeigt, dass, wenn man das Flächenbündel $[H^2]$ mit dem Ebenenbüschel $\sigma(AB)$ tangiert, die Berührungspunkte zwei Regelflächen D^2_{AB} und D^2_{BA} bilden.

Die Durchdringungskurve der Flächen F^4_{AB} und F^3 zerfällt in vier Raumkurven dritter Ordnung, nämlich in die Kurven k^3_{AC}, k^3_{BC} und in zwei Kurven l^3_1 und l^3_2 der ersten Kurvennetzes auf der Fläche F^3. Wie bekannt, gibt es in einem Flächenbündel zweiter Ordnung ∞^1 Kegelflächen, deren Scheitelpunkte eine Raumkurve sechster Ordnung c^6 bilden, die man Kernkurve dieses Bündels nennt. Da sich diese Kurve auf den Flächen F^3 und F^4 befinden muss, ergibt sich, dass die Raumkurven l^3_1 und l^3_2 die zerfallene Kernkurve c^6 bilden. Hätten wir auch die Ebenenbüschel $\sigma(BC)$ und $\sigma(AC)$ in Betracht gezogen, könnten wir folgende Tabelle zusammenstellen:

Fläche F^4	Fläche D^2	Leitkurve	Durchdringungskurve l^3
F^4_{AB}	D^2_{AB}	CB k^3_{AC}	l^3_1
	D^2_{BA}	CA k^3_{BC}	l^3_2
F^4_{AC}	D^2_{AC}	BC k^3_{AB}	l^3_2
	D^2_{CA}	BA k^3_{CB}	l^3_1
F^4_{BC}	D^2_{BC}	AC k^3_{BA}	l^3_1
	D^2_{CB}	AB k^3_{CA}	l^3_2

Die Komplexstrahlen, die die Gerade (AB) schneiden, erzeugen eine Kongruenz (3,3) *(dritter Ordnung, dritter Klasse).*

Wenn man die den Scheitelpunkt A bzw. B enthaltenden Komplexstrahlen ausschliesst, verbleibt die Kongruenz (1,3).

In einer Ebene $\sigma(AB)$ zerfällt die Komplexkurve in drei Strahlenbüschel erster Ordnung, die die Scheitelpunkte in Punkten A, B und C^* haben. Beschreibt die Ebene σ das Ebenenbüschel $\sigma(AB)$, wird der vorher erwähnte Schnittpunkt K die kubische Raumkurve k^3_{AB} beschreiben. Die Strahlen a und b, als Bisekanten dieser Kurven, werden die Strahlenkegel zweiter Ordnung A^2_B und B^2_A beschreiben. Der den Strahlen a und b kollinearzugeordnete Strahl c beschreibt auch einen Kegel zweiter Ordnung C^2. Der Schnittpunkt C^* des Strahles c mit der Ebene σ beschreibt eine kubische Raumkurve c^3 die das Erzeugnis der projektiv zugeordneten Ebenen des Ebenenbüschels $\sigma(AB)$ und der Erzeugenden des Kegels zweiter Ordnung C^2 ist. Die Kurve c^3 befindet sich nicht auf der Fläche F^3. Sie hat die Achse AB des Ebenenbüschels $\sigma(AB)$ als Bisekante. Da die Komplexstrahlenbüschel $h(C^*)$ in allen Ebenen σ des Ebenenbüschels $\sigma(AB)$ die Gerade (AB) schneiden, bilden sie also eine Kongruenz (1,3), wenn man die Komplexstrahlenbündel $[A]$ und $[B]$ ausschliest. Die einen Raumpunkt S enthaltenden Strahlen dieser Kongruenz liegen in der Ebene (SAB), die drei Kurvenpunkte der Kurve c^3 enthält, von denen zwei auf der Achse (AB) liegen. Die Verbindungsgerade des Punktes S mit dem dritten Kurvenpunkt C^*, nämlich die Gerade SC^*, ist der einzige den Punkt enthaltende Kongruenzstrahl. Irgendeine Ebene σ, die nicht dem Ebenenbüschel $\sigma(AB)$ gehört, schneidet die Kurve c^3 in drei Punkten, während sie mit der Achse (AB) einen Punkt O gemein hat. Die Verbindungsgeraden dieser Kurvenpunkte mit dem Achsenpunkt O sind drei in der Ebene σ sich befindende Kongruenzstrahlen.

5. *Wenn die Ebene σ den Schnittpunkt K zweier kollinearzugeordneten Strahlen und den ihnen entsprechenden dritten Strahl enthält, zerfällt die Komplexkurve σ^3 in drei Komplexstrahlenbüschel erster Ordnung. Das eine hat den Scheitel im Bündelscheitelpunkt des dritten Strahles, das zweite im Punkte K und das dritte im Schnittpunkt P der dreien Bisekanten k_{AB}, k_{BC} und k_{AC}.*

Betrachten wir die Ebene $\sigma \equiv \gamma(K, c)$. Die dieser Ebene γ kollinearzugeordneten Ebenen α und β schneiden die Ebene γ in den Spuren a^* und b^*, die die projektiven Strahlschnittpunktreihen $A^*(a^*)$ und $B^*(b^*)$ enthalten. Da der Schnittpunkt K in diesen Punktreihen sich selbst entspricht, sind diese Reihen perspektiv. Die Ebene σ enthält drei Bisekanten der Raumkurve k^3_{AB}, von denen eine den Punkt C enthält. Diese den Punkt C enthaltende Bisekante k_{AB} hat mit den Bisekanten k_{BC} und k_{AC} einen Punkt P gemeinsam. Dieser Punkt P ist ein Grundpunkt des Flächenbündels $[H^2]$ und muss das Zentrum des Perspektivitäts in der Ebene $\sigma \equiv (K, c)$ sein. Dass die Punkte C und K die Komplexstrahlenbüschelscheitel sind, ist auf Grund der früheren Ausführungen offenbar.

6. *Wenn der Punkt S mit einem Punkt C^* der Raumkurve c^3 zusammenfällt, zerfällt der Komplexkegel dritter Ordnung S^3 in das in der $\sigma \equiv (C^*AB)$ gelegte Komplexstrahlenbüschel erster Ordnung $h(C^*)$ und in den Komplexstrahlenkegel C^{*2} der von den Bisekanten der Kurve c^3 gebildet wird.*

7. *In der Schmiegungsebene ω zerfällt die Komplexkurve σ^3 in das Komplexstrahlenbüschel $h(S\omega)$ und in eine Kurve σ^2 zweiter Klasse, die durch die Biplanaren der Kurve k^3_{AB} gebildet wird.*

Zwischen den Punkten K der Kurve k^3_{AB} und den Erzeugenden c des Kegels C^2 besteht eine ein-eindeutige Zuordnung in welcher es keine inzidenten einander entsprechenden Elemente gibt. In der Einleitung haben wir nämlich vorausgesetzt, dass die drei kollinear-zugeordneten Strahlenbündel $[A]$, $[B]$ und $[C]$ so zugeordnet sind, dass sie von vier möglichen keinen Tripel sich schneidender Strahlen enthalten. Die den Punkt C enthaltende Bisekante k_{AB} der Raumkurve k^3_{AB} gehört auch dem Kegel C^2, woraus folgt, dass die Ebenen $\gamma \equiv (K, c)$ einen Ebenenbüschel $\gamma(k_{AC})$ bilden, wenn der Punkt die Kurve k^3_{AB}, und der Strahl c den Kegel C^2 beschreibt. Die ∞^2 Komplexstrahlen in den Ebenen dieses Büschels erzeugen eine Kongruenz (1,6), wenn man die Komplexstrahlenbündel $[C]$ und P ausschliesst. Ein Raumpunkt S enthält eine Ebene des Büschels und die Verbindungsgeraden (SK) des Punktes S mit den in dieser Ebene liegenden Punkte K ist der Strahl der erwähnten Kongruenz. Eine beliebige Ebene σ schneidet die Raumkurve k^3_{AB} in drei Punkten K. Die Verbindungsgeraden (KC') dieser Punkte K mit den Schnittpunkten C' der der zu K entsprechenden Strahlen c bilden drei Kongruenzstrahlen in der Ebene σ. Weitere drei Kongruenzstrahlen in dieser Ebene erhält man, in dem man den Schnittpunkt O der Geraden (AB) mit der Ebene σ und die drei in der Ebene σ sich befindenden Kurvenpunkte der Raumkurve c^3 verbindet.

Wenn man einen Punkt K mit dem Punkte C verbindet, erhält man einen Komplexstrahl h_C, und wenn man den Punkt C^* mit den Punkten A und B verbindet, erhält man weiterhin die Komplexstrahlen h_A und h_B. Diese drei Komplexstrahlen sind als Transversalen eines kollinear verwandten Strahlentripels a, b und c einander zugeordnet. Alle so zugeordneten Komplexstrahlentripel $(h_A \equiv C^*A,\ h_B \equiv C^*B,\ h_C \equiv KC)$ bilden je drei rationale Kegel dritter Ordnung. Da die Komplexstrahlen h_A und h_B sich im Punkte C^* schneiden, schliesst man, dass die in den Komplexstrahlenbündeln $[A]$ und $[B]$ einander entsprechenden sich schneidenden Komplexstrahlen durch ihre Schnittpunkte eine Raumkurve dritter Ordnung c^3 erzeugen, die die Gerade (AB) als gemeinsame Bisekante enthält.

Es bestehen auch weitere interessante Eigenschaften des Transversalenkomplex (HK), die wier aber hier nicht betrachten wollen, da sonst diese Arbeit weit über das vorgesehene Mass hinaus vergrössert würde.

(Eingegangen am 12. I 1967.)

Mathematisches Institut der Universität Zagreb

LITERATUR:

[1] *V. Niče*, Površine četvrtog reda kao geometrijsko mjesto dirališta pramena ravnina i svežnja površina drugog reda, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. 271 (84) (1941), 69—76,

[2] *V. Niče*, O svežnju ploha drugog reda, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. 274 (85) (1942), 163—169,

[3] *G. A. Peschka*, Darstellende und projektive Geometrie, Bd. III, Wien,

[4] *T. Reye*, Die Geometrie der Lage, Bd. III, 1910.

KOMPLEKS TRANSVERZALA PRIDRUŽENIH TROJKI ZRAKA TRIJU KOLINEARNIH SVEŽANJA

Ljerka Dočkal, Zagreb

Sadržaj

Zadana su tri kolinearno pridružena svežnja zraka [A], [B], i [C]. ∞^1 transverzala jedne trojke kolinearno pridruženih zraka a, b i c čine sistem izvodnica neke pravčaste plohe H^2. Transverzale ∞^2 trojki kolinearno pridruženih zraka zadanih svežanja čine sistem izvodnica svežnja pravčastih ploha drugog reda [H^2]. Tih transverzala ima ∞^3 i one tvore kompleks transverzala pridruženih trojki zraka triju kolinearnih svežanja, kojeg smo označili (HK). Pokazano je da je taj kompleks kubni.

Svaka zraka zadanih svežanja je zraka h kompleksa (HK). Svakoj zraci jednog od zadanih svežanja, npr. zraci a, kao ravnalici jednoznačno je pridružena neka ploha H^2. Toj istoj zraci $a \equiv h_A$ kao transverzali jednoznačno je pridružena neka druga ploha H^2.

Sa F^3 označili smo opću kubnu plohu koju čine sjecišta kolinearno pridruženih ravnina zadanih svežanja. Na toj plohi postoje dvije mreže kubnih prostornih krivulja l^3 i k^3. U drugoj mreži tih krivulja ističu se tri krivulje k^3. Svaka od njih je geometrijsko mjesto sjecišta kolinearno pridruženih zraka po dvaju od zadanih svežanja. Svaka bisekanta takove krivulje je zraka kompleksa (HK). Od ∞^2 bisekanata svake od tih krivulja može se sastaviti svežanj pravčastih ploha drugog stupnja [K^2] kojih sistem izvodnica čine bisekante krivulje k^3, dakle, zrake kompleksa (HK). Plohe svežnja

$[K^2]$ prodiru plohu F^3 u krivulji k^3 i mreži krivulja l^3, tako da svakom krivuljom l^3 prolaze po tri plohe K^2. U svakom od svežanja $[K^2]$ postoji pramen ploha koje pripadaju i svežnju $[H^2]$.

Ispitana je pridruženost zraka i transverzala u jednom od zadanih svežanja i pokazano je da je ta pridruženost kvadratna. Između zraka, odnosno transverzala i tangencijalnih ravnina ploha H^2 u jednom od vrhova zadanih svežanja postoji kubna pridruženost.

Na kraju su opisani neki značajniji singulariteti kompleksa (HK). U svakoj tački krivulje k^3 kompleksni stožac S^3 se raspada u stožac drugog reda S^2 i pramen pravaca. Nađena je i krivulja c^3 u čijim se tačkama kompleksni stožac raspada u pramen pravaca prvog reda i stožac drugog reda S^2. Kompleksna krivulja σ^3 raspada se u krivulju drugog razreda i pramen pravaca u svim ravninama koje prolaze jednim od vrhova zadanih svežanja i u oskulacionim ravninama krivulje k^3. Krivulja σ^3 raspada se u tri pramena pravaca prvog reda, ako ravnina σ sadrži dva vrha zadanih svežanja, ili je položena nekom tačkom K krivulje k^3 i pridruženom zrakom trećeg svežnja. Ako svežanj ploha $[H^2]$ tangiramo pramenom ravnina koji sadrži dva vrha svežnja, ploha dirališta se raspada u dvije pravčaste plohe drugog stupnja. Vrhovi stožaca u svežnju $[H^2]$ nalaze se na dvjema krivuljama l^3.