

Serijs II T. 17, Zagreb 1962, Broj 3-4.

POSEBNI OTISAK

GLASNIK MATEMATIČKO - FIZIČKI I ASTRONOMSKI  
PERIODICUM MATHEMATICO - PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

---

*Ljerka Dotkal*

*Kongruenz der Gemeinlote von  
Erzeugenden einer rationalen  
windschiefen Regelfläche  
n-ten Grades*

*Kongruenca zajedničkih transverzala jednog sistema izvodnica  
vstopere racionalne pravilaste plohe n-tog stepnja*

*Zagreb 1962*

---

*Štamparica zvezd „Ogleda Print“ Zagreb, Savska cesta 91, 1963*

## KONGRUENZ DER GEMEINLOTE VON ERZEUGENDEN EINER RATIONALEN WINDSCHIEFEN REGELFLÄCHE $n$ -TEN GRADES

Ljerka Dočkal, Zagreb

In einem System von  $\infty^1$  Erzeugenden einer rationalen windschiefen Regelfläche  $n$ -ten Grades  $\Phi$  haben je zwei dieser Erzeugenden ein Gemeinlot, so dass alle  $\infty^2$  Gemeinlote der Erzeugenden dieses Systems eine Kongruenz bilden.

Die Ordnung dieser Kongruenz ist gleich der Anzahl der Kongruenzstrahlen, die durch einen Raumpunkt gehen. Fällt man die Lote aus einem Punkt  $T$  auf die Erzeugenden der Fläche  $\Phi$ , so erzeugen diese Lote einen Kegel  $\Psi$   $2n$ -ter Ordnung, dessen Doppelerzeugende die Strahlen der erwähnten Kongruenz sind. Jedes Lot aus dem Punkt  $T$  auf eine beliebige Erzeugende  $a$  der Fläche  $\Phi$  wird dabei als Schnittgerade zweier Ebenen  $\mu$  und  $\nu$  betrachtet. Die Ebene  $\mu$  enthält den Punkt  $T$  und die Erzeugende  $a$ , die Ebene  $\nu$  wird durch den Punkt  $T$  senkrecht auf dieselbe Erzeugende gelegt. Alle  $\infty^1$  Ebenen  $\mu$  und  $\nu$  umhüllen zwei Kegel  $n$ -ter Klasse, deren entsprechende Ebenen sich in den Erzeugenden des Kegels  $\Psi$   $2n$ -ter Ordnung schneiden. Die Anzahl  $(2n-1)(n-1)$  der Doppelerzeugenden dieses Kegels ergibt die Ordnung unserer Kongruenz.

Die Klasse dieser Kongruenz wird durch die Anzahl der Kongruenzstrahlen in einer Ebene bestimmt. Um dies zu bestimmen betrachten wir das Konoid  $K$ , das von allen Kongruenzstrahlen gebildet wird die zu einer Ebene  $\rho$  parallel sind. Eine Ebene  $\pi$  schneidet das Konoid  $K$  in einer Schnittkurve  $f$  und die Ebene  $\rho$  in der Schnittgeraden  $r$ . Die Anzahl der eigentlichen Schnittpunkte der Kurve  $f$  und der Geraden  $r$  zeigt wie viele der Kongruenzstrahlen in der Ebene  $\rho$  liegen, bestimmt also die Klasse der Kongruenz.

Die konstruktive Behandlung dieser Überlegungen wird am zweckmässigsten in der Zentralprojektion durchgeführt. Das Projektionszentrum  $O$  wird irgendwo in der Ebene  $\rho$  angenommen die Bildebene  $\pi$  wird beliebig, aber verschieden von der Ebene  $\rho$  gewählt. Die Bildspur  $r$  und die Fluchtgerade  $r''$  der Ebene  $\rho$  werden in diesem Falle in dieselbe Gerade  $r = r''$  projiziert. Die Spurpunkte der Erzeugenden der Regelfläche  $\Phi$  erzeugen eine Kurve  $c$   $n$ -ter Ordnung und die Fluchtpunkte dieser Erzeugenden bilden eine Kurve  $c''$  die ebenfalls von der  $n$ -ten Ordnung ist.

Um die Kongruenzstrahlen zu bestimmen die zu einer Geraden der gewählten Ebene  $\varrho$  parallel sind, müssen wir durch jede zur Geraden  $s$  senkrechte Erzeugende der Fläche  $\Phi$  eine Ebene legen, die zur Geraden  $s$  parallel ist. Je zwei dieser Ebenen schneiden sich in den zur Geraden  $s$  parallelen Schnittgeraden, die je zwei Erzeugende der Fläche  $\Phi$  senkrecht schneiden, also in jenen Kongruenzstrahlen, die zur Geraden  $s$  parallel sind.

Führen wir dies konstruktiv durch, so müssen wir durch das Projektionszentrum  $O$  eine Ebene  $\varepsilon$  senkrecht auf den Sehstrahl  $OS^n$  der Geraden  $s$  legen. Die Bildspur, die zugleich auch die Fluchtspur der Ebene  $\varepsilon$  ist, schneidet die Fluchtkurve  $c^n$  der Fläche  $\Phi$  in  $n$  Punkten, so dass es  $n$  Erzeugende der Fläche  $\Phi$  gibt, die senkrecht zur Geraden  $s$  sind.

Die Ebenen, die durch diese Erzeugenden parallel zur Geraden  $s$  gelegt sind, haben  $n(n-1)/2$  Schnittgeraden miteinander, woraus sich ergibt, dass es in der Kongruenz  $n(n-1)/2$  Kongruenzstrahlen gibt, die zu einer Geraden  $s$  parallel sind.

Alle Geraden des Raums, die zur Ebene  $\varrho$  parallel sind, haben ihre Fluchtpunkte auf der Fluchtgeraden  $r^n$  der Ebene  $\varrho$ . Ordnen wir jedem Fluchtpunkte der Ebene  $\varrho$  die auf dem zugehörigen Sehstrahl senkrechten Erzeugenden der Fläche  $\Phi$  zu, so besteht zwischen den Punkten der linearen Punktreihe  $S_1^n, S_2^n, \dots, S_n^n$  auf der Geraden  $r^n$  und den Erzeugenden der Fläche  $\Phi$  eine  $(1, n)$  — Zuordnung, durch die die Ebenen einer Torse  $2n$ -ter Klasse gebildet werden, denn stellt man zwischen den Elementen zweier rationalen Elementenreihen von den Ordnungen  $n_1$  und  $n_2$  eine  $(a_1, a_2)$  — Zuordnung her so entsteht eine Elementenreihe  $p$ -ten Grades, wenn  $p = n_1 \cdot a_2 + n_2 \cdot a_1 = 1 \cdot n + n \cdot 1 = 2n$  ist, bzw.  $p$ -ter Klasse im Falle der Torse.

Ist diese Zuordnung eine  $(1, n)$  — deutige, so bilden die den einzelnen Elementen der Reihe  $n_1$ -ter Ordnung entsprechenden Elementengruppen der Reihe  $n_2$ -ter Ordnung eine Involution  $n$ -ten Grades. Dabei kann man bemerken, dass zwischen den Elementen der Reihe  $n_2$ -ter Ordnung eine besondere  $(n-1, n-1)$ -Zuordnung besteht, die  $2(n-1)$  Doppelemente hat. Da die erwähnte Zuordnung zwischen der linearen Reihe  $S_1^n, S_2^n, \dots, S_n^n$  und den Erzeugenden der Fläche eine  $(1, n)$ -deutige ist, sind die Erzeugenden der Fläche  $\Phi$  involutorisch zugeordnet und die entsprechenden Ebenen der Torse sind auch involutorisch zugeordnet.

Die Schnittgeraden dieser involutorisch zugeordneten Ebenen der Torse  $2n$ -ter Klasse bilden eine Regelfläche  $g$ -ten Grades  $K$ . Der Grad dieser Fläche ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden  $g$  allgemeiner Lage mit den Erzeugenden der Fläche  $K$ . Ein beliebiger Punkt  $G$  der Geraden  $g$  enthält  $2n$  Ebenen  $\gamma$  der Torse, denen  $2n(n-1)$  Ebenen  $\bar{\gamma}$  derselben Torse zugeordnet sind. Durch den Schnittpunkt  $\bar{G}$  einer dieser Ebenen  $\bar{\gamma}$  mit der Geraden  $g$ ,

gehen ebenfalls  $2n$  Ebenen  $\bar{\gamma}$  der Torse, denen wieder  $2n(n-1)$  Ebenen  $\gamma$  der Torse zugeordnet werden, von denen eine die Gerade  $g$  im Punkte  $G$  trifft. Zuzolge dieser Zuordnung sind die Punktreihen  $G\dots$  und  $\bar{G}\dots$  der Geraden  $g$   $[2n(n-1), 2n(n-1)]$ -deutig zugeordnet. Wenn von der Anzahl  $2 \cdot 2n(n-1)$  der Doppelpunkte dieser Zuordnung die  $2(n-1)$  Schnittpunkte der Doppelebenen der Torse mit der Geraden  $g$  abgezogen werden, erhält man die Anzahl jener Punkte in denen die Schnittgeraden der involutorisch zugeordneten Ebenen der Torse, also die Erzeugenden des Konoids  $K$ , die Gerade  $g$  schneiden. Das Resultat wird durch 2 dividiert, damit nicht jede Erzeugende wegen der Vertauschbarkeit der Elemente bei der Involution zweimal erhalten wird. Aus diesen Überlegungen ergibt sich der Grad des Konoids  $K$

$$g = [2 \cdot 2n(n-1) - 2(n-1)]/2 = (2n-1)(n-1) \quad (1)$$

Die Bildebene  $\pi$  schneidet das Konoid in einer Kurve  $f$  der  $(2n-1)(n-1)$ -ten Ordnung. Die Spur  $r$  schneidet diese Kurve in  $(2n-1)(n-1)$  Punkten von denen nur  $m = (2n-1)(n-1) - n(n-1)/2 = (n-1)(3n-2)/2$  eigentliche Punkte sind und die Schnittpunkte jener Kongruenzstrahlen ergeben, die in der Ebene enthalten sind, deren Anzahl also die Klasse unserer Kongruenz darstellt. Die Zahl  $g = (2n-1)(n-1)$  wird um  $n(n-1)/2$  vermindert, weil sich auf dem Konoid  $K$  so viele Kongruenzstrahlen befinden, die zur Gerade  $r \equiv r^n$  parallel sind und nicht in der Ebene  $q$  liegen.

Die Kongruenz der Gemeinlote je zweier Erzeugenden eines Systems der Erzeugenden des Drehhyperboloids wird hier ausführlich untersucht.

Alle Kongruenzstrahlen, die eine Erzeugende des Hyperboloids schneiden, bilden ein Plücker'sches Konoid. Projiziert man das Hyperboloid  $\Phi$  orthogonal auf eine Ebene, die senkrecht zu einer beliebigen Erzeugenden  $a$  ist, so projiziert sich die Erzeugende  $a$  in einen Punkt  $a'$ . Alle anderen Erzeugenden desselben Systems werden in ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel  $\bar{a}'$  projiziert, wobei der Punkt  $\bar{a}'$  die orthogonale Projektion der zu  $a$  parallelen Erzeugenden  $\bar{a}$  ist und zu der anderen Erzeugendenschar des Hyperboloids gehört. Die Gemeinlote der Erzeugenden desselben Systems werden dann als Lote aus dem Punkt  $a'$  auf die Geraden des Büschels  $\bar{a}'$  projiziert. Die Fusspunkte dieser Lote liegen auf dem Kreise mit dem Durchmesser  $a'\bar{a}'$ . Projizieren wir diese Fusspunkte auf die entsprechenden Erzeugenden zurück, so bekommen wir eine Ellipse  $e$ . Alle Projektionsstrahlen bilden dabei einen Drehzylinder, der das Drehhyperboloid in einer Kurve vierter Ordnung durchdringt. Diese Kurve wird in zwei Erzeugende  $a, \bar{a}$  und eine Kurve zweiter Ordnung zerfallen, die eine Ellipse sein muss, da sie sich auf dem Drehzylinder schräg zur Basis befindet. Die Gemeinlote der Erzeugenden  $a$  und der übrigen Erzeugenden desselben

Systems sind demnach die Lote, die aus den Punkten der Ellipse  $e$  auf die Erzeugende  $a$  gefällt werden, und das ist eine der bekanntesten Definitionen des Plücker'schen Konoids.

Auf Abb. 1. ist der Grund- und Aufriss eines Drehhyperboloids  $\Phi$  und eines Konoids  $K$  dargestellt, das von allen jenen Gemeinloten gebildet wird, die die Erzeugende  $a$  mit den anderen Erzeugenden desselben Systems bildet. Die Ebene  $\pi_1$  ist mit der Kehlkreis-

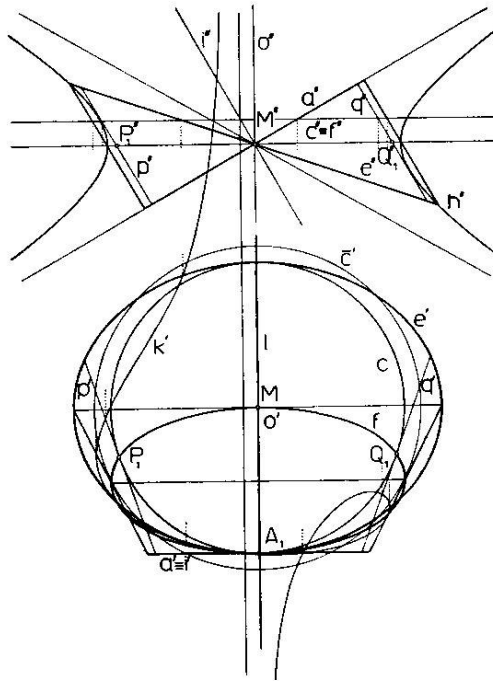


Abb. 1.

ebene des Hyperboloids identisch und die Ebene  $\pi_2$  ist zur Erzeugenden  $a$  parallel. Die Erzeugende ist die Doppelgerade des Konoids  $K$ , dessen Höhe  $h = c \cdot \operatorname{ctg} \varphi$  ist, wobei  $c$  der Radius des Kehlkreises  $c$  und  $\varphi$  der Neigungswinkel der Erzeugenden des Direktionskegels des Hyperboloids  $\Phi$  ist. Die Ellipse  $e$  wird dann in Aufriss als die Strecke  $e''$  abgebildet, die das Bild des Hyperboloidmittelpunktes  $M''$  enthält und deren Endpunkte die Schnittpunkte der von  $a''$  um die Distanz  $c$  entfernten Geraden und der Umrisshyperbel  $h''$  sind ( $a''$  ist dabei die Asymptote der Umrisshyperbel  $h''$ ). Die Ebene  $\pi_1$  schneidet das Konoid  $K$  in der Geraden  $l$ , die das Gemeinlot jener Erzeugenden ist, die zur Ebene  $\pi_2$  parallel sind, und in einer Ellipse

f. Die Scheitelpunkte dieser Ellipse befinden sich im Mittelpunkte  $M$  des Hyperboloids  $\Phi$ , im Spurpunkte  $A_1$  der Erzeugenden  $a$  und in den Spurpunkten der Torsalgeraden des Konoids  $K$ . Die Längen der Halbachsen dieser Ellipse sind  $c/2$  und  $c/2 \sin \varphi$ .

Im Falle  $\varphi < 45^\circ$  ist der Krümmungsradius der Ellipse  $f$  im Punkte  $A_1$  grösser als  $c$ , so dass die Ellipse  $f$  und der Kreis  $c$  sich im Punkte  $A_1$  berühren und sich noch in zwei anderen reellen Punkten  $P_1$  und  $Q_1$  schneiden. Diese Punkte sind die Spurpunkte der Erzeugenden  $p$  und  $q$  des Konoids  $K$ , die auf dem Hyperboloid  $\Phi$  ausser den Punkten  $P_1$  und  $Q_1$  auch noch die Schnittpunkte mit der Erzeugenden  $a$  und der Ellipse  $e$  gemein haben. Die Erzeugenden  $p$  und  $q$  haben mit dem Hyperboloid je drei Punkte, deswegen befinden sie sich ganz auf dem Hyperboloid  $\Phi$  und gehören nicht zur selben Erzeugendenschar wie die Erzeugende  $a$ . Es folgt nun, dass das Hyperboloid  $\Phi$  und das Konoid  $K$  sich in den Erzeugenden  $a$ ,  $p$ ,  $q$ , und der Ellipse  $e$  durchdringen. Im Fall  $\varphi = 45^\circ$  ist der Kreis  $c$  der Hyperoskulationskreis der Ellipse  $f$  im Punkte  $A_1$ , so dass die Geraden  $p$  und  $q$  zusammenfallen. Wenn  $\varphi > 45^\circ$  ist, sind die Geraden  $p$  und  $q$  konjugiert-imaginäre Geraden zweiter Art.

Es ist evident, dass beim Drehhyperboloid die Kongruenz der Gemeinlote je zweier Erzeugenden desselben Systems durch Rotation des Plücker'schen Konoids  $K$  um die Achse  $o$  des Hyperboloids  $\Phi$  entsteht. Bei dieser Rotation erzeugt jeder Strahl des Konoids  $K$  ein neues Drehhyperboloid und je zwei Strahlen des Konoids  $K$ , die zum Konoidstrahl  $l$  in der Ebene  $\pi_1$  axialsymmetrisch liegen, beschreiben dasselbe Hyperboloid. Von besonderer Bedeutung ist in dieser Kongruenz das Hyperboloid  $\Phi_i$  das durch der Konoiderzeugende  $i$  beschrieben wird, die sich mit der Erzeugenden  $l$  in der Mittelebene  $\sigma$  des Konoids  $K$  befindet und eine Fallgerade dieser Ebene ist.

Um zu bestimmen wie viele der Kongruenzstrahlen bzw. Konoiderzeugenden bei der erwähnten Rotation einen Raumpunkt  $T$  enthalten, können wir auch das Konoid  $K$  festhalten und den Punkt  $T$  um die Achse  $o$  rotieren lassen. Die Rotationsebene des Punktes  $T$  schneidet das Konoid  $K$  in einer Kurve dritter Ordnung  $k$ , die mit dem Rotationskreis  $c$  des Punktes  $T$  sechs Schnittpunkte hat, die paarweise konjugiert-imaginär sein können. Je zwei dieser Schnittpunkte gehören zu den erwähnten axialsymmetrischen Erzeugenden, so dass bei der Drehung des Konoids  $K$  der in Ruhe bleibende Punkt  $T$  nur von drei verschiedenen Kongruenzstrahlen getroffen werden kann.

Die Realität dieser Strahlen wird durch einige andere Überlegungen über diese Kongruenz bestimmt. Jede der zwei konjugiert-imaginären Erzeugenden erster Art des Konoids  $K$  ist ein Gemeinlot der Erzeugenden  $a$  und einer der je zwei konjugiert-imaginären Erzeugendenpaare zweiter Art desselben Systems des Hyperboloids  $\Phi$ , so dass durch die Rotation des Konoids  $K$  um die Achse  $o$  nur

alle reelle Gemeinlote von je zwei reellen und alle konjugiert-imaginäre Paare erster Art der Gemeinlote je einer reellen und zwei konjugiert-imaginären Erzeugenden zweiter Art des Hyperboloids  $\Phi$  enthalten werden.

Um die Klasse dieser Kongruenz zu bestimmen, wird hier das Konoid  $K$  betrachtet, das von allen Kongruenzstrahlen gebildet wird, die zu einer beliebigen Ebene  $\varrho$  parallel sind. Das konstruktive Verfahren wird hier in der Zentralprojektion durchgeführt (Abb. 2). Die Kehlkreisebene des Hyperboloids wird als Bildebene und der Schnittpunkt der Hyperboloidachse mit der Ebene  $\varrho$  als Projektionszentrum angenommen. Die Ebene  $\varrho$  wird dabei in die Gerade  $r \equiv r^n$

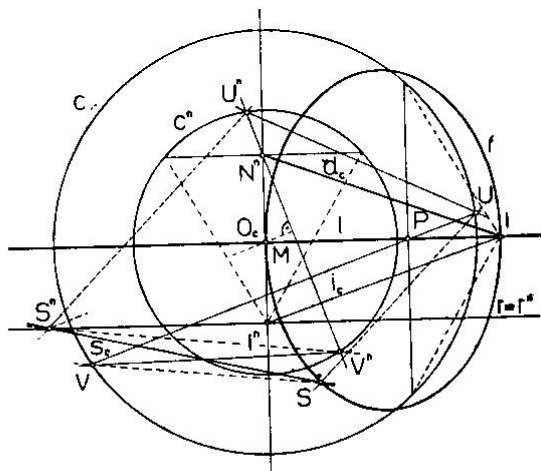


Abb. 2.

projiziert, die Erzeugenden des Hyperboloids  $\Phi$  werden durch die Geraden mit den Spurpunkten auf dem Kehlkreis  $c$  und den Fluchtpunkten auf dem Fluchtkeis  $c^n$  des Hyperboloids dargestellt. Die Verbindungsgeraden des Hyperboloidmittelpunktes  $M$  mit den Spur- und Fluchtpunkten der Erzeugenden bilden zwei kollokale Strahlenbündel deren entsprechenden Geraden zueinander senkrecht sind.

Jeder Kongruenzstrahl ist das Gemeinlot zweier Erzeugenden des Hyperboloids. Da dieser zu der gewählten Ebene parallel sein soll, werden wir jedem Fluchtpunkt  $S^n$  der Ebene  $\varrho$  diejenigen zwei Erzeugenden  $u$  und  $v$  des Hyperboloids  $\Phi$  zuordnen, die auf diesem Sehstrahl  $OS^n$  senkrecht stehen. Die Ebenen  $(S^n u)$  und  $(S^n v)$  schneiden sich dann in einem Kongruenzstrahl, der zur Geraden  $s$  parallel ist.

Alle Raumgeraden, die zur Ebene  $\varrho$  parallel sind, haben die Fluchtpunkte auf der Fluchtgeraden  $r^n$  der Ebene  $\varrho$ . Zwischen der linearen Fluchtpunktreihe  $S_1^n, S_2^n, \dots, S_n^n$  und den Erzeugenden

$u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_n v_n$  des Hyperboloids besteht also eine einzweideutige Zuordnung durch die nach den früheren Darlegungen eine Torse vierter Klasse erzeugt wird. Die Erzeugenden  $u_1 v_1, u_2 v_2, \dots, u_n v_n$  sind dabei involutorisch gepaart, zwar so dass das Involutionszentrum der Fluchtpunkte im Punkte  $N^n$ , dem Fluchtpunkte aller Lote der Ebene  $\varrho$ , sich befindet und die Spurpunkte das Involutionszentrum im Punkte  $P$  haben ( $\triangle N^n M P$  ist rechtwinklig und  $\overline{MN^n} : \overline{MP} = c^n : c$ ). Die entsprechenden Ebenenpaare der Torse  $(S_1^n u_1) (S_1^n v_1), \dots, (S_n^n u_n) (S_n^n v_n)$  sind auch involutorisch zugeordnet. Je zwei dieser involutorisch gepaarten Ebenen schneiden sich in einer Erzeugenden des Konoids  $K$ , das nach den früheren Überlegungen und Formeln (1) vom dritten Grad ist.

Das Gemeinlot derjenigen Erzeugenden des Hyperboloids  $\Phi$  deren Spur- und Fluchtpunkte diametral entgegengesetzt sind, liegt in der Kehlkreisebene so, dass es zu jeder Ebene  $\varrho$  ein Erzeugendenpaar gibt, dessen Gemeinlot zur Spur  $r$  parallel ist. Deswegen zerfällt die Schnittkurve dritter Ordnung, in der die Ebene  $\pi$  das Konoid  $K$  schneidet, in die den Hyperboloidmittelpunkt  $M$  enthaltende, zu  $r$  parallele Gerade  $l$  und in eine Kurve  $f$  zweiter Ordnung, die eine Ellipse ist, da die anderen Erzeugenden des Konoids  $K$  schräg zur Ebene  $\pi$  liegen und nur eigentliche Spurpunkte haben. Je zwei Kongruenzstrahlen, deren Fluchtpunkte symmetrisch zur Geraden  $MN^n$  sind haben zur Geraden  $l$  symmetrische Spurpunkte, so dass die Gerade  $l$  eine Achse der Ellipse  $f$  ist. Die Scheitelpunkte dieser Achse befinden sich im Hyperboloidmittelpunkt  $M$  und im Spurpunkt  $I$  jener Konoiderzeugenden  $i$ , die zur Fallgeraden der Ebene  $\varrho$  parallel ist. Je zwei Kongruenzstrahlen, deren Fluchtpunktsehstrahlen mit der Fluchtgeraden  $r^n$  komplementäre Winkel einschliessen haben die Spurpunkte auf einer zu  $r$  parallelen Geraden, so dass diese Kongruenzstrahlen incident sind. Diejenigen Kongruenzstrahlen, deren Fluchtpunktsehstrahlen mit der Fluchtgeraden  $r^n$  den Winkel  $45^\circ$  bilden, sind deswegen die Torsalgeraden des Konoids  $K$ . Die diese Geraden enthaltenden und zur Ebene  $\varrho$  parallelen Ebenen sind Torsalebene dieses Konoids. Die Spurpunkte der Torsalgeraden sind die Scheitelpunkte der Hauptachse der Ellipse  $f$ . Die Ebene  $\sigma \equiv [l, i] \parallel \varrho$  ist die Mittelebene dieses Konoids. Die Doppelgerade des Konoids  $K$  ist senkrecht zur Ebene  $\sigma \parallel \varrho$  und enthält den Schnittpunkt  $I$  der Geraden  $l$  und  $i$ , so dass sich der Spurpunkt dieser Doppelgeraden im Punkte  $I$  und der Fluchtpunkt im Punkte  $N^n$  befindet. Aus den beschriebenen Eigenschaften ergibt sich weiter, dass das Konoid  $K$  ein Plücker'sches ist. Bezeichnen wir mit  $\nu$  den Neigungswinkel des Lotes zur Ebene  $\varrho$ , mit  $\varphi$  den Neigungswinkel des Direktionskegels des Hyperboloids  $\Phi$  und ist  $\varphi = \nu$ , so ist das Konoid  $K$  mit dem Konoid auf Abb. 1 identisch.

Die Spur  $r$  der Ebene  $\varrho$  schneidet die Ellipse  $f$  in zwei Punkten, so dass diese Kongruenz von der zweiten Klasse ist. Ist die Involution der Erzeugendenpaare elliptisch oder parabolisch, was zutrifft



wenn  $\nu \geq \varphi$  ist, so liegen in der Ebene  $\varrho$  entweder zwei reelle Erzeugende oder eine Torsalgerade, oder zwei konjugiert imaginäre Erzeugende erster Art des Konoids.

Im Falle einer parabolischen Involution also für  $\varphi = \nu$ , ist ein Paar konjugiert-imaginäre Erzeugenden erster Art des Konoids  $K$  ein Paar der Gemeinlote einer reellen und eines konjugiert-imaginären Erzeugendenpaares zweiter Art des Hyperboloids  $\Phi$ . Denn wird ein Konoid  $K$  mittels einer Ebene in zwei konjugiert-imaginären Erzeugenden geschnitten, so bestimmen diese Geraden auf der Fluchtgeraden  $r^n$  der Ebene  $\varrho$  eine elliptisch involutorische Punktreihe. Der elliptisch-involutorische Fluchtgeradenbüschel der Ebenen, die auf den Sehstrahlen der elliptisch-involutorischen Punktreihe senkrecht stehen hat seinen Scheitel in dem auf dem Fluchtkreis des Hyperboloids liegenden Punkte  $N^n$ . Die zweiten Schnittpunkte dieser Fluchtspuren bestimmen auf dem Fluchtkreis  $c^n$  eine elliptisch-involutorische Punktreihe, deren Doppelpunkte die Fluchtpunkte eines Paares konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art des Hyperboloids  $\Phi$  sind, die die entsprechenden konjugiert-imaginären Konoiderzeugenden senkrecht schneiden. Diese Paare von Erzeugenden des Konoids  $K$  und des Hyperboloids  $\Phi$  liegen in einem Paar konjugiert-imaginärer Ebenen, deren reelle Achse diejenige Erzeugende des Hyperboloids  $\Phi$  ist, die den Schnittpunkt der Schnittebene und der Konoidachse enthält und zum System der Erzeugenden des Hyperboloids  $\Phi$  gehört, das die Konoiddoppelgerade nicht enthält. Im Fall der elliptischen oder hyperbolischen Involution der Erzeugendenschar des Hyperboloids  $\Phi$  befindet sich der Scheitel  $N^n$  des elliptisch-involutorischen Fluchtgeradenbüschels der senkrechten Ebenen innerhalb bzw. ausserhalb des Fluchtkreises  $c^n$ , so dass das Paar konjugiert-imaginärer Doppelgeraden dieses Fluchtgeradenbüschels den Fluchtkreis  $c^n$  in zwei Paaren konjugiert-imaginärer Punkte schneidet, die die Fluchtpunkte jener zwei Paare der konjugiert-imaginären Hyperboloiderzeugenden zweiter Art sind, welche die konjugiert-imaginäre Konoiderzeugenden senkrecht schneiden. Demnach sind die konjugiert-imaginären Erzeugenden des Konoids  $K$  deren reeller Punkt nicht auf dem Hyperboloid  $\Phi$  liegt, die Gemeinlote je zweier Paare konjugiert-imaginärer Erzeugendenpaare zweiter Art des Hyperboloids  $\Phi$ .

Im Falle der hyperbolischen Involution (Abb. 2a) der Erzeugendenpaare, also wenn  $\nu < \varphi$  ist, gibt es zwei reelle Doppelebenen  $\gamma$  und  $\chi$  der Torse, die ausserdem zur Ebene  $\varrho$  senkrechte Zentral Ebenen des Hyperboloids  $\Phi$  sind. Die Fluchtpunkte  $G^n$  und  $H^n$  der zu den Ebenen  $\gamma$  und  $\chi$  senkrechten Kongruenzstrahlen  $g$  und  $h$  bestimmen auf der Fluchtgeraden  $r^n$  das Intervall jener Fluchtpunkte, denen kein Paar reeller senkrechter Erzeugenden zugeordnet werden kann, denn jedem in diesem Intervall sich befindenden Fluchtpunkt ist ein Paar konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art des Hyperboloids  $\Phi$  zugeordnet.

Wenn  $\nu < \varphi \leq 45^\circ$  ist, gibt es Ebenen, die folgende Gemeinlote enthalten:

a) zwei reelle Gemeinlote der reellen Erzeugenden des Hyperboloids  $\Phi$  (die Spur  $r$  schneidet die Strecke  $\overline{GT_1}$  bzw.  $\overline{HT_2}$ ),

b) ein reelles Gemeinlot der reellen Erzeugenden und ein reelles Gemeinlot zweier konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art (die Spur  $r$  schneidet die Strecke  $\overline{GH}$ ) und

c) zwei konjugiert-imaginäre Gemeinlote zweier Paare konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art (die Spur  $r$  schneidet die Ellipse  $f$  in einen Paar konjugiert-imaginärer Punkte).

Wenn  $45^\circ < \nu < \varphi$  ist, bleiben die Resultate denen in vorigen Fall gleich, aber für  $\nu < 45^\circ < \varphi$  gibt es die Ebenen, die folgendes enthalten:

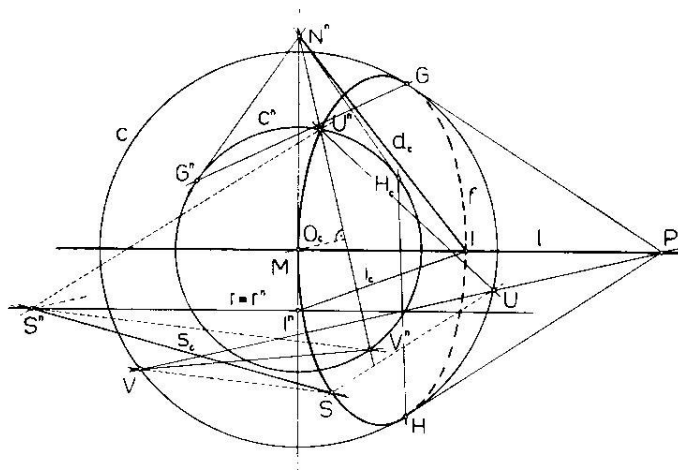


Abb. 2.a

a) zwei reelle Gemeinlote zweier Paare konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art (die Spur  $r$  schneidet die Strecke  $\overline{GT_1}$  bzw.  $\overline{HT_2}$ ),

b) ein reelles Gemeinlot zweier reellen und ein reelles Gemeinlot zweier konjugiert-imaginären Erzeugenden zweiter Art (die Spur  $r$  schneidet die Strecke  $\overline{GH}$ ) und

c) zwei konjugiert-imaginäre Lote zweier Paare konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art (die Spur  $r$  schneidet die Ellipse  $f$  in einem Paar konjugiert-imaginärer Punkte).

Um die Konstruktion eines reellen Gemeinlotes zweier konjugiert-imaginären Erzeugenden zweiter Art auszuführen (Abb. 3.) werden diese Erzeugenden durch zwei Sekanten bestimmt und zwar durch die Gerade  $t$  in der Kehlkreisebene und die unendlich ferne Gerade deren Zentralbild die Gerade  $t^n$  ist. Die Projektionen dieser Geraden sind zueinander senkrechte Gerade, deren Entfernungen vom Hyperboloidmittelpunkt im Verhältnis  $c:c^n$  stehen. Der Kehlkreis bzw. der FluchtpunktKreis bestimmen auf diesen Geraden je eine elliptische Involution der konjugierten Punkte.

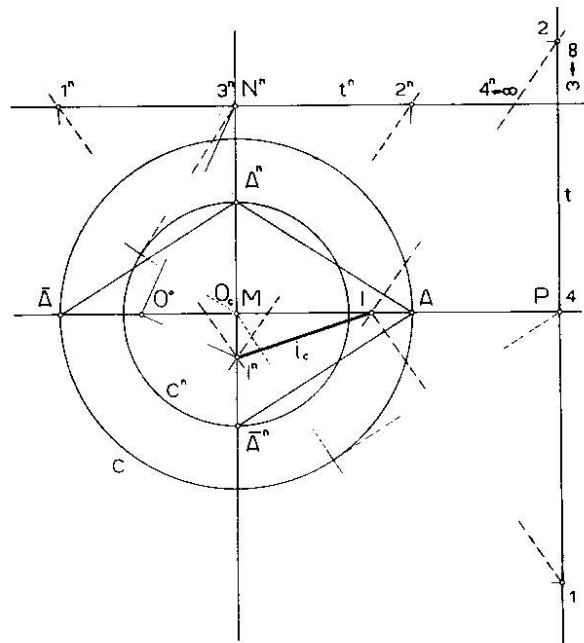


Abb. 3.

Nehmen wir an, dass diese Sekanten  $t$  und  $t^n$  zu einem System von Erzeugenden eines hyperbolischen Paraboloides gehören, welches das Hyperboloid  $\Phi$  in einem Paar reeller und in einem Paar konjugiert-imaginären Erzeugenden zweiter Art durchdringt. Die anderen Erzeugenden des Systems ( $t, t^n$ ) der Erzeugenden des hyperbolischen Paraboloides sind auch Sekanten des gegebenen Paares konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art des Hyperboloids  $\Phi$  und haben ihre Fluchtpunkte auf der Geraden  $MN^n$  während die Spurpunkte auf der Geraden  $MP$  liegen. Das andere System von Erzeugenden dieses hyperbolischen Paraboloides besteht aus den Geraden, die durch eine elliptische Involution miteinander verbunden sind und die als Verbindungsgerade der entsprechenden Punkte auf den

Geraden  $t$  und  $t^n$  erscheinen. Die reellen Geraden, in denen sich das Hyperboloid  $\Phi$  und das hyperbolische Paraboloid durchdringen, sind die Geraden  $(\overline{A A^n})$  und  $(A \overline{A^n})$ , während das konjugiert-imaginäre Paar der gemeinsamen Erzeugenden zum selben System gehört wie die Erzeugende  $(A A^n)$ . Das Gemeinlot dieser Erzeugenden ist die Gerade, die den Fluchtpunkt in dem zur Sekante  $t^n$  antikonjugierten Punkt  $I^n$  hat während der Spurpunkt sich im Punkt  $I$  auf der Geraden  $MP$  befindet. Der Punkt  $I$  ist der Spurpunkt der reellen Achse des Paares konjugiert-imaginärer Ebenen, die mit dem reellen Punkt  $I^n$  und dem Paar konjugiert imaginärer Geraden zweiter Art der gemeinsamen Hyperboloid- und Paraboloiderzeugenden gegeben sind. Legen wir nun durch den Punkt  $I^n$  die Ebene so, dass ihre Spuren  $r \equiv r^n \parallel t^n$  sind und bestimmen wir das Konoid  $K$  der Kongruenzstrahlen, die zur Ebene  $\varrho$  parallel sind. Die Gerade  $i(II^n)$  wird dann eine Erzeugende dieses Konoids.

Nehmen wir ein Ebenenbüschel  $\varrho_\nu$  ( $\nu$  ist der Neigungswinkel des Lotes der Ebene  $\varrho$ ,  $0^\circ \leq \nu \leq 180^\circ$ ) so an, dass die Achse dieses Büschels das Projektionszentrum enthält und parallel zur Kehlkreisebene ist. Zu diesem Ebenenbüschel wollen wir das Büschel der Plücker'schen Konoide  $K_\nu$  zuordnen die durch die zur Ebene  $\varrho_\nu$  parallelen Kongruenzstrahlen erzeugt sind. Diese Konoide enthalten alle reellen Kongruenzstrahlen unserer Kongruenz, denn jeder Kongruenzstrahl ist zu einer der Ebenen  $\varrho_\nu$  parallel. Dieser Kongruenzstrahl kann ein Gemeinlot entweder zweier reellen oder zweier konjugiert-imaginären Erzeugenden zweiter Art des Hyperboloids  $\Phi$  sein. In der Zentralprojektion wird das Konoidbüschel so projiziert, dass die Gerade  $l$  alle Nebenachsen der Ellipsen  $f$ , der Konoide  $K_\nu$  enthält, die im Hyperboloidmittelpunkt  $M$  einen gemeinsamen Berührungspunkt haben. Die Doppelgeraden dieser Konoide haben die Fluchtpunkte auf der Geraden, die den Hyperboloidmittelpunkt  $M$  enthält und senkrecht zur Geraden  $l$  steht. Sind die Fluchtpunkte der Doppelgeraden zweier Konoide  $K_\nu$  zum Distationskreis konjugiert, so schneiden diese Geraden die Gerade  $l$  im selben Punkt, und daher haben die zugehörigen Ellipsen dieser Konoide dieselben Nebenachse.

Früher haben wir erwähnt, dass das Konoid  $K$  mit dem auf Abb. 1. konstruierten Konoid identisch ist, wenn die Ebene  $\varrho$  senkrecht auf einer Erzeugenden des Hyperboloids  $\Phi$  steht, also wenn  $\nu = \varphi$  ist.

Einige Beziehungen des Konoids  $K$  zu anderen Konoiden  $K_\nu$  ergeben wichtige Eigenschaften unserer Kongruenz.

Die Kehlkreisebene  $\pi$  des Hyperboloids  $\Phi$  schneidet das Konoid  $K$  in der Geraden  $l$  und der Ellipse  $f$  mit der Gleichung

$$f(x, y) \equiv x^2 + \frac{y^2 - cy}{\sin^2 \nu} = 0 \quad (2)$$

wenn der Koordinatenursprung im Hyperboloidmittelpunkt  $M$  ist, d. h. im Scheitel der Nebenachse der Ellipse  $f$ . Jeder Kreis, der um den Anfangspunkt beschrieben ist, schneidet die Ellipse  $f$ , in den Spurpunkten derjenigen Konoiderzeugendenpaare die zur Ebene  $\pi$  den gleichen Neigungswinkel haben. Derjenige dieser Kreise, der die Ellipse  $f$  berührt, hat die Gleichung.

$$\varphi(x, y) \equiv x^2 + y^2 = r^2$$

wobei man  $r$  aus der Bedingung

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

bekommen kann. Es folgt, dass

$$2x \cdot 2y - \frac{2y - c}{\sin^2 \nu} \cdot 2x = 0$$

ist. Hieraus und aus (2) ergibt sich

$$y = \frac{c}{2 \cos^2 \nu}, \quad x = \frac{c^2 (\cos^2 \nu - \sin^2 \nu)}{4 \sin^2 \nu \cos^2 \nu},$$

so dass  $r = c / \sin 2\nu$  ist.

Wenn der Neigungswinkel des Direktionskegels  $\varphi = 45^\circ$  ist, dann ist auch  $\nu = 45^\circ$ , so dass der Halbmesser des die Ellipse  $f$ , berührenden Kreises gleich der Nebenachse der Ellipse  $f_{A\pi^0}$  ist. Die Nebenachse jeder Ellipse  $f_\nu$  aus dem Konoidbüschel  $K_\nu$  kann man durch  $r$  ausdrücken, und zwar wird die Nebenhalbachse  $b = c/2 = r \sin \nu \cdot \cos \nu$  und die Haupthalbachse  $a = c/2 \sin \nu = r \cos \nu$ .

Die Höhe dieses Konoids ist demnach

$$h/2 = a \cos \nu = r \cos^2 \nu.$$

Betrachtet man die Doppelgeraden aller Konoide  $K_\nu$  dieses Büschels, wird man bemerken, dass sie auch die Erzeugenden eines neuen Plückerischen Konoids  $\mathcal{E}$  bilden. Die Doppelgerade dieses Konoids  $\mathcal{E}$  enthält den Hyperboloidmittelpunkt  $M$  und liegt in der Ebene  $\pi$ . Die Torsalgeraden des Konoids  $\mathcal{E}$  sind die Doppelgeraden der Konoide bei denen  $\nu = 45^\circ$  bzw.  $135^\circ$  ist.

Projizieren wir dieses Konoidbüschel orthogonal auf eine Aufriss-ebene (Abb. 4.) die die Hyperboloidachse enthält und senkrecht auf der Ebenenbüschelachse steht, so wird die Kurve der Kuspidualpunkte der Konoide  $K_\nu$  in eine Kurve projiziert, die folgende Gleichung in Polarkoordinaten hat

$$\rho = r \cos^2 \nu. \quad (3)$$

Die Substitution  $x = \rho \cos \nu$ ,  $z = \rho \sin \nu$  bzw.

$$z^2 \cos^2 \nu = x^2 (1 - \cos^2 \nu)$$

oder

$$\cos^2 \nu = \frac{x^2}{x^2 + z^2}$$

ergibt mittels der Gleichung (3)

$$x^2 + z^2 = r^2 \left( \frac{2}{x^2 + z^2} \right)^2$$

so, dass in kartesischen Koordinaten diese Kurve folgende Gleichung hat:

$$(x^2 + y^2)^3 = r^2 x^4.$$

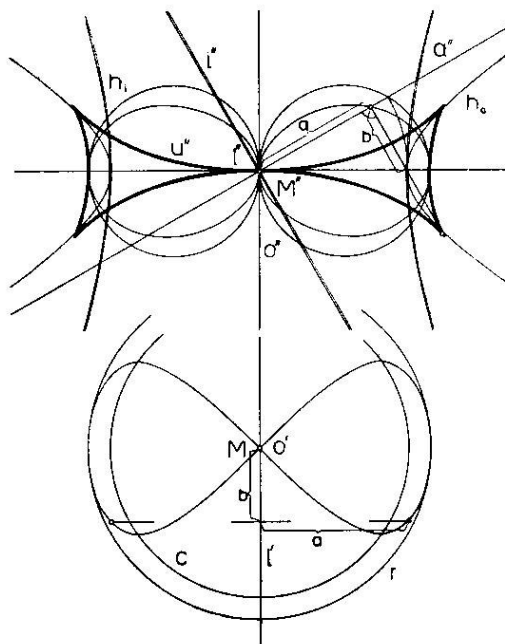


Abb. 4.

Dies ist die bekannte Müngersche Doppelleinie, die im Anfangspunkt einen vierfachen Punkt mit einer vierfachen Tangente hat [3].

Da zwischen den Punkten der Kuspidualpunktraumkurve und deren Aufriss eine eindeutige Zuordnung besteht, kann man auch hieraus schliessen, dass diese Raumkurve von der sechsten Ordnung ist.

Die Hauptachsenscheitelpunktkurve der Ellipsen  $f$ , des Konoidbüschels  $K$ , hat in Polarkoordinaten die Gleichung

$$\rho^2 = a^2 + b^2, \tag{4}$$

wobei  $a(\nu) = x = r \cos \nu$ ,  $b(\nu) = y = r \cos \nu \sin \nu$  ist.

Setzen wir dies in die Gleichung (4) ein, so erhalten wir

$$\varrho^2 = r^2 \cos^2 \nu (2 - \cos^2 \nu).$$

In kartesischen Koordinaten lautet diese Gleichung

$$r^2 (x^2 + y^2) = x^2 (2r^2 - x^2)$$

oder

$$r^2 (x^2 - y^2) = x^4.$$

In der Literatur ist diese Kurve als die Geronsche Lemniskate bekannt [1].

Die Torsalgeradenfläche  $T$  des Konoidbüschels kann als Regelfläche der Verbindungsgeraden der Kuspidalpunkte der Konoide  $K$ , mit den zugehörigen Hauptachsenscheitelpunkten der Ellipsen  $f_\nu$  erhalten werden.

Diese Regelfläche ist vom sechsten Grade, da sie durch die eineindeutig zugeordneten Punktepaare einer Kurve sechster und einer Kurve vierter Ordnung entstand, die drei gemeinsame Punkte haben, von denen einer ein Doppelpunkt ist. Denn, wie bekannt, zwei algebraische Kurven der Ordnungen  $n_1$  und  $n_2$ , deren Punkten eineindeutig zugeordnet sind erzeugen eine Regelfläche von der Ordnung  $n_1 + n_2$  und wenn diese Kurven  $s$  gemeinsame Punkte haben, dann ist der Grad dieser Fläche  $n_1 + n_2 - s$ .

Nach Abb. 1. ist es klar, dass der Hauptachsenscheitelpunkt diejenige Strecke auf der Torsalgeraden halbiert, die durch den Kuspidalpunkt und durch den zweiten Spurpunkt begrenzt wird. Die Torsalgeradenfläche  $T$  ist von der sechsten Ordnung, so dass die Ebene  $\pi_2$  diese Fläche in einer Kurve u sechster Ordnung schneidet. Diese Kurve ist durch die zweiten Spurpunkte der Torsalgeraden erzeugt. Die Gleichung dieser Kurve in Polarkoordinaten lautet

$$\varrho = r \cos \nu \sqrt{4 - 3 \cos^2 \nu}.$$

Diese Kurve hat ihren Doppelpunkt im Anfangspunkt und die Rückkehrpunkte in den Punkten für die  $\cos \nu = \pm \sqrt{2/3}$  ist, also in den zweiten Spurpunkten der Torsalgeraden die zu den Kuspidalpunkten der Konoide gehören, für welche  $\nu_1 = 35^\circ 15' 15''$ , bzw.  $\nu_2 = (180^\circ - \nu_1)$  gilt. Diese Kurve ist ein Spezialfall einer schiefen Astroide, wenn die Leitgeraden zusammenfallen. Nach Loria wird diese Kurve Parastroide genannt [3]. Die vorher erwähnte Doppelelinie ist eine Fusspunktkurve dieser Parastroide. Lassen wir diesen Konoidbüschel um die Achse des Hyperboloids  $\Phi$  rotieren, so beschreiben die Kuspidalpunkte dieser Konoide Kreise welche die Aufrissebene  $\pi_2$  in Punkten der Kurve  $u$  schneiden so, dass diese Kurve auch die Meridiankurve der Drehfläche  $\Omega$  ist, die der geometrische Ort aller Kuspidalpunkte unserer Kongruenz ist.

Wir haben vorher bemerkt, dass die reellen Erzeugenden der Konoide  $K$ , alle reelle Kongruenzstrahlen umfassen und zwar so,

dass durch die Rotation dieses Konoidbüschels um die Achse des Hyperboloids diese reellen Kongruenzstrahlen untereinander rotieren. Durch diese Rotation ergibt sich, dass in unserer Kongruenz  $\infty^2$  Plücker'sche Konoide enthalten sind. Die Doppelgeraden dieser Konoide bilden die Systeme der Erzeugenden von  $\infty^1$  Drehhyperboloiden, die mit dem Hyperboloid  $\Phi$  koaxial sind. Je zwei von  $\infty^1$  dieser Hyperboloide, deren Erzeugende komplementäre Neigungswinkel haben, berühren sich im Kehlkreis. Es ergibt sich weiter, dass die Kongruenzstrahlen die Gemeinlote nicht nur je zweier Erzeugenden eines Systems der Erzeugenden des Hyperboloids  $\Phi$  sind, sondern auch je eines Systems aller Hyperboloide die durch Rotation der Doppelgeraden des Konoidbüschels  $K$ , erzeugt werden. Die Erzeugenden aller  $\infty^2$  Plücker'schen Konoide erzeugen  $\infty^1$  Drehhyperboloide und liefern uns die zweiten Systeme der Erzeugenden der Hyperboloide, die durch die Konoiddoppelgeraden erzeugt sind.

Durch genaue Betrachtung der Abb. 1. und 4. erkennt man dass der Punkt  $T$  innerhalb der Fläche  $\Omega$  drei reelle Kongruenzstrahlen, und der Punkt  $T$  ausserhalb dieser Fläche einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Strahlen enthält. Wenn der Punkt  $T$  sich auf der Fläche  $\Omega$  befindet, dann fallen in ihm je zwei Kongruenzstrahlen zusammen, so dass dieser Punkt eine Torsalgerade und einen reellen Kongruenzstrahl enthält. Ausserdem hängen die Eigenschaften dieser Kongruenzstrahlen von der Lage des Punktes  $I$  in dem Bezug zu dem Hyperboloid  $\Phi_i$  ab, das die Erzeugende  $i$  des Konoids  $K$ , beschreibt (auf der Abb. 4. sind das Hyperboloid  $\Phi$ , für  $\nu = 30^\circ$  und das zugehörige Hyperboloid  $\Phi_i$  dargestellt).

1. Es sei der Neigungswinkel des Direktionskegels des Hyperboloids  $\varphi \leq 45^\circ$

a) Wenn der Punkt  $T$  innerhalb der Fläche  $\Omega$  und ausserhalb des Hyperboloids  $\Phi_i$  sich befindet, enthält er drei reelle Gemeinlote der reellen Erzeugenden.

b) Befindet sich  $T$  innerhalb  $\Omega$ , und innerhalb  $\Phi_i$  enthält er zwei reelle Gemeinlote der reellen Erzeugenden, und ein reelles Gemeinlot eines Paares konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art.

c) Ist  $T$  ausserhalb  $\Omega$ , und ausserhalb  $\Phi_i$  so enthält er ein reelles Gemeinlot der reellen Erzeugenden und zwei konjugiert-imaginäre Gemeinlote zweier Paare konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art.

d) Ist  $T$  ausserhalb  $\Omega$  und innerhalb  $\Phi_i$ , so enthält er ein reelles Gemeinlot eines Paares konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art und zwei konjugiert-imaginäre Gemeinlote zweier Paare konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art.

e) Ist endlich  $T$  ausserhalb  $\Omega$  und auf der  $\Phi$ , so enthält er ein reelles Gemeinlot zweier reellen Erzeugenden, zwei konjugiert-imaginäre Gemeinlote einer reellen und eines Paares konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art.



2. Es sei  $\varphi > 45^\circ$ .

a) Ist  $T$  innerhalb  $\Omega$  und ausserhalb  $\Phi_i$ , so enthält er ein reelles Gemeinlot zweier reellen Erzeugenden, und zwei reelle Gemeinlote zweier Paare konjugiert-imaginärer Erzeugenden zweiter Art.

Die anderen Resultate bleiben denen im vorigen Fall gleich.

Eine Bemerkung: der Punkt  $T$  wird als ausserhalb des Hyperboloides  $\Phi$  betrachtet, wenn seine Entfernung von der Hyperboloidachse grösser als der Halbmesser des Kreises in dem die durch den Punkt  $T$  senkrecht zur Achse  $o$  gelegte Ebene das Hyperboloid  $\Phi$  schneidet.

Die Hyperboloidachse  $o$  kann in dieser Kongruenz auch als ein ausgeartetes Hyperboloid betrachtet werden das durch die Doppelgerade des Konoids  $K_{00}^0$  beschreiben wird oder auch als ein ausgeartetes Hyperboloid, das durch die Konoiderzeugende  $i$  in der Mittelebene des Konoids  $K_0^0$  beschrieben wird.

Der Mittelpunkt  $M$  des Hyperboloids  $\Phi$  ist ein singulärer Punkt in dieser Kongruenz, denn er enthält ein Kongruenzstrahlenbüschel, das in der Kehlkreisebene liegt und als ein ausgeartetes Plücker-sches Konoid  $K_{00}^0$  betrachtet werden kann. In der uneigentlichen Ebene gibt es  $\infty^2$  Paare isotroper Kongruenzstrahlen, die in den Plücker-schen Konoiden dieser Kongruenz enthalten sind.

#### L I T E R A T U R :

- [1] G. Loria, Curve piane speciali algebriche e trascendenti, Milano, 1930,
- [2] E. Müller, Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III, Leipzig und Wien, 1931,
- [3] H. Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Leipzig, 1908.

#### KONGRUENCIJA NAJKRAĆIH TRANSVERZALA JEDNOG SISTEMA IZVODNICA VITOPERE RACIONALNE PRAVČASTE PLOHE $n$ -TOG STUPNJA

Ljerka Dočkal, Zagreb

#### Sadržaj

Sistem od  $\infty^1$  izvodnica neke racionalne vitopere pravčaste plohe  $n$ -tog stupnja ima  $\infty^2$  najkraćih transversala po dviju od tih izvodnica i one čine kongruenciju.

Ako iz bilo koje tačke prostora spustimo okomice na izvodnice plohe  $\Phi$ , one čine stožac  $\Psi$   $2n$ -tog reda, a dvostruke izvodnice tog stožca su zrake spomenute kongruencije. Stožac  $\Psi$  ima  $(2n-1)(n-1)$  dvostrukih izvodnica, pa je to ujedno i red naše kongruencije.

Da bismo odredili razred te kongruencije promatrat ćemo konoid  $K$ , kojeg čine sve zrake kongruencije paralelne s nekom ravninom  $\varrho$ . Ako taj konoid  $K$  i ravninu  $\varrho$  presječemo nekom ravninom  $\pi$ , onda se presječna krivulja  $f$  konoida  $K$  i trag  $\tau$  ravnine  $\varrho$  sijeku u probodištima onih zraka kongruencije s ravninom  $\pi$ , koje leže u ravnini  $\varrho$ . Može se pokazati da je stupanj tog konoida  $g = (2n-1)(n-1)$  i da u ravnini  $\varrho$  leži  $m = (n-1)(3n-2)/2$  zraka kongruencije, pa je taj broj razred naše kongruencije.

U članku je posebno obrađena kongruencija najkraćih transversala po dviju izvodnica jednog sistema izvodnica rotacionog hiperboloida s obzirom na realnost i svojstva zraka te kongruencije. Kod određivanja razreda dobije se da je konoid  $K$  Plückerov. Ako s  $\nu$  označimo prikloni kut okomice ravnine  $\varrho$  prema ravnini grlene kružnice hiperboloida  $\Phi$ , a s  $\varphi$  prikloni kut direkcionog stošca tog hiperboloida, onda o relaciji  $\varphi \stackrel{\leq}{\geq} \nu$  ovisi hoće li taj konoid  $K$  pored transversala parova realnih izvodnica sadržavati i realne transversale parova konjugirano-imaginarnih izvodnica druge vrste, parove konjugirano-imaginarnih transversala prve vrste po jedne realne i para konjugirano-imaginarnih izvodnica druge vrste ili po dvaju parova konjugirano-imaginarnih izvodnica druge vrste.

Ako svesku ravnina  $\varrho$ , kojemu je os paralelna s ravninom grlene kružnice i siječe os  $o$  hiperboloida  $\Phi$  pridružimo pramen Plückerovih konoida  $K$ , obuhvatili smo time sve realne zrake kongruencije. Ravnina grlene kružnice siječe pramen konoida  $K$ , u pravcu  $l$  i elipsama  $f$ , koje imaju zajedničko diralište u središtu  $M$  hiperboloida  $\Phi$ , a male osi na pravcu  $l$ . Tjemena velikih osi tih elipsa  $f$ , leže na Geronovoj lemniskati.

Kuspidalne tačke tih konoida  $K$ , leže na prostornoj krivulji šestog reda, a može se pokazati da je ploha  $T$  torzalnih pravaca konoida  $K$  također šestog reda. Ravnina  $[o, l]$  siječe tu plohu  $T$  u krivulji šestog reda, parastroidi  $u$ . Rotiramo li pramen konoida  $K$ , oko osi hiperboloida opisat će kuspidalne tačke tih konoida plohu  $\Omega$  kojoj je parastroida  $u$  meridijanska krivulja. Pramen konoida  $K$ , obuhvaća sve realne zrake kongruencije, pa rotacijom tog pramena oko osi  $o$  te zrake rotiraju međusobno.

Dvostruki pravci tih konoida  $K$ , opisuju kod te rotacije po jedan sistem izvodnica od  $\infty^1$  koaksijalnih hiperboloida  $\Phi$ . Po dva od tih hiperboloida kojima su prikloni kutevi direkcionih stožaca kompletni, imaju zajedničku grlenu kružnicu. Izvodnice konoida  $K$ , čine drugi sistem izvodnica na hiperboloidima  $\Phi$ .

Ako se tačka  $T$  nalazi unutar plohe  $\Omega$  njom prolaze tri realne zrake kongruencije, a ako je tačka  $T$  izvan plohe  $\Omega$  onda tom tačkom prolazi jedna realna i par konjugirano-imaginarnih zraka prve vrste. Ako je tačka unutar hiperboloida  $\Phi_i$  kojeg opisuje izvodnica  $i$  konoida  $K$ , koja dira hiperboloid  $\Phi$ , u tački grlene kružnice, jedna

od realnih zraka kongruencije je transversala para konjugirano-imaginarnih izvodnica druge vrste.

Zrake kongruencije u ravnini grlene kružnice čine pramen pravaca s vrhom u središtu  $M$  hiperboloida  $\Phi$ , pa su tačka  $M$  i ravnina grlene kružnice u toj kongruenciji singularne. U beskonačno dalekoj ravnini ima  $\infty^2$  parova izotropnih zraka kongruencije koje pripadaju Plückerovim konoidima u toj kongruenciji.

(Primljeno 2. VI 1962.)