GLASNIK MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI
PERIODICUM MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

Serija II.	Zagreb 1952	T. 7 / No. 2

OBRADA OSNOVNIH STEREOMETRIJSKIH POUČAKA I KONSTRUKCIJA GEOMETRIJE LOBAČEVSKOG SINTETIČKIM SREDSTVIMA*

Lav Rajčić, Zagreb

Izlaganje u ovom članku kao i u I. dijelu nema aksiomatski karakter. Na temelju osnovnih svojstava polariteta kvadrika upoznat ćemo osnovne stereometrijske poučke geometrije Lobačevskog, a pri tom odrediti mogućnost detaljnog izvođenja pripadnih konstrukcija. To je projektivna interpretacija stereometrije Lobačevskog vezana na elipsoid (Cayley—Kleinov model).

Uvod

Apsolutni polarni sistem

1. — Svakoj točki u prostoru s obzirom na zadanu kvadriku pridružena je polarna ravnina, a svakoj ravnini pol. Time je u prostoru određena korelacija, koja se zove apsolutni polarni sistem. Kvadrika, koja određuje taj apsolutni polarni sistem, zove se apsoluta.

Osnovni pomak

2. — Ravnina Π i njen pol P s obzirom na apsolutu određuju u prostoru centralnu involutornu kolineaciju, koja prevodi apsolutu u sebe (isporedi I. dio, točku 8.), a bilježi se $(P\Pi)$.

Centralna involutorna kolineacija $(P\Pi)$ izvodi u prostoru promjenu geometrijskih likova, koju ćemo promjenu u našim razmatranjima definirati kao osnovni pomak. Zato ćemo i kolineaciju $(P\Pi)$ zvati osnovni pomak. Kod promatranja tih pomaka uzimamo u obzir samo početni i konačni položaj geometrijskog lika. Apsolutni polarni sistem definira u prostoru ∞^3 osnovnih pomaka.

---

* Ovo je nastavak radnje, koja je objelodanjena u *Glasniku*, T. 5., 1950, str. 57—120 pod naslovom: *Obrada osnovnih konstrukcija geometrije Lobačevskog sintetičkim sredstvima.* U daljnjem razmatranju, kad se budemo pozivali na tu radnju, radi lakšeg citiranja, zvat ćemo je I. dio.

Grupa osnovnih pomaka

3. — Pomak, koji predstavlja rezultat dvaju ili više uzastopce izvršenih osnovnih pomaka, zove se opći pomak, a bilježi se sa $O = \Sigma\ (P\Pi)$. Opći pomaci određuju grupu pomaka (isporedi I. dio točku 16.).

4. — Radi lakšeg izražavanja uvodimo za pravac i ravninu slijedeće oznake: a) Ako pravac p siječe apsolutu u točkama N_1 i N_2, pisat ćemo $p = N_1 N_2$. Ako je pravac orijentiran, onda uzimamo da orijentirana dužina $N_1 N_2$ određuje ujedno orijentaciju pravca p i pišemo $p = \overrightarrow{N_1 N_2}$.

b) Ako ravnina Δ siječe apsolutu u konici k, tad pišemo $\Delta(k)$.

5. Zadatak. *Odredi osnovni pomak $(P\Pi)$, koji prevodi ravninu $\Gamma(l)$ u ravninu $\Delta(k)$.*

Rješenje: Odredit ćemo s obzirom na apsolutu polove G i D ravnina Γ i Δ. Označimo sa $p = N_1 N_2$ spojnicu točaka G i D, sa E točku $p \times \Gamma$, sa F točku $p \times \Delta$, a sa p' presjek ravnina Γ i Δ. Pravci p i p' su konjugirane polare apsolute.

Odredimo sada točke P i R prema zahtjevu $(N_1 N_2 P R) = -1$ i $(E F P R) = -1$. Tada točka P i ravnina $\Pi = (R + p')$ određuju centralnu involutornu kolineaciju, t. j. osnovni pomak $(P\Pi)$, koji prevodi ravninu Γ u ravninu Δ, a koniku l u koniku k.

Na isti način točka R i ravnina $(P + p')$ određuju osnovni pomak sa istim svojstvima kao pomak $(P\Pi)$ (isporedi I. dio, točke 9.—14.).

Sukladnost geometrijskih likova

6. — U prostoru definiramo sukladnost geometrijskih likova ovako:

Ako je geometrijski lik A proizašao iz geometrijskog lika B bilo kojim pomakom $O = \Sigma\ (P\Pi)$, onda je geometrijski lik A sukladan ili kongruentan s geometrijskim likom B i obrnuto.

Posljedak. a) Ako su geometrijski likovi A i B sukladni s geometrijskim likom C, onda je geometrijski lik A sukladan s likom B. b) U ravninama, koje sijeku apsolutu, presječne konike omeđuju sukladne dijelove tih ravnina.

Uvođenje hiperboličke metrike

7. — Mjerni broj za dužinu i kut uvodimo na isti način kako smo to učinili u I. dijelu. Ako pri tome proširimo sve poučke i konstrukcije, koje smo upoznali u I. dijelu, na osnovne tvorevine u prostoru, odredit ćemo na taj način metričku geometriju u prostoru, koja se bitno razlikuje od euklidske, a koja se zove hiperbolička.

S obzirom na uvedenu metriku razlikujemo tri vrste točaka u prostoru (isporedi I. dio, točke 19.—29.): a) Prave točke unutar apsolute, b) neprave točke izvan apsolute, c) beskonačno udaljene točke na apsoluti.

S istih razloga razlikujemo dvije vrste pravaca i ravnina: a) Pravi pravci s dvije beskonačne točke (sekante apsolute), b) pravci s jednom beskonačnom točkom (tangente apsolute), c) nepravi pravci bez beskonačnih točaka (koji ne sijeku apsolutu), d) prave ravnine (sijeku apsolutu u realnoj konici), e) neprave ravnine (koje tangiraju apsolutu ili koje nemaju s njom realnih točaka).

Zaključak

U daljnjem razmatranju ograničit ćemo se na istraživanje onih likova, na kojima dužine i kutovi imaju realne mjerne brojeve, t. j. istraživanje ograničujemo samo na dio prostora unutar apsolute. Taj dio prostora i likove u njemu zvat ćemo odsada hiperbolički prostor i hiperbolički likovi.

Projektivna interpretacija stereometrije Lobačevskog

O točki, pravcu i ravnini

8. — Iz odnosa točaka, pravaca i ravnina slijede ovi odnosi u hiperboličkom prostoru:

Ako imaju hiperbolički pravci p i q dvije točke zajedničke, oni predstavljaju isti pravac, t. j. $p \equiv q$. Ili: Dvije točke određuju jednoznačno hiperbolički pravac.

Ako imaju dva hiperbolička pravca p i q samo jednu točku zajedničku, oni se sijeku i određuju ravninu $(p+q)$.

Svi pravci, koji prolaze jednom točkom hiperboličkog prostora čine snop pravaca 1. vrste (vrh je prava točka).

Snop pravaca s vrhom izvan apsolute određuje u hiperboličkom prostoru snop pravaca 2. vrste (vrh snopa je neprava točka).

Snop pravaca s vrhom u jednoj točki apsolute, određuje u hiperboličkom prostoru snop pravaca 3. vrste (vrh snopa je beskonačno udaljena točka).

Po dva pravca iz snopa 3. vrste u hiperboličkom prostoru usporedni su prema istoj strani. Iz toga slijedi odmah zakon prenošenja paralelizma: Ako su pravci p i q paralelni prema istoj strani s pravcem r, onda su i pravci p i q usporedni prema istoj strani. I dalje: Pravac zadržava svojstvo paralele u svim svojim točkama.

Dva pravca u hiperboličkom prostoru, koji ne leže u istoj ravnini, zovu se mimosmjerni pravci u prostoru.

Ako ima u hiperboličkom prostoru pravac s ravninom dvije točke zajedničke, on leži u toj ravnini. Ako ima pravac s ravninom samo jednu točku zajedničku, on je probada.

Ako je zadan u hiperboličkom prostoru pravac $p = N_1N_2$ i ravnina $\Delta(k)$, a točka se N_1 nalazi na konici k, onda je svaki pravac ravnine Δ, koji leži s pravcem p u jednoj ravnini, paralelan s pravcem p prema točki N_1. U tome slučaju se kaže, da je pravac p usporedan s ravninom Δ i obrnuto.

Ako pravac u hiperboličkom prostoru nema s ravninom zajedničkih točaka, kaže se, da je mimosmjeran s ravninom.

U hiperboličkom prostoru određuje se ravnina jednoznačno na tri načina: a) trima točkama, koje ne leže na istom pravcu,

b) dvama pravcima, koji pripadaju snopu 1., 2. ili 3. vrste,

c) pravcem i točkom izvan tog pravca.

Sve ravnine hiperboličkog prostora, koje imaju jedan zajednički pravac čine pramen ravnina 1. vrste (os pramena je pravi pravac).

Pramen ravnina s osi izvan apsolute određuje u hiperboličkom prostoru ravnine, koje čine snop 2. vrste (os snopa je nepravi pravac bez beskonačno dalekih točaka).

Pramen ravnina, kome je os tangenta apsolute, određuje u hiperboličkom prostoru ravnine, koje čine snop ravnina 3. vrste (os snopa je nepravi pravac s jednom beskonačnom točkom).

Sijeku li se tri hiperboličke ravnine, a dvije se presječnice tih ravnina sijeku, onda i treća presječnica prolazi tim presjecištem.

Sijeku li se tri hiperboličke ravnine, a dvije se presječnice tih ravnina ne sijeku, onda ni treća presječnica ne siječe prve dvije (te presječnice pripadaju snopu 2. vrste).

Sijeku li se tri hiperboličke ravnine, a dvije su presječnice tih ravnina paralelne prema istoj strani, onda je i treća presječnica s njima paralelna prema istoj strani (te presječnice pripadaju snopu pravaca 3. vrste).

Dvije ravnine iz pramena 2. vrste zovu se u hiperboličkom prostoru mimoilazne ravnine.

Okomiti pravci

Ako pravci p i q leže u ravnini Δ (k), a konjugirane su polare konike k, onda su pravci p i q među sobom okomiti (isporedi I. dio, točke 38.—49.).

9. Zadatak. — *Odredi sve pravce hiperboličkog prostora, koji su okomiti na pravac* $p = N_1 N_2$.

Rješenje: Promatrajmo pramen ravnina 1. vrste sa nosiocem $p = N_1N_2$. U svakoj ravnini tog pramena, sve okomice pravca p određuju pramen 2. vrste, pravac p je njihova zajednička okomica. U svakoj od tih ravnina pol pravog pravca p s obzirom na apsolutu u toj ravnini leži na konjugiranoj polari p' pravog pravca p s obzirom na apsolutu. Iz toga slijedi, da su sve okomice pravca p određene pravim pravcima, koji sijeku pravi pravac p i pripadnu konjugiranu polaru p', t. j. određene su pravim pravcima, koji pripadaju hiperboličkoj kongruenciji određenoj pravcima p i p'.

10. Zadatak. — *U ravnini $\Gamma(k)$ leže pravci p i q, koji se sijeku. Odredi njihovu zajedničku okomicu.*

Rješenje: Označimo sa G pol ravnine $\Gamma(k)$ s obzirom na apsolutu, a sa A točku $p \times q$. U ravnini $(G+p)$ pol pravca p s obzirom na koniku k je točka G, zato sve okomice pravca p u ravnini $(G+p)$ čine pramen pravaca 2. vrste sa zajedničkom nepravom točkom G. S istih razloga sve okomice pravca q u ravnini $(G+q)$ čine pramen 2. vrste sa zajedničkom nepravom točkom G. Iz toga slijedi, da spojnica točaka A i G, pravi pravac $g \equiv AG$, određuje zajedničku okomicu pravaca p i q u njihovom presjecištu A.

11. Posljedak. — Ako povučemo u ravnini Γ po volji pravac r kroz točku A, onda možemo dokazati na isti način kao gore, da je pravac g okomit i na pravcu r. Iz toga slijedi poučak:

Ako pravac g siječe ravninu Γ u točki A, a okomit je na dva pravca p i q iz te ravnine, koji prolaze točkom A, onda je pravac g okomit na svakom pravcu r ravnine Γ, koji prolazi točkom B.

Definicija: Okomica ravnine Γ u njenoj točki A je onaj pravac g, koji je okomit na sve pravce u ravnini Γ, koji prolaze točkom A.

12. — Budući da su okomice ravnine Γ određene pravim pravcima, koji prolaze polom G te ravnine s obzirom na apsolutu, slijedi:

a) *Sve okomice jedne ravnine čine snop pravaca 2. vrste,*

b) *Snop pravaca 2. vrste posjeduje ravninu, koja je okomita na sve pravce iz toga snopa.*

Iz toga dalje slijede poučci: a) *Iz jedne točke izvan ravnine, može se na tu ravninu povući samo jedna okomica.*

b) *Dva pravca, koji su okomiti na jednu ravninu, leže uvijek u jednoj ravnini.*

c) *Ako su pravci a i b okomiti na ravninu Γ, onda oni leže u ravnini Δ. Ako je C jedna točka ravnine Δ, a c okomica spuštena iz točke C na ravninu Γ, tada okomica c leži u ravnini Δ.*

13. Zadatak. — *Odredi geometrijsko mjesto svih okomica pravca p, koje sijeku taj pravac u točki A.*

Rješenje: Sve okomice pravca p određene su pravim pravcima, koji sijeku pravac p i konjugiranu polaru p' tog pravca. Tražene okomice prolaze sve točkom A, dakle leže u pravoj ravnini $(A+p')$, t. j. traženo geometrijsko mjesto je ravnina.

Iz toga neposredno slijede poučci:

a) *Sve ravnine, koje su okomite na zadani pravac, čine pramen ravnina 2. vrste.*

b) *Pramen ravnina 2. vrste posjeduje uvijek pravac, koji je okomit na sve ravnine iz tog pramena.*

14. Zadatak. — *Odredi zajedničku okomicu ravnine Γ i pravca p, koji je mimosmjeran s tom ravninom.*

Rješenje: Sve okomice pravca p određene su pravim pravcima, koji sijeku pravac p i konjugiranu polaru p' tog pravca. Sve okomice ravnine Γ određene su pravim pravcima, koji prolaze polom G te ravnine. Zato je tražena okomica određena presjekom ravnina $(G + p)$ i $(G + p')$, t. j. zajedničkom transverzalom pravaca p i p', koja prolazi točkom G.

15. Zadatak. — *Odredi zajedničku okomicu dvaju mimosmjernih pravaca p i q.*

Rješenje: Ako zajednička okomica mimosmjernih pravaca p i q postoji, ona je određena zajedničkom transverzalom pravaca p i q, i njihovih konjugiranih polara p' i q' s obzirom na apsolutu.

Dokazat ćemo sada, da takva transverzala uvijek postoji. Na zadanim pravcima p odnosno q apsoluta definira hiperboličku involuciju konjugiranih točaka s dvostrukim točkama M_1 i M_2, odnosno N_1 i N_2. Projicirajmo te hiperboličke involucije točaka s pravca p', dobit ćemo tako dva konlokalna hiperbolička involutorna pramena ravnina, koji imaju jedan zajednički realni par ravnina, jer se dvostruki elementi tih hiperboličkih konlokalnih involucija ne rastavljaju.

Označimo taj zajednički par ravnina sa Γ i Δ; označimo dalje sa A točku $p \times \Gamma$, sa A' točku $p \times \Delta$, sa B točku $q \times \Gamma$ i napokon sa B' točku $q \times \Delta$. Točke A i A' zatim točke B i B' su konjugirani polovi apsolute, a to znači, da su pravci $r = AB$ i $r' = A'B'$ konjugirane polare apsolute. Zato jedna od njih siječe apsolutu u realnim točkama, neka to bude pravac r.

Sad moramo još dokazati, da je pravac r zajednička transverzala pravaca p, p', q i q'. Ako se dva pravca sijeku, onda se sijeku i njihove konjugirane polare s obzirom na zadanu kvadriku. Sjecište jednog para pravaca je pol ravnine, u kojoj leže njihove konjugirane polare. Pravac r siječe pravce p, p' i q, zato konjugirana polara r' siječe pravce p, p' i q'. No iz toga slijedi, da je pravac r' zajednička transverzala pravaca p, p', q i q', dakle je to i pravac r. Iz toga slijedi poučak:

Dva mimosmjerna pravca u hiperboličkom prostoru imaju uvijek jednu zajedničku okomicu.

Prikloni kut dviju ravnina

16. — Dvije ravnine zatvaraju prostorni kut ili diedar. Diedar mjeri se priklonim kutom njegovih strana (taj se kut definira kao u euklidskoj geometriji).

Poučak: *Veličina priklonog kuta dviju ravnina ne ovisi o izboru vrha tog kuta na presječnici tih ravnina.*

Dokaz: Neka se ravnine Γ i Δ sijeku u pravcu $p = N_1 N_2$. Budući da su krakovi priklonog kuta okomiti na pravac p, oni su određeni pravim pravcima, koji sijeku konjugiranu polaru p' pravca p. Odaberemo li na pravcu p po volji dvije točke A i B, onda su ravnine priklonih kutova kroz te točke određene pravim ravninama $\Sigma = (A + p')$ i $\Sigma' = (B + p')$. Označimo sa C točku $\Gamma \times p'$, sa D točku $\Delta \times p'$, onda su kutovi CAD i CBD dva priklona kuta ravnina Γ i Δ. Treba da dokažemo, da je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$.

Odredimo na pravom pravcu $p = N_1 N_2$ točke P i R prema zahtjevu $(N_1 N_2 PR) = -1$ i $(ABPR) = -1$, a ravninu $(R + p')$ označimo sa Π. Osnovni pomak $(P\Pi)$ prevodi ravninu Σ u ravninu Σ' a kut CAD u kut CBD, dakle je $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ (isporedi točku 5.).

Okomite ravnine

17. — Ako je prikloni kut dviju ravnina Γ i Δ pravi kut, te se ravnine zovu okomite ravnine. No u tome slučaju prava ravnina Γ prolazi polom D prave ravnine Δ, a prava ravnina Δ prolazi polom G ravnine Γ, ili:

Ako su dvije hiperboličke ravnine konjugirane s obzirom na apsolutu, one su okomite ravnine.

Iz toga slijede ovi poučci:

a) *Ako je pravac p okomit na ravninu Γ, onda je svaka ravnina kroz pravac p okomita na ravninu Γ.*

b) *Ako su ravnine Γ i Δ okomite na ravninu Σ, onda je i pravac $\Gamma \times \Delta$ okomit na ravninu Σ.*

c) *Ako je ravnina Γ okomita na pravac p, koji leži u ravnini Δ, onda je ravnina Γ okomita na ravninu Δ.*

18. Zadatak. *Zadan je pramen ravnina 1. vrste sa osi $p = N_1 N_2$. Odredi one ravnine, koje su okomite na sve ravnine iz tog pramena.*

Rješenje. Tražene ravnine bit će određene onim pravim ravninama, u kojima leže svi polovi ravnina iz zadanog pramena. Budući da se ti polovi nalaze na konjugiranoj polari p' pravca p, slijedi, da su tražene ravnine određene s pravim ravninama, koje prolaze pravcem p', dakle tražene ravnine čine pramen ravnina 2. vrste. Tako određena dva pramena međusobom okomitih ravnina zovu se konjugirani prameni ravnina; bilježit ćemo ih sa (p) i (p').

Dvije ravnine iz pramena 1. vrste i dvije ravnine iz konjugiranog pramena 2. vrste, određuju prostornu geometrijsku figuru, koja se zove **priklonobridac**.

Ravnine pramena 2. vrste sijeku ravnine konjugiranog pramena 1. vrste u pravcima 1. vrste. Priklonobridac ima četiri priklonice duž kojih se po dvije ravnine sijeku pod pravim kutom.

Poučak o trima normalama

19. Poučak: *Ako je pravac AB okomit na ravninu trokuta BCD, a pravac BC okomit na pravac CD, onda je i pravac AC okomit na pravac CD.*

Dokaz: Budući da je $AB \perp BCD$, pravac AB prolazi polom P ravnine BCD s obzirom na apsolutu.

Pravac CD leži u ravnini BCD, zato konjugirana polara $C'D'$ pravca CD prolazi polom P, siječe dakle pravac AB. No i pravac BC je okomit na pravac CD, dakle i on siječe pravac $C'D'$, dakle ravnina ABC prolazi pravcem $C'D'$. Iz toga slijedi, da je ravnina ABC okomita na pravac CD, dakle i $AC \perp CD$.

Simetralna ravnina dužine

20. — Prema uvedenoj hiperboličkoj metrici dvije točke A i B na pravcu $p = N_1 N_2$ određuju dvije dužine, dužinu $\overrightarrow{AB}$ i dužinu $\overrightarrow{BA}$ (isporedi I. dio, točku 42.). Zato na pravcu p postoji polovište P dužine $\overrightarrow{AB}$ (prava točka) i polovište R dužine $\overrightarrow{BA}$ (neprava točka). Geometrijsko mjesto svih simetrala dužine $\overrightarrow{AB}$ odnosno dužine $\overrightarrow{BA}$ su okomite ravnine na pravcu p u točkama P odnosno R. To su simetralne ravnine dužina $\overrightarrow{AB}$ odnosno $\overrightarrow{BA}$, a sijeku se u konjugiranoj polari p' pravca p. Iz toga slijedi:

U hiperboličkom prostoru simetralna ravnina polovi dužinu i na nju je okomita. Simetralna ravnina dužine je geometrijsko mjesto svih točaka, koje su jednako udaljene od krajnjih točaka te dužine.

O ortogonalnom projiciranju

Ortogonalna projekcija točke, pravca ili ravnine na pravac ili ravninu definira se na isti način kao u euklidskoj geometriji.

21. O ortogonalnoj projekciji dužine — Neka su točke A i B izvan ravnine Γ, a A' i B' ortogonalne projekcije tih točaka u ravnini Γ. Točke A, A', B' i B određuju ravni četverokut. Povučemo iz točke A okomicu na pravac BB', a nožište označimo sa D, tada ima četverokut $A\,A'\,B'\,D$ tri prava kuta, dakle je

$AD > A'B'$ (isporedi I. dio, točku 108.). U pravokutnom trokutu ADB je $AB > AD$. Prema tome izlazi, da je tim više $AB > A'B'$.

Zadana je dužina uvijek veća od svoje ortogonalne projekcije (na ravninu ili na komplanarni pravac).

Paralelni pravci

22. — Pravci iz snopa 3. vrste paralelni su među sobom prema istoj strani, prema zajedničkoj beskonačnoj točki.

Ako je zadan kut α krakovima a i b i kut β krakovima a_1 i b_1, a krakovi a i a_1 paralelni su prema beskonačnoj točki N_1, a krakovi b i b_1 paralelni prema beskonačnoj točki N_2, ravnine kutova α i β sijeku se u pravcu $p = N_1N_2$.

Iz toga slijedi poučak:

Ako su u hiperboličkom prostoru krakovi kuta α uzajamno paralelni s krakovima kuta β, onda se ravnine tih kutova sijeku.

23. — Sve ravnine pramena 3. vrste imaju jednu zajedničku beskonačnu točku. Iz toga slijedi:

U svakoj ravnini pramena 3. vrste nalazi se pramen pravaca 3. vrste, koji svi pripadaju istom snopu pravaca 3. vrste, t. j. koji su svi usporedni prema istoj beskonačnoj točki.

Budući da se dvije ravnine iz pramena 3. vrste ne sijeku, niti su mimoilazne, one se zovu m e đ u r a v n i n e.

24. — Svakom pramenu ravnina 3. vrste pripada konjugirani pramen ravnina 3. vrste, svaka ravnina jednog od tih pramena okomita je na sve ravnine iz konjugiranog pramena (isporedi točku 18.).

Uzmemo li dvije ravnine iz jednog pramena 3. vrste i dvije ravnine iz konjugiranog pramena 3. vrste, one onda određuju geometrijski lik, koji se zove asimptotski četverobridac, koji ima četiri prava priklona kuta.

25. — Uzmimo ravninu $\Gamma(k)$ i točku A izvan nje. Označimo sa A' ortogonalnu projekciju točke A u ravnini Γ, neka je $AA' = a$. Sve usporednice s ravninom Γ, koje prolaze točkom A, određene su pravim pravcima, koji prolaze točkom A i koji sijeku koniku k. Zato sve usporednice s ravninom Γ, koje prolaze točkom A, određuju stožac sa otvorom pri vrhu $2\alpha = 2\Pi(a)$.

Rotacije

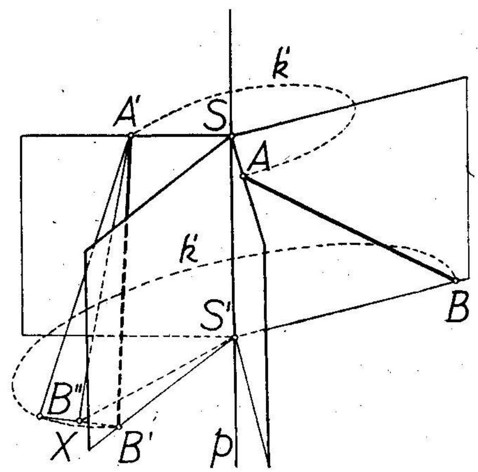
26. — Uzmimo u hiperboličkom prostoru dvije jednake dužine AB i $A'B'$. Označimo sa Σ odnosno sa Σ' simetralnu ravninu dužine AA' odnosno BB'. U međusobnom odnosu pravih ravnina Σ i Σ' mogu nastupiti ova četiri slučaja: ili se prave ravnine Σ i Σ' sijeku u pravom pravcu, ili se one sijeku u nepravom pravcu bez beskonačnih točaka, ili se one sijeku u nepravom pravcu s

jednom beskonačnom točkom, ili padaju zajedno. Radi lakšeg izražavanja pramen $\Sigma \times \Sigma'$ označit ćemo sa *(p)*, a pramen konjungiranih ravnina sa *(p')*.

27. Rotacija 1. vrste. — Ako je $p = \Sigma \times \Sigma'$ pravi pravac, onda je pramen ravnina (p) 1. vrste, a konjugirani pramen ravnina (p') 2. vrste.

Ravnina Σ siječe dužinu AA', u polovištu C, a ujedno je $AA' \perp \Sigma$. Ako iz točke C povučemo okomicu na pravac p, a nožište označimo sa S, onda je S središte kružnice k 1. vrste, koja prolazi točkama A i A'. Budući da je $AA' \perp \Sigma$, ravnina kružnice k okomita je na pravac p, dakle pripada pramenu (p'). Na isti način odredit ćemo na pravcu p središte S' kružnice k' 1. vrste, koja prolazi kroz točke B i B' i koja leži u ravnini okomitoj na pravac p, koja dakle pripada pramenu (p').

Diedar, koji je određen s bridom p i s dvije strane, od kojih jedna prolazi točkom A, a druga točkom B, nazvat ćemo sa $(A\,p\,B)$. Diedar sa bridom p i dvjema stranama, od kojih jedna prolazi točkom A' a druga točkom B', nazvat ćemo sa $(A'\,p\,B')$, (sl. 1).



Sl. 1.

Gibajmo kontinuirano diedar $(A\,p\,B)$ oko pravaca p tako, da točke S i S' ostaju na miru. Kad točka A padne na točku A', dokazat ćemo da će točka B pasti na točku B', t. j. da će diedar $(A\,p\,B)$ poprimiti položaj diedra $(A'\,p\,B')$. To znači, da smo dužinu AB na taj način doveli kontinuiranim gibanjem u položaj $A'B'$, a a pri tome se točka A odnosno točka B gibala po kružnici k odnosno k'.

Uzmimo da točka B ne padne na točku B', kad točka A padne na točku A', nego da bi kod toga točka B došla u položaj B''; trokut $A'B'B''$ bio bi istokračan. Ako spojimo polovište X osnovice $B'B''$ sa točkom A', onda bi bilo $A'X \perp B'B''$. Nadalje bilo bi $S'X \perp B'B''$, jer je $B'B''$ tetiva kružnice k'. Iz toga bi slijedilo, da bi ravnina $A'S'X$ bila okomita na pravac $B'B''$, dakle i na ravninu $S'B'B''$. Točkom S' prolazile bi dvije ravnine $S'SA'$ i $S'B''A'$, koje su okomite na ravninu $S'B'B''$ i zato bi njihova presječnica $S'A'$ bila okomita na ravninu $S'B'B''$. Budući da je i pravac SS' okomit na ravninu $S'B'B''$, izlazilo bi da kroz točku S' prolaze dvije okomice na ravninu $S'B'B''$, a to je nemoguće, dakle mora biti $B' \equiv B''$.

Time smo dokazali, da smo dužinu AB doveli kontinuiranim gibanjem u položaj $A'B'$, a pri tome je svaka točka te dužine opisala kružnicu 1. vrste u ravnini okomitoj na pravac p, sa središtem na pravcu p. Takvo se kontinuirano gibanje zove rotacija 1. vrste, a pravac p os te rotacije.

Kod rotacije 1. vrste sve točke na osi rotacije ostaju na miru, a sve ostale točke mijenjaju svoj položaj.

28. R o t a c i j e 2. v r s t e. — Ako je pravac $p = \Sigma \times \Sigma'$ nepravi pravac bez beskonačnih točaka, onda je pramen ravnina (p) 2. vrste, a njemu konjugirani pramen ravnina (p') 1. vrste.

Ravnina Σ iz pramena (p) siječe dužinu AA' u polovištu C, a pravac p' u točki M; pri tome je $AA' \perp \Sigma$ i $p' \perp \Sigma$. Zato su pravci AA' i p' komplanarni, a CM je njihova zajednička okomica. Iz toga slijedi, da točke A i A' leže na kružnici k 2. vrste, na ekvidistanti pravca p'.

Na isti bismo način dokazali, da točke B i B' leže na kružnici k' 2. vrste, na ekvidistanti pravca p' (sl. 2.).

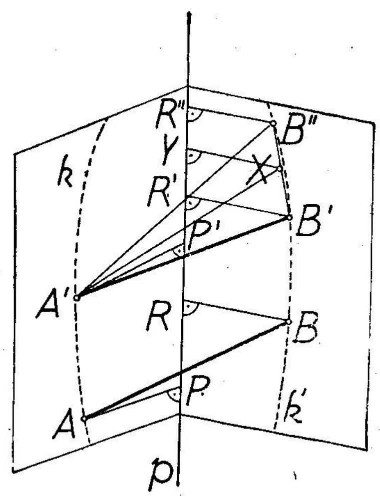
Dobili smo tako diedar sa bridom p', u jednoj strani tog diedra nalaze točke A i A', a u drugoj strani točke B i B'; taj ćemo diedar označiti sa $(A\,p'\,B)$.

Povucimo u točkama A i A' okomice na pravac p', a nožišta označimo sa P i P'. To isto načinimo u točkama B i B' a nožišta povučenih okomica označimo sa R i R'.Tada je $\overline{AP} = \overline{A'P'}$ i $\overline{BR} = \overline{B'R'}$ (sl. 2.). Uočimo vitoperi četverokut $ABPR$ i zamislimo da je krut. Gibajmo taj vitorepi četverokut duž diedra $(A\,p'\,B)$ tako, da se točke P i R gibljü po pravcu p', a dužine AP i BR u stranama tog diedra. Kad kod tog kontinuiranog gibanja točka A padne na točku A', dokazat ćemo, da točka B padne na točku B'.

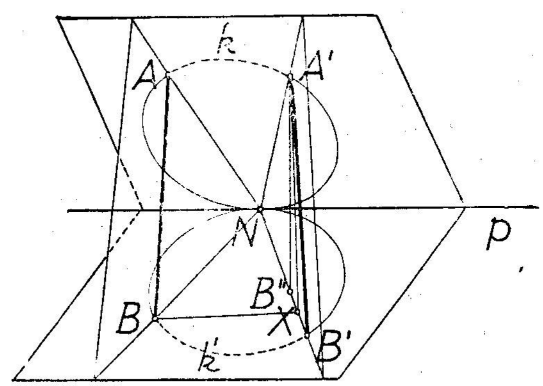
Kad točka A padne na točku A', onda točka P padne na točku P', jer je $AP \perp p'$ i $A'P' \perp p'$, a $\overline{AP} = \overline{A'P'}$. Uzmimo da pri tome točka B ne padne na točku B', nego u točku B''. Tada ni točka R ne bi pala u točku R', nego u točku R'', ali bilo bi opet $B'R' \perp p'$, $B''R'' \perp p'$, a $\overline{B'R'} = \overline{B''R''}$, a trokut $A'B'B''$ istokračan. Ako sa X označimo polovište osnovice $B'B''$, onda bi bilo $A'X \perp B'B''$. Ako sa Y označimo polovište dužine $R'R''$, onda bi bilo $YX \perp B'B''$ (simetrala tetive $B'B''$), a to znači da bi ravnina $A'XY$ bila okomita na pravac $B'B''$. Pravac p' komplanaran je s pravcem $B'B''$, a jer je $XY \perp p'$, izlazilo bi, da je pravac p' okomit na ravninu $A'XY$. No iz toga bi slijedilo, da pored $A'P' \perp p'$ postoji još $A'Y \perp p'$, a to je nemoguće, jer se iz jedne točke izvan pravca može spustiti na pravac samo jedna okomica. Iz toga slijedi, da mora biti $B' \equiv B''$, dakle i $R' \equiv R''$, a $\overline{PR} = \overline{P'R'}$.

Na taj smo način pokazali, da se dužina AB može kontinuiranim gibanjem dovesti u položaj $A'B'$, a da pri tome sve točke dužine AB opisuju kružnice 2. vrste, ekvidistante pravca p'. Takvo kontinuirano gibanje zove se rotacija 2. vrste duž pravca p'. Kod te rotacije ortogonalna projekcija dužine AB na pravac p' uvijek je jednaka.

N a p o m e n a. Ako kod rotacije 2. vrste uzmemo u obzir i neprave točke, onda rotacija 2. vrste predstavlja hiperboličku rotaciju oko nepravog pravca p, koji predstavlja os te rotacije; sve točke na osi ostaju na miru, sve ostale točke mijenjaju svoj položaj. Pravac p' kao cjelina ostaje na miru, ali njegove prave i neprave točke ne ostaju na miru; na miru ostaju samo njegove beskonačne točke.



Sl. 2.



Sl. 3.

29. R o t a c i j a 3. v r s t e. — Ako je pravac $p = \Sigma\,\Sigma'$ nepravi pravac s jednom beskonačnom točkom (tangenta apsolute), onda je pramen ravnina (p) 3. vrste, a isto tako i konjugirani pramen ravnina (p'). Ravnine pramena (p) i ravnine pramena (p') imaju jednu zajedničku beskonačnu točku, označit ćemo je sa N.

Budući da je $AA' \perp \Sigma$, ravnina Σ okomita je na ravninu $AA'N$, zato ravnina $AA'N$ pripada pramenu (p'). S istih razloga i ravnina $BB'N$ pripada pramenu (p'). Iz toga slijedi, da asimptotski četverobridac $AA'BB'N$ ima četiri prava priklona kuta (isporedi točku 32.). Simetrale dužina AA' i BB' prolaze točkom N, dakle se točkama A i A', odnosno B i B' može povući kružnica k odnosno k' 3. vrste sa zajedničkim središtem u točki N (sl. 3.).

Gibajmo kontinuirano dužinu AB, a s njom i ravninu ABN, tako da pri tom gibanju bude ravnina ABN stalno okomita na ravnine $AA'N$ i $BB'N$, i da pri tome točka A opisuje kružnicu k 3. vrste u ravnini $AA'N$.

Kad točka A padne na točku A', uzmimo, da točka B ne padne u točku B', nego da dođe u točku B''. Budući da točkom A' prolazi samo jedna ravnina iz pramena (p'), točka B'' može se nalaziti samo na pravcu $B'N$. Označimo sa X polovište osnovice $B'B''$ istostraničnog trokuta $A'B'B''$, onda je $A'X \perp B'B''$. Budući da je ravnina $A'B'N$ okomita na ravninu $BB'N$, pravac je $A'X$ okomit na ravninu $BB'N$. Iz toga bi slijedilo, da je $BX \perp B'N$ i $B'N \perp A'BX$, dakle točke bi B i A' morale ležati u ravnini okomitoj na pravac $B'N$, a to ne mora biti. Iz toga slijedi $B' \equiv B''$.

Tako smo dokazali, da se dužina AB može kontinuiranim gibanjem dovesti u položaj $A'B'$, a da pri tome sve točke te dužine opisuju kružnice 3. vrste, koje leže u ravninama pramena (p') 3. vrste. Takvo se kontinuirano gibanje zove rotacija 3. vrste. Kod rotacije 3. vrste sve točke hiperboličkog prostora mijenjaju svoj položaj, na miru ostaje samo zajedničko središte svih kružnica te rotacije.

N a p o m e n a. Ako kod rotacije 3. vrste uzmemo u obzir i neprave točke, onda to gibanje predstavlja hiperboličku rotaciju oko pravca p, oko osi te rotacije, koja ostaje na miru.

30. — Ako je $\Sigma \equiv \Sigma'$, onda su dužine AB i $A'B'$ komplanarne i prema tome mogu se rotacijom 1., 2. ili 3. vrste u njihovoj ravnini dovesti do pokrivanja.

Simetrija u hiperboličkom prostoru

U hiperboličkom prostoru razlikujemo tri simetrije, simetriju s obzirom na točku, simetriju s obzirom na ravninu i simetriju s obzirom na pravac.

31. C e n t r a l n a s i m e t r i j a. — Ako je P po volji točka u hiperboličkom prostoru, onda osnovni pomak ($P\Pi$) određuje centralnu simetriju tog prostora.

Točka P raspolavlja sve spojnice pridruženih točaka, a zajednička okomica dvaju pridruženih pravaca prolazi točkom P (isporedi I. dio, točku 55.). Dokazat ćemo, da i zajednička okomica centralno pridruženih ravnina prolazi kroz točku P.

Neka su Σ i Σ' dvije centralno pridružene ravnine. Budući da osnovni pomak ($P\Pi$) prevodi ravninu Σ u ravninu Σ', nepravi pravac $p = \Sigma \times \Sigma'$ leži u nepravoj ravnini Π. Zajednička okomica ravnina Σ i Σ' određena je konjugiranom polarom p' pravca p. Budući da ravnina Π prolazi pravcem p, konjugirana polara p' prolazi točkom P.

U centralnoj simetriji hiperboličkog prostora zajednička okomica dvaju pridruženih pravaca, odnosno zajednička okomica dviju pridruženih ravnina, prolazi centrom simetrije.

32. Simetrija s obzirom na ravninu. — Ako je Π po volji ravnina u hiperboličkom prostoru, onda osnovni pomak ($P\Pi$) određuje simetriju s obzirom na ravninu Π (isporedi I. dio, točku 56.).

33. Osna simetrija. — Ako je u hiperboličkom prostoru zadan pravac p i geometrijski lik A, onda ćemo osno simetrično pridruženi lik A' k liku A odrediti tako, da lik A izvrši rotaciju 1. vrste za kut π oko pravca p.

Rotacione stožaste plohe

U hiperboličkom prostoru razlikujemo tri vrste rotacionih stožastih ploha, i to prema tome da li su te plohe nastale rotacijom 1., 2. ili 3. vrste.

34. Rotaciona stožasta ploha 1. vrste. — Ako je zadan pravac $p = N_1N_2$ kao os rotacije 1. vrste i s tom osi komplanarni pravac q, onda mogu nastupiti tri slučaja:

a) Pravci se p i q sijeku u pravoj točki V. Ako izvodnica q izvrši rotaciju 1. vrste oko pravca p, opisat će ona rotacionu stožastu plohu 1. vrste sa vrhom V.

b) Ako su pravci p i q usporedni, prema beskonačnoj točki V, dobivamo asimptotsku rotacionu stožastu plohu 1. vrste s vrhom V u beskonačnoj točki.

c) Ako se pravci p i q sijeku u nepravoj točki V, dobivamo rotacionu stožastu plohu 1. vrste s vrhom V u nepravoj točki.

U svakom od ova tri slučaja ravnine, koje su okomite na os p, sijeku rotacionu stožastu plohu 1. vrste u kružnicama 1. vrste, a sve izvodnice sa svakom od tih ravnina čine jednake priklone kutove.

Napomena. Projektivno shvaćeno, rotaciona stožasta ploha 1. vrste određena je s običnom stožastom plohom 2. reda, koja prodire apsolutnu duž dviju realnih konika bez zajedničkih realnih točaka.

35. Rotaciona stožasta ploha 2. vrste. — Promatrat ćemo rotaciju 2. vrste duž pravca $p' = N_1N_2$. Ako sa p označimo konjugiranu polaru pravca p', onda je nepravi pravac p os te rotacije (uzevši u obzir i neprave točke). Neka pravac $q = M_1M_2$ siječe pravac p u nepravoj točki V. Izvrši li pravac q rotaciju 2. vrste duž pravca p' (ili oko pravca p kao osi), opisat će rotacionu stožastu plohu 2. vrste sa vrhom u nepravoj točki V.

Sve ravnine kroz pravac p', dakle ravnine pramena (p'), sijeku tu stožastu plohu u kružnicama 2. vrste, a sve izvodnice sa svakom od tih ravnina čine jednake priklone kutove.

N a p o m e n a. Projektivno shvaćeno, rotaciona stožasta ploha 2. vrste određena je s običnom stožastom plohom 2. reda, koja ima s apsolutom u točkama N_1 i N_2 zajedničke tangencijalne ravnine ,dakle se prodorna krivulja tih ploha raspada na dvije realne konike sa dvije različite zajedničke realne točke N_1 i N_2.

36. R o t a c i o n a s t o ž a s t a p l o h a 3. v r s t e. — Promatrajmo rotaciju 3. vrste, koja je određena pramenom ravnina (p) 3. vrste (sa p smo označili zajednički nepravi pravac tih ravnina; pravac p je os te rotacije, ako kod te rotacije uzmemo u obzir i neprave točke). Označimo sa N zajedničku beskonačnu točku tih ravnina.

Neka pravi pravac $q = N_1N_2$ siječe pravac p u nepravoj točki V. Izvrši li pravac q rotaciju 3. vrste oko pravca p, opisat će stožastu rotacionu plohu 3. vrste, sa vrhom u nepravoj točki V.

Sve ravnine iz konjugiranog pramena (p') k pramenu (p) sijeku tu stožastu plohu u kružnicama 3. vrste, a sve izvodnice sa svakom od tih ravnina čine jednake priklone kutove.

N a p o m e n a. Projektivno shvaćeno, rotaciona stožasta ploha 3. vrste određena je običnom stožastom plohom 2. reda, koja ima s apsolutom u točki N dvije tangencijalne ravnine, koje su pale zajedno. Zato se prodorna krivulja tih ploha raspada na dvije realne konike sa dvije realne točke, koje su pale zajedno (sa zajedničkom realnom tangentom).

37. Z a k l j u č a k. — Na temelju tako određenih zajedničkih svojstava rotacionih stožastih ploha 1., 2. i 3. vrste možemo izreći zajedničku definiciju tih ploha:

Svi pravci iz nekog snopa, koji probadaju zadanu ravninu u kružnici 1., 2. ili 3. vrste i čine s dijametrima te kružnice jednake priklone kutove, leže u rotacionoj stožastoj plohi 1., 2. ili 3. vrste.

38. D o d a t a k. — U hiperboličkom prostoru valjkasta ploha kao posebna stožasta ploha ne postoji. Ali ako rotacionu valjkastu plohu u euklidskoj geometriji definiramo kao ekvidistantnu plohu svoje osi, onda toj plohi u hiperboličkom prostoru odgovara ploha, koja se može ovako definirati:

Ako po volji kružnica 2. vrste izvrši rotaciju 1. vrste oko svoje nulosi p, opisat će ekvidistantnu rotacionu plohu pravca p.

39. P r e s j e c i r o t a c i o n e s t o ž a s t e p l o h e. — Ako se prodorna krivulja između stožaste plohe 2. reda (označimo je sa S) i apsolute raspada na dvije realne konike, onda ta stožasta ploha S određuje svojim dijelom unutar apsolute rotacionu stožastu plohu 1., 2. ili 3. vrste.

Presjek prave ravnine $\Delta(k)$ sa stožastom plohom S je konika, označimo je sa m. Dio konike m, koji se nalazi unutar konike k, t. j. unutar apsolute, koja pripada ravnini Δ, određuje hiperboličku krivulju 2. reda ili hiperboličku koniku, (jer ta krivulja može imati s pravcem najviše dvije zajedničke točke).

Iz međusobnih odnosa apsolute k u ravnini Δ i presječne konike m može se izvršiti podjela hiperboličkih konika. Kako je poznato, razlikujemo 11 oblika tih konika: to su kružnice 1., 2. i 3. vrste, elipsa, oskulaciona parabola, eliptička parabola, konkavna hiperbolička parabola, konkavna hiperbola, konveksna hiperbola, semi hiperbola, konveksna hiperbolička parabola.[1]

Kugline plohe

U hiperboličkom prostoru razlikujemo tri vrste kuglinih ploha i to prema tome da li su te kugline plohe nastale rotacijom kružnica 1., 2. ili 3. vrste.

39. K u g l i n a p l o h a 1. v r s t e. — Ako kružnica 1. vrste izvrši rotaciju 1. vrste oko jednog dijametra, ona će opisati rotacionu plohu, koja se zove kuglina ploha 1. vrste. Iz svojstva kružnice 1. vrste (isporedi I. dio, točke 69., 70. i 71.) slijedi, da je kuglina ploha 1. vrste — projektivno shvaćeno — određena kvadrikom, koja ima s apsolutom zajedničku polarnu ravninu s obzirom na središte kugline plohe, i u toj ravnini zajedničku imaginarnu koniku, duž koje ona dodiruje apsolutu.

Iz svojstva kružnice 1. vrste slijede ovi poučci:

a) Svi dijametri kugline plohe 1. vrste određuju snop pravaca 1. vrste.

b) Svaka ravnina, koja prolazi središtem kugline plohe 1. vrste, siječe tu plohu u sukladnim kružnicama 1. vrste. Te se kružnice zovu glavne kružnice, a njihove ravnine — dijametralne ravnine.

c) Svaka dijametralna ravnina kugline plohe 1. vrste ujedno je njena ravnina simetrije.

d) Ravnina, koja ne prolazi središtem kugline plohe 1. vrste, siječe tu plohu u kružnici 1. vrste. Središte te kružnice je nožište okomice spuštene iz središta te plohe na presječnu ravninu.

e) Dvije kugline plohe 1. vrste prodiru se u kružnici 1. vrste. Središte te kružnice nalazi se na spojnici središta tih ploha, a ravnina te kružnice okomita je na tu spojnicu.

f) Tangencijalna ravnina kugline plohe 1. vrste okomita je na dijametar te plohe, koji prolazi diralištem.

Ako pramen svih pravih i nepravih koncentričkih kružnica 1. vrste izvrši rotaciju 1. vrste oko jednog dijametra, opisat će pramen svih pravih i nepravih koncentričkih kuglinih ploha 1. vrste. Projektivno gledano, taj je pramen određen pramenom kvadrika, koje imaju s obzirom na zajedničko središte istu polarnu ravninu s apsolutom i u njoj zajedničku imaginarnu koniku, duž koje sve te kvadrike dodiruju apsolutu.

40. Kuglina ploha 2. vrste. — Ako kružnica 2. vrste izvrši rotaciju 1. vrste oko jednog dijametra, opisat će kuglinu plohu 2. vrste ili hipersferu. Iz svojstava kružnice 2. vrste (isporedi I. dio, točke 75.—80.) mogu se izvesti ovi poučci:

a) Svi dijametri kugline plohe 2. vrste određuju snop pravaca 2. vrste. Vrh tog snopa, zajednička neprava točka tih pravaca zove se središte kugline plohe 2. vrste, jer je svaka točka te plohe jednako udaljena od tog središta, samo je mjerni broj te udaljenosti kompleksan.

b) Ravnina, koja je okomita na sve dijametre kugline plohe 2. vrste, zove se nul-ravnina te plohe. Sve točke kugline plohe 2. vrste jednako su udaljene od njene nul-ravnine, zato se ta ploha još zove ekvidistantna ploha svoje nul-ravnine. Pol nul-ravnine s obzirom na apsolutu je središte te kugline plohe.

c) Dijametralne ravnine kugline plohe 2. vrste okomite su na njenu nul-ravninu, a sijeku je u sukladnim kružnicama 2. vrste, u glavnim kružnicama te plohe.

d) Svaka je dijametralna ravnina kugline plohe 2. vrste ujedno njena ravnina simetrije.

e) Svaka ravnina, koja je mimoilazna sa nul-ravninom kugline plohe 2. vrste, siječe tu plohu u kružnici 1. vrste. Središte te kružnice je probod presječne ravnine s dijametrom, koji je na nju okomit.

Svaka ravnina, koja siječe nul-ravninu kugline plohe 2. vrste, siječe tu plohu u kružnici 2. vrste.

Svaka ravnina, koja s nul-ravninom kugline plohe 2. vrste određuje par međuravnina, siječe tu plohu u kružnici 3. vrste.

41. — Napomena. Ako kružnica 2. vrste izvrši rotaciju 2. vrste duž jednog pravca, koji je okomit na ravninu te kružnice i siječe njenu nul-os, opisat će kuglinu plohu 2. vrste.

Ako pramen svih pravih i nepravih koncentričkih kružnica 2. vrste izvrši rotaciju 1. vrste oko jednog zajedničkog dijametra, opisat će pramen svih pravih i nepravih koncentričkih kuglinih ploha 2. vrste.

Projektivno gledano, taj je pramen određen pramenom kvadrika, koje imaju s apsolutom jednu zajedničku realnu koniku, duž koje dodiruju apsolutu.

42. — Iz međusobnih odnosa kvadrika, koje u ovoj interpretaciji određuju kugline plohe 1. i 2. vrste, mogu se lako dokazati slijedeći poučci:

Dvije kugline plohe 2. vrste, kojima se nul-ravnine sijeku, prodiru se duž dviju kružnica 2. vrste sa zajedničkom nul-osi.

Dvije kugline plohe 2. vrste, kojima se nul-ravnine ne sijeku, niti su međuravnine, prodiru se u najopćenitijem položaju duž dviju kružnica 1. vrste, a središta tih kružnica leže na zajedničkom dijametralnom pravcu tih ploha, a njihove su ravnine okomite na nj.

Dvije kugline plohe 2. vrste, kojima su nul-ravnine međuravnine, prodiru se duž dviju koncentričnih kružnica 3. vrste sa središtem u zajedničkoj beskonačnoj točki međuravnina.

Kuglina ploha 1. vrste prodire u najopćenitijem položaju kuglinu plohu 2. vrste duž dviju kružnica 1. vrste. Središta tih kružnica nalaze se na zajedničkom dijametralnom pravcu tih ploha, a ravnine tih kružnica okomite su nanj.

43. Kuglina ploha 3. vrste. — Ako kružnica 3. vrste izvrši rotaciju 1. vrste oko jednog dijametra, ona će opisati kuglinu plohu 3. vrste. Ta se ploha zove još granična kuglina ploha ili horisfera.

Iz svojstava kružnice 3. vrste (isporedi I. dio, točke 81., 82. i 83.) slijede ovi poučci:

a) Svi dijametri kugline plohe 3. vrste određuju snop pravaca 3. vrste.

b) Dijametralne ravnine sijeku kuglinu plohu 3. vrste u sukladnim kružnicama 3. vrste, u glavnim kružnicama te plohe.

c) Ravnina, koja nije usporedna s dijametrima kugline plohe 3. vrste, siječe tu plohu u kružnici 1. vrste. Središte te kružnice je probod presječne ravnine s dijametrom, koji je na nju okomit.

d) Tangencijalna ravnina kugline plohe 3. vrste okomita je na dijametar te plohe, koji prolazi diralištem.

Ako pramen svih pravih i nepravih koncentričkih kružnica 3. vrste izvrši rotaciju 1. vrste oko jednog zajedničkog dijametra, opisat će pramen svih pravih i nepravih koncentričnih kuglinih ploha 3. vrste.

Projektivno gledano, taj je pramen određen pramenom kvadrika, koje imaju s apsolutom u jednoj točki zajedničku tangencijalnu ravninu i u diralištu 8 zajedničkih zajedno palih točaka.

44. — Iz međusobnih odnosa kvadrika, koje u ovoj interpretaciji određuju kugline plohe 1., 2. i 3. vrste, mogu se lako dokazati slijedeći poučci:

Dvije kugline plohe 3. vrste prodiru se duž jedne kružnice 1. vrste. Središte te kružnice leži na zajedničkom dijametralnom pravcu tih ploha, a ravnina te kružnice okomita je na taj zajednički dijametralni pravac.

Kuglina ploha 1. vrste prodire kuglinu plohu 3. vrste duž jedne kružnice 1. vrste. Središte te kružnice leži na zajedničkom dijametralnom pravcu tih kuglinih ploha, a ravnina te kružnice okomita je nanj.

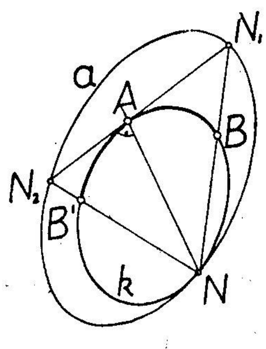
Ako kuglina ploha 3. vrste i kuglina ploha 2. vrste imaju jednu zajedničku beskonačnu točku, one se prodiru duž dviju koncentričnih kružnica 3. vrste, a njihove ravnine određuju sa nul-ravninom kugline plohe 2. vrste međuravnine.

Ako nul-ravnina plohe 2. vrste ne prolazi središtem kugline plohe 3. vrste, onda se u najopćenitijem položaju te plohe prodiru duž dviju kružnica 1. vrste. Ravnine tih kružnica okomite su na zajednički dijametralni pravac tih ploha, a središta tih kružnica leže na tom pravcu.

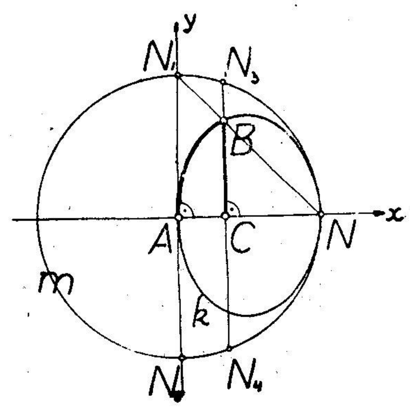
Sukladnost svih kružnica 3. vrste

45. — Dokazat ćemo ovaj poučak: *U hiperboličkom su prostoru sve kružnice 3. vrste među sobom sukladne.*

Dokaz: Neka se kružnica k 3. vrste nalazi u ravnini Γ, a kružnica m 3. vrste u ravnini Δ. Prema točki 5. možemo odrediti osnovni pomak ($P\Pi$), koji prevodi ravninu Γ u ravninu Δ, a kružnicu k iz ravnine Γ u kružnicu k' u ravnini Δ, kod toga je $k \cong k'$. U I. dijelu, točki 83. dokazali smo, da su sve kružnice 3. vrste u jednoj ravnini među sobom sukladne, dakle je $k' \cong m$. Prema tome slijedi, da je $k \cong m$.



Sl. 4.



Sl. 5.

Apsolutna konstanta hiperboličkog prostora

46. — Neka je k po volji kružnica 3. vrste sa središtem u točki N. Odaberimo na toj kružnici k po volji točku A, pa povucimo njen dijametar AN i tangentu $t \equiv N_1N_2$ u točki A. Povucimo zatim oba dijametra kružnice k, koji su usporedni s tangentom t, neka su to dijametri $d = NN_1$ i $d' = NN_2$. Označimo sa $B = d \times k$, a sa $B' = d' \times k$ (sl. 4.).

Dobili smo tako dva pravokutna dvostrukoasimptotska trokuta ANN_1 i ANN_2, kao i dva luka AB i AB' na kružnici k 3. vrste.

Budući da su svi dvostrukoasimptotski pravokutni trokuti sukladni, a kružnica k 3. vrste simetrična s obzirom na svaki svoj dijametar, slijedi, da je luk AB jednak luku AB' i da duljina tih lukova ne ovisi o izboru točke A. Zato se može izreći ova definicija:

Ako se u bilo kojoj točki A kružnice 3. vrste povuče tangenta i jedan od dijametara te kružnice, koji je usporedan s povučenom tangentom, a presjek tog dijametra s tom kružnicom obilježimo sa B, onda se duljina luka AB na toj kružnici zove apsolutna konstanta prostora. [2]

Veza između apsolutne konstante i apsolutne jedinice mjere

47. — Dokazat ćemo na kraju, da je apsolutna konstanta hiperboličkog prostora jednaka apsolutnoj jedinici mjere uvedene hiperboličke metrike.

Ako dužina RS na pravcu $p = N_1N_2$ određuje apsolutnu jedinicu mjere, onda je $(N_2N_1RS) = e^2$ (isporedi I. dio, točku 23.).

Da bi dokaz bio što pregledniji i kraći, mi ćemo apsolutu, koja je određena elipsoidom, presjeći ravninom Γ u kružnici m. To je uvijek moguće, jer na svakom elipsoidu postoje bar dva sistema kružnih presjeka.

Kružnica m određuje apsolutu u ravnini Γ. Mi ćemo kružnicu m fiksirati u ravnini Γ pomoću pravokutnog koordinatnog sistema jednadžbom $x^2 + y^2 = 1$.

Projektivno gledano, kružnica k 3. vrste u ravnini Γ je elipsa k, koja ima s apsolutom m dodir 4. reda, t. j. kružnica m hiperoskulira elipsu k. Kružnica može hiperoskulirati elipsu samo u jednom od njena četiri tjemena. Mi ćemo uzeti u obzir elipsu k, koja prolazi točkom A (0,0), a koju kružnica m hiperoskulira u točki N_1 (1,0) (sl. 5.). Ako označimo sa a i b poluosi elipse k, njena jednadžba glasi

$$\frac{(x-a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \left(a = \frac{1}{2}\right).$$

Polumjer hiperoskulacije elipse k u tjemenu $N(1,0)$ glasi $r = \frac{b^2}{a} = 1$, a otuda $b^2 = \frac{1}{2}$. Zato jednadžba elipse k (t. j. kružnice 3. vrste) glasi $2x^2 + y^2 = 2x$, a jednadžba njene tangente $2xx_0 + yy_0 = x + x_0$. Jednadžba tangente u točki A glasi $x = 0$.

Jednadžba pravca N_1N glasi $y = -x + 1$. Taj pravac siječe elipsu k u točki B sa koordinatama $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Pravac $x = \frac{1}{3}$ siječe apsolutu u točkama $N_3\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ i $N_4\left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$, a dijametar AN u točki $C\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, (isporedi sliku 5.).

Ako uzmemo za jedinicu mjere apsolutnu konstantu hiperboličkog prostora, t. j. duljinu luka AB na kružnici k 3. vrste, onda mjerni broj v udaljenosti točke B od dijametra AN t. j. mjerni broj dužine BC zadovoljava relaciju $sh\ v = 1$, odnosno $v = arsh\ 1$. Tu relaciju dokazao je Liebmann. [3]

Mi ćemo sada odrediti mjerni broj v' udaljenosti točke B od dijametra AN, t. j. mjerni broj dužine BC (sl. 5.). Prema uvedenoj hiperboličkoj metrici bit će $v' = \frac{1}{2}\ ln\ (N_4N_3BB') = \frac{1}{2}\ ln\ \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} =$

$$= \frac{1}{2}\ ln\ \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = ln\ (1+\sqrt{2}) = arsh\ 1\ .$$

Iz toga slijedi, da je mjerni broj dužine BC jednak, mjerimo li tu dužinu apsolutnom konstantom hiperboličkog prostora ili apsolutnom jedinicom mjere uvedene hiperboličke metrike. To nam kaže, da su te dvije jedinice mjere jednake, t. j. da je duljina luka AB jednaka duljini dužine RS.

(Primljeno 24. IX. 1951.)

Literatura:

[1] Klein: Vorlesungen über nichteuklidische Geometrie, Berlin, 1928., str. 229.;

[2] Lobačevski: Geometričeskije isledovanija po teoriji paralelnih liniji, Moskva 1945.;

[3] Liebmann: Nichteuklidische Geometrie, II. izdanje, 1923., str. 90.

ÉTUDE SUR LES CONSTRUCTIONS ET LES THÉORÈMES FONDAMENTAUX DE LA GÉOMÉTRIE D'ESPACE DE LOBATCHEVSKY PAR LES MÉTHODES DE LA GÉOMÈTRIE PROJECTIVE

Lav Rajčić, Zagreb

C'est la continuation du travail: Étude sur des constructions fondamentales planimétriques de la géométrie de Lobatchevsky par les méthodes de la géométrie projective, publié dans ce Periodicum, T. 5., N° 2—3, 1950, page 57—120.

Les considérations ici présentées n'ont pas un caractère axiomatique. Notre but est, avant tout, d'obtenir les théorèmes fondamentaux de la géométrie d'espace de L. à l'aide des propriétés connues de la polarité des quadriques.

Le point de départ est le système polaire absolu donné par une quadrique réelle nommée absolue. Dans notre cas, c'est un ellipsoide.

Chaque pôle P et le plan polaire correspondant Π sont considérés par rapport à l'absolue comme le centre et le plan de la collinéation centrale involutoire, laquelle sera désignée par $(P\Pi)$.

Chaque collinéation centrale involutoire $(P\Pi)$ définit dans l'espace une certaine modification des figures géométriques; cette modification sera définie comme déplacement fondamental dans l'espace. Le déplacement dans l'espace produit par deux ou plusieurs déplacements successifs sera appelé déplacement général et nommé $O = \Sigma(P\Pi)$. Les déplacements généraux $O = \Sigma(P\Pi)$ forment le groupe de déplacements projectifs (N° 1—5).

La congruence des figures géométriques dans l'espace est définie de façon suivante: si la figure B ressort de la figure A par n'importe quel déplacement appartenant au groupe $O = \Sigma(P\Pi)$, les figures A et B sont congruentes l'une par rapport à l'autre (N° 6).

Nous introduisons dans l'espace la (même) métrique introduite par nous dans le plan du travail précédent. La géométrie d'espace déterminée par la métrique ci-introduite, s'appelle géométrie hyperbolique.

Nous n'étudions que la géométrie hyperbolique à l'intérieur de l'absolue. C'est l'interprétation projective de la géométrie d'espace de L.

Dans le N° 8 nous considérons les relations entre les points, les droites et les plans. On parle des gerbes de droites de 1re, 2e et 3e espèce. De même sont traitées les propriétés des trois plans qui se coupent. On montre que leurs trois intersections appartiennent à une gerbe de 1re, 2e ou 3e espèce.

Dans les Nos 9—15 on démontre les théorèmes suivants: a) Toutes les perpendiculaires d'une droite donnée appartiennent à une congruence linéaire hyperbolique qui est définie par la droite

donnée et sa polaire conjuguée par rapport a l'absolue; b) Lorsqu'une droite est perpendiculaire à deux droites passant par son pied dans un plan, elle est perpendiculaire à toute autre droite passant par son pied dans le plan; c) Les droites perpendiculaires d'un plan donné appartiennent à une gerbe de 2e espèce; d) Les plans perpendiculairs à une droite donnée appartiennent à un faisceau de plans de 2e espèce; e) Deux droites non situées dans le même plan ont toujours une perpendiculaire commune.

Dans le N° 16 on montre que l'angle dièdre est mesuré comme dans la géométrie euclidienne.

Dans les Nos 17—21 on démontre les théorèmes suivants: a) Deux plans perpendiculairs sont déterminés par une paire de plans polaires conjugués par rapport a l'absolue; b) Si une droite est perpendiculaire à un plan, tout plan mené par la droite donnée est perpendiculaire au plan donné; c) Etant donnés deux plans perpendiculaires à un plan, l'intersection de ces deux plans est perpendiculaire au plan donné; d) Si un plan Γ est perpendiculaire à une droite p qui est située dans le plan Δ, les plans Γ et Δ sont perpendiculaires; e) Théorème de trois perpendiculaires; f) Le lieu géométrique de points dans l'espace à égale distance des deux points donnés est le plan perpendiculaire à la droite qui joint ces deux points mené par le milieu de cette portion de droite.

Dans le N° 22 on mentionne les droites parallèles et les faisceaux de plans conjugués de 3e espèce.

Dans les Nos 26—30 sont étudiées les rotations de 1re, 2e et 3e espèce dans l'espace (figure 1, 2 et 3).

Dans les Nos 31—32 on traite les trois symétries dans l'espace et on démontre le théorème suivant: Dans la symétrie centrique la perpendiculaire commune de deux droites correspondantes, ou de deux plans correspondants, passe par le centre de la symétrie.

Dans les Nos 34—38 on traite les surfaces coniques de rotation de 1re,2e et 3e espèce.

Dans les Nos 39—44 on traite les surfaces sphériques de 1re, 2e et 3e espèce et les lignes d'intersection entre deux surfaces.

Finalement dans les Nos 45—47 on démontre: L'unité absolue de mesure de la métrique hyperbolique ici introduite est égale a la longueur absolue de l'espace de Lobatchevsky (figure 4 et 5).