Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 5 — 1950. — No. 2—3

Zagreb 1950

Izdaje Društvo matematičara i fizičara N. R. Hrvatske

Editio Societatis mathematicorum et physicorum Croatiae

OBRADA OSNOVNIH PLANIMETRIJSKIH KONSTRUKCIJA GEOMETRIJE LOBAČEVSKOG SINTETIČNIM SREDSTVIMA

Lav Rajčić, Zagreb

Uvod

U ovom članku dan je kratki prikaz osnovnih planimetrijskih konstrukcija geometrije Lobačevskog u projektivnoj ravnini pomoću poznatih svojstava polariteta konika.

Napomenuti ćemo neka poznata svojstva eliptične involucije, kao i neka svojstva centralne kolineacije, s kojima ćemo se služiti u daljnjem radu.

1. — Neka su A i A' po volji par pridruženih točaka eliptične involucije $x \cdot x' = -1$ na pravcu p, s apscisama x i $x' = -\frac{1}{x}$. Treba odrediti vrijednost dvoomjera $(I_1 I_2 A A')$, gdje su I_1 i I_2 dvostruke imaginarne točke te involucije s apscisama $+i$ i $-i$. Biti će prema tome

$$(I_1 I_2 A A') = \left(+i,\ -i,\ x,\ -\frac{1}{x}\right) = -1 .$$

U eliptičnoj involuciji imaginarne dvostruke točke dijele svaki par involutorno pridruženih točaka u harmonijskom omjeru.

2. — Neka je na pravcu p zadana eliptična involucija $x \cdot x' = -1$ i dvije po volji odabrane realne točke M i N s apscisama m i n. Pita se za vrijednost dvoomjera $(I_1 I_2 M N)$? Biti će

$$(I_1 I_2 M N) = (+i,\ -i,\ m,\ n) = \frac{(mn+1)^2 - (m-n)^2}{(m^2-1)\,(n^2-1)} +$$
$$+ 2\,i\,\frac{(mn+1)\,(m-n)}{(m^2-1)\,(n^2-1)} = r + i s .$$

Kako je $r^2 + s^2 = 1$, možemo pisati da je $(I_1 I_2 M N) = e^{i\,(\alpha + 2k\pi)}$, gdje je α realan broj, po apsolutnoj vrijednosti manji od π, a $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Imaginarne dvostruke točke I_1 i I_2 eliptične involucije involutorno pridruženih parova točaka na pravcu p određuju sa bilo koje druge dvije realne točke M i N tog pravca dvoomjer $(I_1 I_2 M N) = r + is$, gdje realni brojevi r i s zadovoljavaju jednadžbu $r^2 + s^2 = 1$.

3. — Dualno tome možemo reći:

a) U eliptičnoj involuciji pramena involutorno pridruženih parova pravaca određuju dvostruki imaginarni pravci d_1 i d_2 te involucije sa svakim parom involutorno pridruženih pravaca a i a' dvoomjer $(d_1\, d_2\, a\, a') = -1$.

b) U eliptičnoj involuciji pramena involutorno pridruženih parova pravaca određuju imaginarni dvostruki pravci d_1 i d_2 s po volji dva realna pravca e i f iz tog pramena dvoomjer $(d_1\, d_2\, e\, f) = e^{-i(\alpha+2k\pi)}$, gdje je α realan broj, $|\alpha| < \pi$, a $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

4. — Parovi okomitih dijametara svake kružnice određuju eliptičnu involuciju konjugiranih polara. Zato se parovi eliptične involucije konjugiranih polara u središtima svih kružnica u ravnini mogu tako spariti, da budu među sobom paralelni. Iz toga slijedi, da sve kružnice određuju na beskonačno-dalekom pravcu istu eliptičnu involuciju parova konjugiranih polova. Imaginarne dvostruke točke te involucije zajedničke su svima kružnicama u ravnini; kroz te točke na beskonačno-dalekom pravcu prolaze sve kružnice. Te se točke zovu apsolutne kružne točke.

Spojnice središta svake kružnice sa apsolutnim kružnim točkama određuju njene imaginarne tangente u apsolutnim kružnim točkama. To su minimalni ili izotropni pravci.

5. — Centralna kolineacija je potpuno određena, ako su poznati centar P i os kolineacije p, zatim točka A i toj točki pridružena točka A'. Po volji zadanoj točki X neka je pridružena točka X'. Označimo sa $R_A = PA \times p$, a sa $R_X = PX \times p$, tada je $(P\, R_A\, A\, A') = (P\, R_X\, X\, X') = c$, jer su ti dvoomjeri u perspektivnom položaju prema točki $S = XA \times p$. Budući da je točka X po volji odabrana, veličina c je neovisna od položaja točke X, veličina c predstavlja dakle konstantu, koja se zove konstanta centralne kolineacije.

Ako je $c = -1$, t. j. $(P\, R_X\, X\, X') = -1$, tada je i $(P\, R_X\, X'\, X) = -1$, a to znači: ako je točki X pridružena točka X', onda je točki X' pridružena točka X. U takovoj su centralnoj kolineaciji svi parovi točaka involutorno pridruženi, zato se ta centralna kolineacija zove centralna involutorna kolineacija.

6. — Neka je zadana realna konika k, pol P i pripadna polara p. Povucimo polom P po volji sekantu s konike k, a sjecišta označimo sa N i N'. Time je u ravnini konike k jednoznačno određena involutorna kolineacija sa centrom u točki P, sa polarom p kao osi i involutorno pridruženim točkama N i N'. Iz definicije polare slijedi, označimo li sa $R_N = PN \times p$, da je $(P\, R_N\, N\, N') = -1$; a to dokazuje ispravnost gornje tvrdnje. Iz toga dalje slijedi, da tako određena centralna involutorna kolineacija ostavlja koniku k kao cjelinu na miru, tek zamjenjuje njene točke N i N' na sekantama, koje prolaze centrom kolineacije.

Uvođenje metrike u projektivnu geometriju

Apsolutni polarni sistem

7. — Odredimo u projektivnoj ravnini po volji realnu koniku k. S obzirom na tu koniku k svakoj točki-polu pridružen je jednoznačno pravac-polara i obrnuto, svakom pravcu-polari pridružena je jednoznačno točka-pol. Time je u ravnini konike k određena korelacija, koja se zove apsolutni polarni sistem. Konika, koja definira apsolutni polarni sistem, zove se apsolutna konika ili apsoluta.

Osnovni pomak

8. — Svaki pol P i pripadna polara p s obzirom na apsolutu k možemo shvatiti kao centar i os centralne involutorne kolineacije, koja prevodi apsolutu k u sebe; njene točke N i N', koje leže na pravcima kroz centar kolineacije, zamjenjuju svoja mjesta (gledaj točku 6.). Pri tome je svejedno da li polara p siječe ili ne siječe apsolutu k. Tako određenu centralnu involutornu kolineaciju sa polom P i polarom p bilježit ćemo sa (Pp).

Centralna involutorna kolineacija (Pp) prevodi točke u točke, pravce u pravce, geometrijske likove u geometrijske likove, a pri tome dvoomjer četiriju elemenata (točaka ili pravaca) ostavlja invarijantan. Centralna involutorna kolineacija (Pp) definira dakle u projektivnoj ravnini neku promjenu geometrijskih likova, koju ćemo promjenu definirati kao osnovni pomak u projektivnoj ravnini. Centralna involutorna kolineacija (Pp), koja je proizvela tu promjenu, taj osnovni pomak, zove se osnovni pomak (Pp). Kod promatranja tih pomaka uzimamo u obzir samo početni i konačni položaj geometrijskog lika.

Apsolutni polarni sistem određuje u projektivnoj ravnini ∞^2 osnovnih pomaka (Pp).

9. — Radi lakšeg izražavanja, uvodimo slijedeće oznake za pravac: Ako pravac a siječe apsolutu u točkama N_1 i N_2, pisat ćemo $a = N_1N_2$. Ako je pravac a orijentiran, tad uzimamo da orijentirana dužina $\overrightarrow{N_1N_2}$ određuje orijentaciju pravca a, i pišemo $a = \overrightarrow{N_1N_2}$.

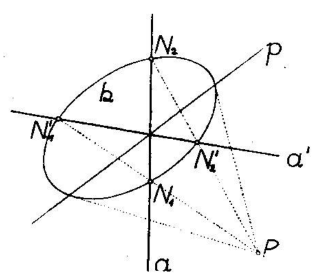
10. — Zadatak. *Konstruiraj orijentirani pravac* $a = \overrightarrow{N_1'N_2'}$ *koji dobivamo iz orijentiranog pravca* $a = \overrightarrow{N_1N_2}$ *uz zadani osnovni pomak* (Pp).

Rješenje: Zadana točka P i pripadna polara p određuje obzirom na apsolutu k osnovni pomak (Pp). Spojnica PN_1 siječe apsolutu k u točki N_1', a spojnica PN_2 u točki N_2' (sl. 1.), jer točke na apsoluti uz (Pp) zamjenjuju mjesta. Spojnica točaka N_1' i N_2' određuje traženi pravac $a' = \overrightarrow{N_1'N_2'}$.

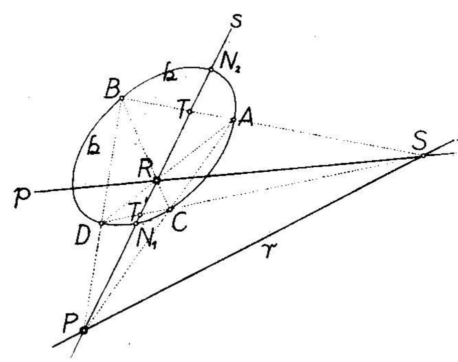
Napomena. Budući da uz (Pp) svaka točka na apsoluti prelazi u drugu točku na apsoluti, zaključujemo: Uz osnovni pomak (Pp) sekanta apsolute prelazi u sekantu, tangenta apsolute u tangentu; pravac koji ne siječe apsolutu prelazi u pravac koji ne siječe apsolutu.

11. — Zadatak. *Odredi osnovni pomak* (Pp) *koji prevodi točku* T *u točku* T'.

Rješenje: Označimo spojnicu TT' sa $s = N_1 N_2$, a njen pol sa S (sl. 2.). Ako tražena polara p siječe spojnicu s u točki R, bit će $(P R N_1 N_2) = -1$, $(P R T T') = -1$. Iz toga zaključujemo, da su točke P i R dvostruke točke hiperbolične involucije, koja je određena s dva para involutorno pridruženih točaka N_1 i N_2, te T i T'. Točke P i R možemo odrediti na slijedeći način: Označimo



Sl. 1



Sl. 2

presjecišta spojnice ST sa apsolutom sa A i B, a presjecišta na spojnici ST', sa C i D. Tada je $R = AD \times BC$, $P = AC \times BD$, spojnica je točaka R i S polara p, a spojnica je točaka P i S polara r točke R. Budući da su točke P i R ravnopravne, osnovni pomak (Pp) i osnovni pomak (Rr) prevode točku T u točku T'. Ispravnost tog postupka slijedi iz poznate konstrukcije polare.

Napomena. Ako se točke T i T' nalaze na apsoluti, osnovni pomak (Pp), koji prevodi T u T' ne može se jednoznačno odrediti. Ima po volji mnogo tih pomaka, koji prevode T u T'; dovoljno je da se pol P odabere gdjegod na spojnici TT'.

12. — Poučak: *Osnovni pomak* (Pp), *koji prevodi pravac* $a = N_1 N_2$ *u pravac* $a' = N_1' N_2'$, *prevodi pol* A *pravca* a *u pol* A' *pravca* a'.

Dokaz: Uz (Pp) tangente n_1 i n_2 u točkama N_1 i N_2 apsolute prelaze u tangente n_1' i n_2' u točkama N_1' i N_2'; zato $A = n_1 \times n_2$ prelazi u $A' = n_1' \times n_2'$.

Vrijedi obrat: Osnovni pomak (Pp), koji prevodi pol A pravca a u pol A' pravca a', prevodi i pravac a u pravac a'.

13. — Zadatak. *Odredi osnovni pomak* (Pp), *koji prevodi orijentirani pravac* $a = \overrightarrow{N_1N_2}$ *u orijentirani pravac* $a' = \overrightarrow{N_1'N_2'}$.

Rješenje: Uz traženi pomak preći će točka N_1 u točku N_1', a točka N_2 u točku N_2'. Zato je pol $P = N_1N_1' \times N_2N_2'$, a polara p je spojnica točaka $a \times a'$ i $N_1N_2' \times N_1'N_2$.

Napomena. Ako zadani pravci a i a' ne sijeku apsolutu k, traženi osnovni pomak je određen polovima A i A' pravaca a i a', a može se odrediti prema točki 11.

Ako treba tangentu n prevesti u tangentu n' apsolute k, osnovni pomak (Pp) nije jednoznačno određen. Pol P može biti kojagod točka na spojnici dirališta tangenata n *i* n'.

14. — Pitanje: *Zadan je orijentirani pravac* $a = \overrightarrow{M_1M_2}$ *i točka* T_1 *na njemu, zatim orijentirani pravac* $b = \overrightarrow{N_1N_2}$ *i točka* T_2 *na njemu, ali tako da su točke* T_1 *i* T_2 *unutar apsolute* k. *S koliko se osnovnih pomaka može prevesti orijentirani pravac* a *u orijentirani pravac* b, *a da pri tome točka* T_1 *pređe u točku* T_2?

Odgovor: Najprije ćemo odrediti osnovni pomak (P_1p_1) koji prevodi točku T_1 u točku T_2 (točka 11.). Taj pomak prevodi pravac $a = \overrightarrow{M_1M_2}$ u pravac $a' = \overrightarrow{M_1'M_2'}$. Zatim ćemo odrediti osnovni pomak (P_2p_2), koji prevodi pravac $a' = \overrightarrow{M_1'M_2'}$ u pravac $b = \overrightarrow{N_1N_2}$. *Da riješimo postavljenu zadaću, dovoljno je upotrebiti dva osnovna pomaka.*

Grupa općih pomaka

15. — Pomak u projektivnoj ravnini, koji predstavlja rezultat dvaju ili više uzastopce izvršenih osnovnih pomaka, zove se opći pomak.

Ako sa O obilježimo opći pomak, možemo pisati, da je $O = (P_1p_1) + (P_2p_2) + (P_3p_3) + \ldots\ldots + (P_np_n)$ ili $O = \Sigma\,(Pp)$. Budući da svaki osnovni pomak (Pp) ostavlja dvoomjer četiriju elemenata invarijantan, to ostavlja i opći pomak $O = \Sigma\,(Pp)$ dvoomjer četiriju elemenata invarijantan. Zato opći pomak $O = \Sigma\,(Pp)$ predstavlja neku projektivnu kolineaciju.

16. — Imamo li dva opća pomaka $O_1 = \sum\limits_i (P_ip_i)$ i $O_2 = \sum\limits_k (P_kp_k)$, onda pomak $O_1 + O_2 = \sum\limits_i (P_ip_i) + \sum\limits_k (P_kp_k) = \sum\limits_n (P_np_n)$ predstavlja opet opći pomak. Iz toga slijedi, da opći pomaci $O = \Sigma\,(Pp)$ određuju grupu projektivnih pomaka. Pomak $O = (Pp) + (Pp)$ predstavlja identitet te grupe. Budući da osnovni pomak (Pp) prevodi pravac a u pravac a', a pripadni pol A u pripadni pol A', to svojstvo ima i opći pomak. Zato uz opći pomak $O = \Sigma\,(Pp)$ ostaje apsolutni polarni sistem kao cjelina nepromijenjen, tek njegovi elementi zamjenjuju mjesta.

O sukladnosti geometrijskih likova

17. — Da bismo u projektivnoj geometriji mogli odrediti mjerni broj dužine i kuta, moramo najprije odrediti kriterij na temelju kojeg ćemo biti u stanju da kažemo, kada su dva istovrsna lika u ravnini sukladna ili kongruentna, a kada nisu.

Sukladnost ili kongruenciju geometrijskih figura u projektivnoj ravnini definirat ćemo na slijedeći način:

Ako je geometrijski lik B *proizašao iz geometrijskog lika* A *bilo kojim pomakom, koji pripada grupi pomaka* $O = \Sigma$ (Pp), *onda je geometrijski lik* A *sukladan ili kongruentan sa geometrijskim likom* B *i obrnuto.*

18. — Posljedice. — Pomaci $O = \Sigma (Pp)$ određuju grupu koja posjeduje identitet, a iz toga prema postavljenoj definiciji sukladnosti slijedi:

a) Ako su geometrijske figure A i B sukladne s geometrijskom figurom C, onda je geometrijska figura A sukladna s geometrijskom figurom B.

Iz uvedene definicije sukladnosti slijedi neposredno:

b) Svaki osnovni pomak (Pp) određuje u projektivnoj ravnini centralnu kolineaciju sukladnih likova.

Dužina i mjerni broj

19. — Ako po izvjesnom pravilu uvedemo mjerne brojeve duljina za dužine u projektivnoj geometriji, uvedeni mjerni brojevi moraju udovoljiti dva uvjeta:

a) Ako su dužine AB i CD jednake (mogu se pomakom $O = \Sigma (Pp)$ prevesti jedna u drugu), mora im pripasti jednak mjerni broj.

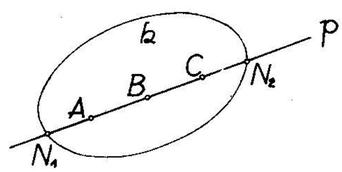
b) Ako odaberemo na orijentiranome pravcu p po volji tri točke A, B, i C, mjerni brojevi orijentiranih dužina moraju zadovoljiti uvjetu $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (ako se smjer podudara sa smjerom nosioca, mjerni broj dužine je pozitivan, u protivnom slučaju negativan).

Napomena. U projektivnoj ravnini točke A i B određuju na pravcu p dvije dužine, jer je pravac u projektivnoj ravnini zatvoren. Ako se točke A i B nalaze u ograđenom dijelu ravnine, onda se obično pod dužinom AB razumjeva ona dužina koja se nalazi unutar tog ograđenog dijela ravnine. Ako je pravac orijentiran, onda točke A i B na njemu određuju dvije dužine, dužinu $\overrightarrow{AB}$ i dužinu $\overrightarrow{BA}$.

Uvođenje mjernog broja

20. — Odredimo dužinu AB na pravcu $p = \overrightarrow{N_1N_2}$ koja se nalazi unutar apsolute k. Uz pomak $O = \Sigma(Pp)$ neka prijeđe pravac $p = \overrightarrow{N_1N_2}$ u pravac $p' = N_1' N_2'$, a dužina AB u dužinu $A' B'$. Prema definiciji sukladnosti slijedi, da je $AB = A' B'$, zato mjerni brojevi tih dužina moraju biti jednaki. Pomak $O = \Sigma(Pp)$ predstavlja neku projektvnu kolineaciju, ostavlja invarijantan dvoomjer četiriju elemenata, iz toga slijedi, da je $(N_2N_1AB) = (N_2'N_1'A'B')$.

21. — Možemo li dvoomjer $(N_2 N_1 A B)$ uzeti za mjerni broj dužine AB? Da na to pitanje odgovorimo, uvest ćemo privremeno na orijentiranome pravcu $p = \overrightarrow{N_1N_2}$ projektivni koordinatni sustav sa ishodištem u točki N_1 sa apscisom 0, sa jediničnom točkom u točki A sa apscisom 1 i s beskonačnom točkom u točki N_2 sa apscisom ∞ (slika 3). Svakoj točki X na pravcu p s obzirom na uvedeni



Sl. 3

projektivni sustav pripada jednoznačno jedan realan broj, apscisa x i obrnuto. (Apscisa x može se direktno odrediti metodom biparticije na projektivan način pomoću Moebiusove konstrukcije*.

Točki B neka pripadne apscisa b, a po volji odabranoj točki C neka pripadne s obzirom na uvedeni projektivni koordinatni sustav apscisa c. Prema definiciji dvoomjera slijedi, da je $(N_2 N_1 A B) = (\infty\, 0\, 1\, b) = b$, a $(N_2 N_1 A C) = (\infty\, 0\, 1\, c) = c$. Ako se točka B nalazi na dužini AC, onda je $b < c$. U tome je slučaju isto tako $(N_2 N_1 A B) < (N_2 N_1 A C)$. Jer je $(N_2 N_1 A B) = b$, $(N_2 N_1 A C) = c$, $(N_2 N_1 B C) = \frac{c}{b}$, $(N_2 N_1 A A) = 1$, vidimo, da ne možemo uzeti dvoomjer $(N_2 N_1 A B)$ za mjerni broj dužine AB. Tako određeni mjerni brojevi ne bi zadovoljili uvjet $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (isporedi točku 19.).

22. — Ako za mjerni broj dužine AB na pravcu $p = \overrightarrow{N_1N_2}$ uzmemo broj $\overline{AB} = \frac{\mu}{2} \ln(N_2 N_1 A B)$, možemo se lako uvjeriti, da tako uvedeni mjerni broj zadovoljava svima postavljenim uvjetima.

---

* Isporedi F. Klein: Nichteuklidische Geometrie, izdano 1928. g., str. 161.

23. — Sa neodređenim parametrom μ disponiramo u tome smislu, da možemo svaku dužinu odabrati za jedinicu mjere. Ako želimo, da po volji odabrana dužina MN predstavlja jedinicu mjere, mora joj pripasti mjerni broj 1, bit će prema tome $\overline{MN} = 1 = \frac{\mu}{2} \ln (N_2 N_1 M N)$, a iz te jednadžbe možemo odrediti neodređeni parametar μ.

Ako tražimo dužinu RS, koja će nam uz $\mu = 1$ predstavljati jediničnu dužinu mjere, ta je dužina RS jednoznačno određena uvedenom metrikom, jer mora biti $RS = 1 = \frac{1}{2} \ln (N_2 N_1 R S)$. Otuda slijedi, da je $(N_2 N_1 R S) = e^2$. Ako je točka R po volji odabrana na pravcu $p = \overrightarrow{N_1 N_2}$, točka je S uz $(N_2 N_1 R S) = e^2$ jednoznačno određena, dakle i dužina RS. Tako se određena dužina RS zove apsolutna jedinica mjere.

U našim ćemo se razmatranjima služiti samo apsolutnom jedinicom mjere ($\mu = 1$).

24. — Do sada smo promatrali dužine unutar apsolute k, a period $2\pi i$ prirodnog logaritma nismo uopće uzeli u obzir. Zato moramo ispitati detaljnije svojstva uvedenih mjernih brojeva*).

Promatrati ćemo najprije slučaj kad orijentirani pravac $p = \overrightarrow{N_1 N_2}$ siječe apsolutu k.

a) Dužina $\overrightarrow{AA}$ predstavlja ili točku A ili dužinu cijelog pravca p (isporedi točku 19., napomenu). Budući da je $(N_2 N_1 A A) = 1 = e^{0+2m\pi i}$, to je $\overrightarrow{AA} = \frac{1}{2} \ln e^{0+2m\pi i} = 0 + m\pi i$, $(m = \pm 1, \pm 2 \ldots)$. Iz toga zaključujemo: Mjerni broj duljine cijelog pravca p (koji projektivno shvaćen predstavlja zatvorenu liniju), određen je uz uvedenu metriku sa πi. Zato će mjerni broj svake dužine biti jednoznačno određen do multipla periode $m\pi i$. Kod računanja s mjernim brojevima mnogokratnik periode $m\pi i$ ne ćemo uzimati u obzir (kao što ne uzimamo u obzir u euklidovoj metrici mnogokratnik periode $2n\pi$ kod mjernog broja zadanog kuta), nego ćemo se služiti samo s glavnom vrijednosti.

b) Ako su A i B dvije točke unutar apsolute k na pravcu $p = \overrightarrow{N_1 N_2}$, onda je $(N_2 N_1 A B) = a$ poz. realan broj, dakle je $a = e^{\alpha+2m\pi i}$ (α realan broj). Zato je $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \ln e^{\alpha+2m\pi i}$ ili $\overrightarrow{AB} = \frac{\alpha}{2} + m\pi i$.

*) Isporedi: Schilling: Projektive und Nichteuklidische Geometrie II., 1931. g., strana 98., § 21.

Mjerni broj dužine $\overrightarrow{AB}$ sastoji se od glavne vrijednosti $\frac{\alpha}{2}$ (realan broj) i mnogokratnika periode $m\pi i$.

c) Ako su točke A i B izvan apsolute na pravcu $p = N_1 N_2$ opet je $(N_2 N_1 A B) = b$ pozitivan realan broj, dakle $b = e^{\beta + 2m\pi i}$ (β realan broj). Zato mjerni broj dužine $\overrightarrow{AB}$ glasi $\overrightarrow{AB} = \frac{\beta}{2} + m\pi i$.

d) Odaberimo na pravcu $p = \overrightarrow{N_1 N_2}$ točku A unutar apsolute, a točku B izvan. Tada je $(N_2 N_1 A B) = c$ negativan realan broj, dakle $c = e^{(\gamma + \pi i) + 2m\pi i}$ (γ realan broj). Zato je

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \ln e^{(\gamma + \pi i) + 2m\pi i} = \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\pi}{2} i \right) + m\pi i .$$

Glavna vrijednost dužine $\overrightarrow{AB}$ u tome je slučaju kompleksan broj

$$\frac{\gamma}{2} + i \frac{\pi}{2} .$$

25. — Promatrat ćemo sada slučaj kada orijentirani pravac p ne siječe apsolutu k.

a) Neka su A i B po volji dvije točke na pravcu p. Točke N_1 i N_2 određene su kao imaginarne dvostruke točke eliptične involucije parova konjugiranih polova na pravcu p, zato je prema točki 2. $(N_2 N_1 A B) = e^{i\alpha + 2n\pi i}$, α realan broj. Mjerni broj dužine $\overrightarrow{AB}$ prema tome glasi

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \ln e^{i\alpha + 2n\pi i} = \frac{i\alpha}{2} + n\pi i ,$$

glavna vrijednost tog mjernog broja je imaginaran broj.

b) Neka su A i A' konjugirani polovi apsolute k, tada je bez obzira da li pravac p siječe ili ne siječe apsolutu $(N_2 N_1 A A') = -1$. Zato je

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2} \ln (-1) = \frac{1}{2} \ln e^{\pi i + 2n\pi i} = \frac{\pi i}{2} + n\pi i .$$

Udaljenost para konjugiranih polova apsolute je uvijek jednaka, određena mjernim brojem $\frac{\pi i}{2}$, dakle je jednaka polovici duljine cijeloga pravca.

26. — Sad ćemo promatrati slučaj kad je pravac p tangenta apsolute. U tome slučaju točke N_2 i N_1 padaju u dirališe N pravca p s apsolutom k.

a) Ako su A i B po volji dvije točke na tangenti p,

$$\left(A \neq \begin{cases} N_1 \\ N_2 \end{cases}, \; B \neq \begin{cases} N_1 \\ N_2 \end{cases}\right)$$

onda je $(N_2 N_1 A B) = (N N A B) = 1$, otuda $\overrightarrow{AB} = 0 + n\pi i$.

Svakoj dužini $\overrightarrow{AB}$ na tangenti apsolute pripada mjerni broj 0, ako je $A \neq N$, $B \neq N$.

b) Ako je $A \neq N$, $B = N$, onda je dvoomjer $(N_2 N_1 A B) = (N N A N)$ neodređen. Zato dužina $\overrightarrow{AB}$ ima neodređen mjerni broj.

Iz toga vidimo, da se tangente apsolute ponašaju prema uvedenoj metrici kao minimalni pravci prema euklidovoj metrici.

27. — Ako su A i B dvije točke na orijentiranome pravcu p, onda zbroj dužina $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ obuhvaća cijeli pravac. Duljina cijelog pravca je πi, dakle je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \pi i$. Ako je $\overrightarrow{AB} = m$, onda je $\overrightarrow{BA} = \pi i - m$.

28. — Uzmimo orijentirani pravac $p = \overrightarrow{N_1 N_2}$ i po volji točku A na njemu. Odaberimo zatim po volji točku B na dužini $\overrightarrow{AN_2}$ (sl. 3.). Za $\lim B \to N_2$, slijedi $\lim (N_2 N_1 A B) \to \infty$, a to znači:

Mjerni broj udaljenosti svake točke A od bilo koje točke na apsoluti veći je od svakog konačnog broja. Zato točke apsolute uz uvedenu metriku predstavljaju beskonačno daleke točke u projektivnoj ravnini.

29. — Na temelju uvedene metrike dijelimo točke projektivne ravnine u tri skupine:

a) Sve točke unutar apsolute zovu se prave točke. Dužine, koje su određene pravim točkama, imaju realan mjerni broj.

b) Sve točke izvan apsolute zovu se neprave točke. Među njima ima parova točaka, koje određuju dužine sa kompleksnim mjernim brojem.

c) Točke apsolute zovu se beskonačne točke, jer one predstavljaju na temelju uvedene metrike beskonačno daleke točke projektivne ravnine.

S istih razloga razlikujemo dvije skupine pravaca:

d) Svi pravci na kojima leže dvije beskonačne točke zovu se pravi pravci.

e) Svi pravci na kojima se nalazi samo jedna ili nijedna beskonačna točka zovu se nepravi pravci.

O kutu

30. — Dužina AB je određena sa dvije točke A i B koje leže na pravcu p. Dualno tome možemo kazati: kut (ab) određen je sa dva pravca a i b, koji se sijeku u točki P. Zato ćemo mjerni broj kuta uvesti dualnim postupkom prema onome, kojim smo uveli mjerni broj dužine. Kod toga zahtijevamo:

a) da kut s vrhom u pravoj točki ima realan mjerni broj,

b) da punome kutu pripadne mjerni broj 2π,

c) da budu svi pravi kutovi jednaki i određeni mjernim brojem $\frac{\pi}{2}$. Nadalje uvedeni mjerni brojevi treba da zadovolje još slijedeće uvjete:

d) ako je $\sphericalangle(a'b')$ nastao iz kuta $\sphericalangle(ab)$ pomakom $O = \Sigma(Pp)$, njihovi mjerni brojevi moraju biti jednaki,

e) ako pravci a, b i c prolaze točkom C, onda uz odabranu orijentaciju rotacije oko točke C, dobivamo tri orijentirana kuta koji određuju relaciju $\sphericalangle(ab) + \sphericalangle(bc) = \sphericalangle(ac)$. Tu relaciju moraju zadovoljiti i njihovi mjerni brojevi.

Uvođenje mjernog broja

31. — Uzmimo dva pravca $a = M_1M_2$ i $b = N_1N_2$, koji se sijeku u pravoj točki $P = a \times b$; oni određuju kut (ab). Ako uz pomak $O = \Sigma(Pp)$ prijeđe pravac a u pravac a', pravac b u pravac b', onda je kut (ab) prešao u kut $(a'b')$, koji su među sobom jednaki, t. j. $\sphericalangle(ab) = \sphericalangle(a'b')$.

Ako iz njihovih vrhova P i P' spustimo tangente na apsolutu k, one su određene kao dvostruke imaginarne zrake eliptičnih involucija parova konjugiranih polara u točkama P i P'. Zato je $(n_2\, n_1\, a\, b) = (n_2'\, n_1'\, a'\, b') = e^{-i(a+2n\pi)}$ (isporedi točku 3. b).

32. — Pokazat ćemo da broj $\frac{i}{2}\ln(n_2\, n_1\, a\, b)$ zadovoljava svima postavljenim uvjetima za mjerne brojeve kutova.

a) Budući da je $(n_2\, n_1\, a\, b) = e^{-i(\alpha+2n\pi)}$, gdje je α realan broj, $|\alpha| < \pi$, slijedi $\sphericalangle(ab) = \frac{i}{2}\ln(n_2 n_1 ab) = \frac{i}{2}\ln e^{-i(\alpha+2n\pi)} = \frac{\alpha}{2} + n\pi$.

Kut između dva pravca a i b određen je mjernim brojem, koji je realan i manji od π, a ima period π.

b) Ako je $a = b$, tada je $(n_2\, n_1\, a\, b) = (n_2\, n_1\, a\, a) = e^{0+2n\pi i}$, a otuda $\sphericalangle(aa) = 0 + n\pi$.

Pravci, koji padaju zajedno određuju kut 0 ili kut π. Iz toga slijedi, da je puni kut određen mjernim brojem 2π.

c) Neka su a, b i c tri pravca koji prolaze točkom P, oko koje je zadana orijentacija rotacije. Pokazat ćemo da uvedeni mjerni brojevi zadovoljavaju relaciju $\sphericalangle(ab) + \sphericalangle(bc) = \sphericalangle(ac)$.

Iz $(n_2\, n_1\, a\, b) = r$, $(n_2\, n_1\, b\, c) = \frac{s}{r}$, $(n_2\, n_1\, a\, c) = s$ slijedi, da je $\sphericalangle(ab) + \sphericalangle(bc) = \frac{i}{2}\ln(n_2 n_1 ab) + \frac{i}{2}\ln(n_2 n_1 bc) = \frac{i}{2}\ln(n_2 n_1 ac) = \sphericalangle(ac)$.

d) Iz $(n_2 n_1\, a\, b) = r$ i $(n_2\, n_1\, b\, a) = \frac{1}{r}$ slijedi, da je $\sphericalangle(ba) = = \frac{i}{2}\ln(n_2\, n_1\, b\, a) = -\frac{i}{2}\ln(n_2\, n_1\, a\, b) = -\sphericalangle(ab)$.

e) Ako pravci p i q zatvaraju pravi kut, biti će prema postavljenom zahtjevu $\sphericalangle(pq) = \frac{i}{2}\ln(n_2\, n_1\, p\, q) = \frac{\pi}{2}$. Iz te jednadžbe dobivamo $(n_2\, n_1\, p\, q) = e^{\pi i} = -1$, a to nam kazuje:

Svaki par konjugiranih polara apsolute bez obzira sijeku li se u pravoj ili nepravoj točki, zatvaraju pravi kut, koji je određen mjernim brojem $\frac{\pi}{2}$. Svi su pravi kutovi jednaki.

33. — Dosada smo promatrali samo kutove s vrhom u pravoj točki. Sada ćemo još istražiti svojstva uvedenih mjernih brojeva za kutove, koji imaju svoj vrh u nepravoj ili beskonačnoj točki.

a) Uzmimo da se vrh P zadanog kuta nalazi u nepravoj točki, a neka su pravci a i b pravi pravci. Tangente n_2 i n_1 su realne, a vrijednost je dvoomjera $(n_2\, n_1\, a\, b) = r$ pozitivan realan broj, $r = e^{\alpha + 2n\pi i}$. Zato je

$$\sphericalangle(ab) = \frac{i}{2}\ln e^{\alpha+2n\pi i} = i\,\frac{\alpha}{2} + m\pi\,.$$

Kut pravih pravaca s vrhom u nepravoj točki određen je imaginarnim mjernim brojem.

b) Neka su a i b nepravi pravci, koji se sijeku u nepravoj točki P. I u tome je slučaju dvoomjer $(n_2\, n_1\, a\, b) = r'$ pozitivan realan broj, dakle

$$r' = e^{\alpha' + 2n\pi i}\,, \quad \text{a} \quad \sphericalangle(ab) = i\,\frac{\alpha'}{2} + m\pi\,.$$

Kut nepravih pravaca s vrhom u nepravoj točki određen je imaginarnim mjernim brojem.

c) Neka je a pravi pravac, b nepravi pravac. U tome je slučaju $(n_2\, n_1\, a\, b) = s$ negativan realan broj, dakle

$$s = e^{(\beta+\pi i)+2n\pi i}\,, \quad \text{a} \quad \sphericalangle(ab) = \left(i\,\frac{\beta}{2} + \pi\right) + m\pi\,.$$

Pravi i nepravi pravac zatvaraju kut, kome pripada kompleksan mjerni broj.

d) Ako se vrh P nalazi na apsoluti, onda tangente n_2 i n_1 padaju zajedno u tangentu n, koja dira apsolutu u točki P. Zato je $(n_2\, n_1\, a\, b) = (n\, n\, a\, b) = 1$, a iz toga slijedi $\sphericalangle(ab) = 0 + n\pi$.

Kutu dvaju pravaca, koji se sijeku na apsoluti, pripada mjerni broj 0.

e) Neka je a po volji pravac projektivne ravnine, a b tangenta apsolute. Onda iz točke $P = a \times b$ polaze dvije tangente na apsolutu, tangenta $n_1 \neq a$ i tangenta $n_2 = b$. U tome je slučaju $(n_2 n_1 a b) = (n_2 n_1 a n_2) = \infty$, a iz toga slijedi, da je $\sphericalangle (ab) = \sphericalangle (an)$ neodređen.

Svaki pravac s tangentom apsolute zatvara kut, kome je mjerni broj veći od svakog konačnog broja, dakle neodređen.

34. — S obzirom na uvedenu metriku dobili smo ove činjenice:

a) Pravci, koji se sijeku u pravim točkama, zatvaraju kut s realnim mjernim brojem.

b) Pravci, koji se sijeku u točkama apsolute, zatvaraju kut s mjernim brojem 0, a to znači da se u toj metrici ti pravci moraju smatrati za paralelne pravce.

c) Pravi i nepravi pravac, kao i dva neprava pravca određuju kut s kompleksnim mjernim brojem.

d) Okomiti pravci određeni su parom konjugiranih polara apsolute, oni zatvaraju četiri jednaka prava kuta, kojima pripada mjerni broj $\frac{\pi}{2}$.

Zaključak

35. — Iz svega što smo do sada upoznali, vidimo, da uvedena metrika definira u projektivnoj ravnini metričku geometriju, koja se bitno razlikuje od euklidske, a zove se hiperbolična geometrija. Zato se uvedena metrika zove hiperbolična metrika projektivne ravnine. Točke, pravci i likovi u toj geometriji zovu se hiperbolične točke, hiperbolični pravci i hiperbolični likovi projektivne ravnine.

Mi ćemo se ograničiti samo na istraživanje svojstava hiperboličnih likova, kojima su stranice i kutovi određeni realnim mjernim brojem, a to znači, da se moramo ograničiti na istraživanje hiperbolične geometrije na dio projektivne ravnine unutar apsolute. Zato nam taj dio projektivne ravnine unutar apsolute predstavlja ravninu geometrije, koju želimo upoznati.

Ako ispitamo, uvjerit ćemo se, da odnosi između hiperboličnih točaka, hiperboličnih pravaca i hiperboličnih likova unutar apsolute zadovoljavaju sve grupe Hilbertovih aksioma, osim Euklidov aksiom paralela, a na mjesto njega zadovoljavaju aksiom paralela Lobačevskog, o kojem će biti govora u točki 49. Iz toga slijedi, da hiperbolična geometrija unutar apsolute definira projektivnu interpretaciju geometrije Lobačevskog*).

---

*) Isporedi Jefimov: Viša geometrija, glava II., § 25.—27. i glava VI., § 203., prevod, Beograd 1949.

Naše izlaganje nema aksiomatski karakter. Mi želimo na temelju poznatih svojstava polariteta konika upoznati pomoću projektivne interpretacije elementarnu geometriju Lobačevskog, a pri tome dobivamo punu mogućnost detaljnog izvođenja neeuklidskih hiperboličnih konstrukcija.

Napomena. — U točki 84. pokazat ćemo, da se isto tako može projektivno interpretirati i metrika euklidske geometrije, ali u tome slučaju apsoluta degenerira u dvostruko uzet beskonačno daleki pravac sa apsolutnim kružnim točkama na njemu.

Ako je apsoluta definirana imaginarnom konikom sa realnim središtem, može se pomoću nje, postupajući na analogan način, uvesti u projektivnu ravninu eliptična metrika i tako u projektivnoj ravnini odrediti drugu metričku geometriju, eliptičnu geometriju*).

Projektivna interpretacija elementarne geometrije Lobačevskog

Objašnjenje

36. — Dio projektivne ravnine unutar apsolute k predstavlja nam ravninu geometrije Lobačevskog, a hiperbolična geometrija na tom dijelu projektivne ravnine predstavlja projektivnu interpretaciju geometrije Lobačevskog.

Pravi pravac p svojim segmentom unutar apsolute k određuje projektivnu sliku pravca geometrije Lobačevskog. Taj segment je otvoren, ograđen hiperboličnim beskonačnim točkama N_1 i N_2, zato ćemo i nadalje neorijentiran pravac p obilježavati sa $p \equiv N_1N_2$, a orijentiran pravac sa $p \equiv \overrightarrow{N_1N_2}$.

Kod dokazivanja poučaka i rješavanja zadataka postupat ćemo ovako: Najprije ćemo taj poučak ili zadatak dokazati odnosno riješiti uz pomoć hiperbolične metrike, koja se odnosi na cijelu projektivnu ravninu, i izvesti potrebnu konstrukciju. Zatim ćemo iz tog dokaza ili rješenja izdvojiti one momente, koji se odnose na geometriju Lobačevskog, t. j. na dio hiperbolične geometrije unutar apsolute k.

Radi lakšeg izražavanja dio projektivne ravnine unutar apsolute, koji predstavlja u projektivnoj interpretaciji ravninu geometrije Lobačevskog, zvati ćemo u daljnjem razmatranju hiperboličnom ravninom.

O pravcu, zraci i dužini

37. — Ako imadu pravci a i b u hiperboličnoj ravnini dvije točke zajedničke, oni predstavljaju isti pravac, kaže se da padaju zajedno, piše se $a \equiv b$.

*) Isporedi Schilling: Projektive Geometrie II., Berlin 1931..

Ako dva pravca a i b u hiperboličnoj ravnini imaju samo jednu točku zajedničku, oni se sijeku.

Svi pravci u hiperboličnoj ravnini, koji prolaze kroz jednu točku određuju pramen pravaca, koji se zove pramen 1. vrste.

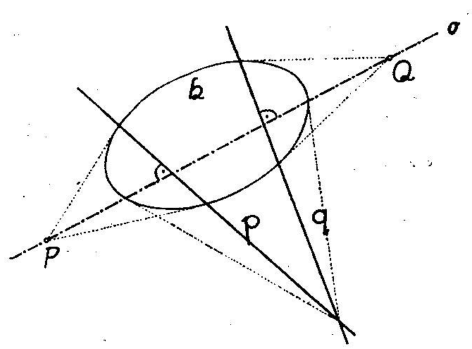
Pravac a u hiperboličnoj ravnini određuje dvije beskonačne točke N_1 i N_2. Svaka točka A na pravcu $a \equiv N_1N_2$ u hiperboličnoj ravnini dijeli taj pravac na dvije zrake, na zraku AN_1 odnosno na zraku AN_2, koje određuju beskonačne točke N_1 i N_2 (ali te točke ne pripadaju tim zrakama).

Dio pravca u hiperboličnoj ravnini, koji je omeđen točkama A i B, određuje jednoznačno dužinu AB.

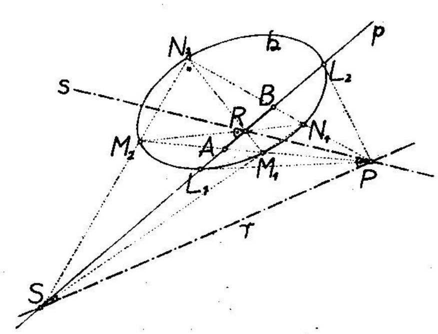
Tri točke A, B i C u hiperboličnoj ravnini, koje ne leže na jednom pravcu, određuju trokut ABC, sa tri stranice a, b i c, te tri kuta α, β i γ.

Okomiti pravci

38. — Budući da unutar apsolute ima tetiva koje se ne sijeku niti imaju zajedničkih točaka, slijedi: U hiperboličnoj ravnini ima pravaca, koji se ne sijeku, niti imaju zajedničkih beskonačnih točaka. Ti se pravci zovu mimosmjerni (ili poluparalelni).



Sl. 4



Sl. 5

39. — Z a d a t a k. *Konstruiraj sve pravce u hiperboličnoj ravnini, koji su okomiti na zadani pravac* p.

R j e š e n j e: Okomiti pravci određeni su parom konjugiranih polara apsolute. Zato sve hiperbolične okomice pravca p prolaze njegovim polom P. Pravi pravci iz tog pramena određuju u hiperboličnoj ravnini tražene okomice. Iz toga slijedi:

Svi pravci u hiperboličnoj ravnini, koji su okomiti na zadani pravac p, ne sijeku se, nego su mimosmjerni. Kaže se, da oni određuju pramen pravaca 2. vrste. Pravac p, njihova zajednička okomica, određuje taj pramen jednoznačno.

40. — Z a d a t a k: *Konstruiraj u hiperboličnoj ravnini zajedničku okomicu o dvaju mimosmjernih pravaca* p i q (sl. 4.).

R j e š e n j e: Spojnica polova P i Q pravaca p i q određuje traženu zajedničku okomicu pravaca p i q. Slijedi:

U hiperboličnoj ravnini dva mimosmjerna pravca imaju samo jednu zajedničku okomicu.

41. — Z a d a t a k: *Konstruiraj u hiperboličnoj ravnini okomicu iz točke* A *na pravac* p.

R j e š e n j e: Prema točki 40. traženu okomicu određuje spojnica točke A i pola P pravca p.

U hiperboličnoj ravnini može se iz jedne točke spustit na pravac samo jedna okomica.

42. — Z a d a t a k. *Konstruiraj u hiperboličnoj ravnini simetralu dužine* AB *(sl. 5.).*

R j e š e n j e: Neka dužina AB leži na orijentiranome pravcu $p = \overrightarrow{L_1L_2}$, pol tog pravca označimo sa P. Prema točki 11. znademo odrediti osnovni pomak (Ss), koji prevodi točku A u točku B. Prema točki 18., b) slijedi, da je pravac s simetrala dužine $\overrightarrow{AB}$. Osnovni pomak (Rr) prevodi isto tako točku A u točku B, samo je u ovome slučaju pravac r simetrala dužine $\overrightarrow{BA}$. Pravci r i s prolaze kroz pol P, dakle su okomiti na pravac p. Točke R i S su par konjugiranih polova na pravcu p s obzirom na apsolutu, zato su pravci r i s njene konjugirane polare, dakle je $r \perp s$. Točke na pravcu s su sve jednako udaljene od vrhova dužine AB. Prave točke tog pravca određuju sa točkama A i B dužine s realnim mjernim brojem, dok ostale neprave točke tog pravca određuju dužine sa kompleksnim mjernim brojem. Točke pravca r su isto tako jednako udaljene od točaka A i B, ali su te udaljenosti određene kompleksnim mjernim brojem. Simetrala s dužine $\overrightarrow{AB}$ određuje simetralu dužine AB u hiperboličnoj ravnini. Iz toga slijedi:

Simetrala dužine AB *u hiperboličnoj ravnini je pravac, koji polovi dužinu* AB *i zatvara s njom pravi kut.*

Simetrala dužine AB *u hiperboličnoj ravnini je geometrijsko mjesto točaka u ravnini, koje su jednako udaljene od vrhova dužine* AB.

O kutu

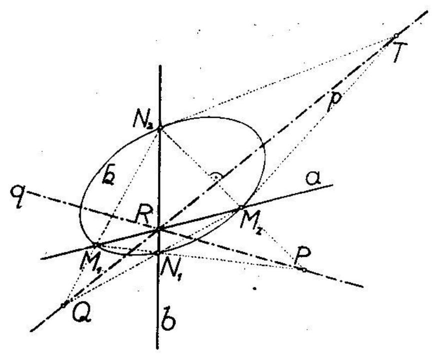
Obilježavanje i podjela kutova jednaka je onoj u euklidskoj geometriji.

43. — Z a d a t a k. *Neka se zadani pravci* $a = M_1M_2$ *i* $b = N_1N_2$ *sijeku u pravoj točki R. Konstruiraj simetrale vršnih kutova pravaca* a *i* b *(sl. 6).*

Rješenje: Osnovni pomak (Pp), koji prevodi pravac $a = \overrightarrow{M_1M_2}$ u pravac $b = \overrightarrow{N_1N_2}$, određuje u projektivnoj ravnini simetriju s obzirom na pravac p. Osnovni pomak (Qq), koji prevodi pravac $a = \overrightarrow{M_1M_2}$ u pravac $b = \overrightarrow{N_1N_2}$, određuje u projektivnoj ravnini simetriju s obzirom na pravac q. Iz toga slijedi, da su po dva vršna kuta, što ih određuju pravci a i b, međusobno jednaki, a da su pravci p i q njihove raspolovnice ili simetrale. Budući da su pravci p i q konjugirane polare apsolute k, slijedi $p \perp q$. Zato možemo reći:

Dva pravca u hiperboličnoj ravnini određuju dva para jednakih vršnih kutova, a simetrale tih kutova su među sobom okomite.

Simetrala kuta u hiperboličnoj ravnini je geometrijsko mjesto točaka u ravnini, koje su jednako udaljene od krakova zadanog kuta.



Sl. 6

44. — Zadatak. *Konstruiraj u hiperboličnoj ravnini simetralu zadanog kuta* $M_2 R N_2 = \alpha$.

Rješenje: Ako u slici 6. povučemo u točkama M_2 i N_2 tangente na apsolutu, one se sijeku u točki T na simetrali kuta $M_2 R N_2$, jer spojnica M_2N_2 prolazi polom P simetrale p. Prema tome konstruirati simetralu zadanog kuta $M_2 R N_2$ znači, odrediti spojnicu vrha R tog kuta sa polom T pravca M_2N_2. Iz toga dalje slijedi, da je simetrala kuta $M_2 R N_2$ okomita na pravac M_2N_2.

Paralelni pravci

45. — Pravci pramena s vrhom na apsoluti određuju među sobom nulte kutove (isporedi točku 34., b). Pravi pravci iz tog pramena određuju u hiperboličnoj ravnini pramen pravaca, koji među sobom određuju nulte kutove. Ti se pravci zovu paralele, a kažemo, da te paralele određuju pramen 3. vrste.

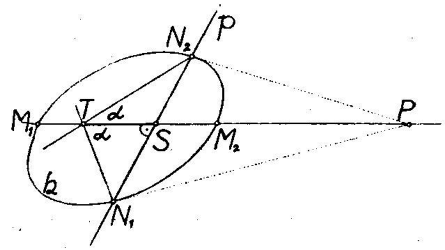
Svakome pravcu u hiperboličnoj ravnini pridruženi su dva pramena paralelnih pravaca. Tu se ne može govoriti općeno o paralelnim pravcima, nego tek o paralelnim pravcima prema istoj strani ili prema istoj beskonačnoj točki. Pravac i njegove paralele ne sijeku se. Slijedi:

Svakom točkom T *izvan pravca* p *prolaze u hiperboličnoj ravnini dvije paralele s tim pravcem.*

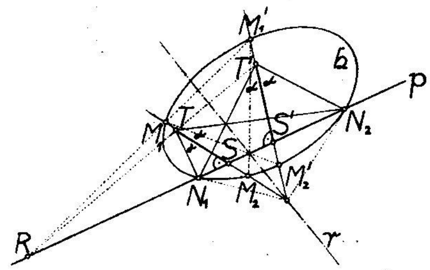
46. — Neka se točka T nalazi izvan pravca $p = N_1 N_2$ u hiperboličnoj ravnini (sl. 7.). Povucimo točkom T obje paralele $p_1 = TN_1$ i $p_2 = TN_2$ s pravcem p, a zatim spustimo iz točke T okomicu $o = \overrightarrow{M_1 M_2}$ na pravac p, a nožište označimo sa S. Okomica o prolazi kroz pol P pravca $p = N_1 N_2$, dakle je okomica o simetrala kuta $N_1 T N_2 = 2\alpha$, kojega zatvaraju paralele p_1 i p_2 (isporedi točku 44.). Zato je $\sphericalangle N_1 T S = \sphericalangle S T N_2 = \alpha$. Kut α zove se kut paralelnosti pravca p s obzirom na točku T.

Ako se točka T kontinuirano pomiče po okomici o prema točki M_1, udaljenost točke T od pravca p kontinuirano raste, a pripadni kut paralelnosti se kontinuirano smanjuje. Za $\lim T \to M_1$, slijedi $\lim \alpha \to 0$. Za $\lim T \to S$, slijedi $\lim \alpha \to \frac{\pi}{2}$. Udaljenost $a = TS$ točke T od pravca p u funkcionalnoj je vezi sa kutom paralelnosti α.

47. — Ako su točke T i T' s iste strane pravca p i jednako udaljene od njega, onda točki T pripada jednak kut paralelnosti α kao i točki T' (sl. 8.).



Sl. 7



Sl. 8

Da to dokažemo, odredit ćemo osnovni pomak (Rr) koji prevodi pravac TS u $T'S'$. Budući da (Rr) određuje simetriju s obzirom na pravac r, slijedi, da točki T' pripada jednak kut paralelnosti kao i točki T.

Točkama, koje imaju jednaku udaljenost a *od pravca* p, *pripada u hiperboličnoj ravnini jednak kut paralelnosti. Vrijedi i obrat.*

48. Veličine a i α određuju kontinuiranu funkciju, koja se prema Lobačevskom piše $\alpha = \Pi(a)$ i zove funkcija Lobačevskog. Ako je $\Pi(a) < \Pi(a')$, onda je $a > a'$.

49. — Neka se u hiperboličnoj ravnini točka T nalazi izvan pravaca p. Pramen pravaca s vrhom u točki T dijele paralele p_1 i p_2 u dva razreda, na pravce koji sijeku pravac p i na pravce koji ne sijeku pravac p. Paralele p_1 i p_2 određene su kao granični pravci između ta dva razreda.

Na temelju toga možemo sada izreći aksiom paralela po Lobačevskom (isporedi točku 35.), koji glasi: *Točkom* T *izvan pravca* p *prolaze bar dva pravca, koji ne sijeku pravac* p.

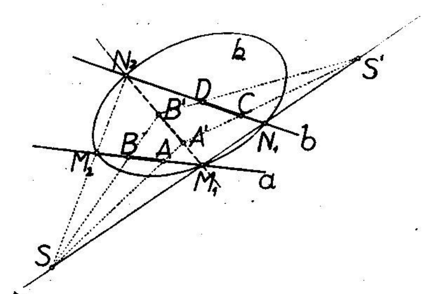
Grafičko računanje s dužinama i kutovima u hiperboličnoj ravnini

50. — Zadatak. *Prenesi dužinu* AB, *koja leži na pravcu* $a = M_1M_2$ *na pravac* $b = N_1N_2$ *od točke* C *dalje, tako da bude* $CD = AB$. (sl. 9.).

Rješenje: Odredimo na spojnici M_1N_1 točku $S = M_2N_2 \times \times M_1N_1$, a onda projicirajmo iz te točke dužinu AB u dužinu $A'B'$ na pravac $c = M_1N_2$. Iz točke $S' = A'C \times M_1N_1$ projicirajmo dužinu $A'B'$ u dužinu CD na pravac b. Onda je $AB = CD$, jer je $(M_2\,M_1\,A\,B) = (N_2\,M_1\,A'\,B') = (N_2\,N_1\,C\,D)$.

51. — Zadatak. *Konstruiraj polovište* R *dužine* AB *(sl. 5.).*

Rješenje: Neka je točka P pol pravaca $p = AB$. Spojnica PA određuje na apsoluti točke M_1 i M_2, a spojnica PB točke N_1 i N_2. Točka $R = M_1N_2 \times N_1M_2$ određuje polovište dužine AB (isporedi konstrukciju simetrale dužine u točki 42.).



Sl. 9

52. — Zadatak. *Zadana je dužina* AR, *konstruiraj dužinu* AB, *tako da bude* $AB = 2AR$.

Rješenje: Konstrukcija polovišta R dužine AB na slici 5. daje traženo rješenje. Treba najprije odrediti pol P pravca $p = AR$. Spojnica PA određuje na apsoluti točke M_1 i M_2, spojnica M_1R određuje na apsoluti točku N_2, a spojnica PN_2 određuje na pravcu p traženu točku B, tako da je $AB = 2AR$.

53. — Zadatak. *Zadana je dužina* AB, *konstruiraj dužinu* $AD = 3AB$.

Rješenje: Neka je P pol pravca $p = AB$. Spojnica PA određuje na apsoluti točke M_1 i M_2, a spojnica PB točke N_1 i N_2. Spojnica M_1B određuje na apsoluti točku R_2, a spojnica PR_2 određuje na pravcu p točku C. Spojnica N_1C određuje na apsoluti točku R_2', a spojnica PR_2' određuje na pravcu p traženu točku D, tako da je $AB = BC = CD$ ili $AD = 3AB$.

Napomena. Produžujući taj postupak možemo na pravcu $p = AB$ odrediti po volji mnogo ekvidistantnih točaka.

54. — Zadatak. *Udvostruči zadani kut* $\alpha = M_2\,V\,N_2$.

Rješenje: Prema napomeni u točki 44. simetrala kuta je okomita na spojnicu beskonačnih točaka, koje su određene krakovima zadanog kuta. Zato će krak VN_2 biti okomit na spojnicu M_2N_2' traženog kuta $2\alpha = M_2\,V\,N_2'$.

Napomena. Nastavljajući taj postupak možemo kut α po volji mnogo puta prenositi oko točke V.

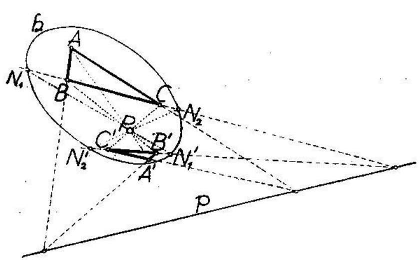
Centralna simetrija u hiperboličnoj ravnini

55. — Ako je P po volji prava točka, onda osnovni pomak (Pp) određuje u hiperboličnoj ravnini centralnu simetriju s obzirom na točku P (sl. 10.). Točka P raspolavlja spojnice centralno simetričnih točaka A i A', a zajednička okomica simetrično pridruženih pravaca a i a' prolazi točkom P (jer se pravci a i a' sijeku na polari p točke P). Centralno simetrični su trokuti sukladni s istosmislenim smjerom ophodnje periferije; isporedi trokute na sl. 10.

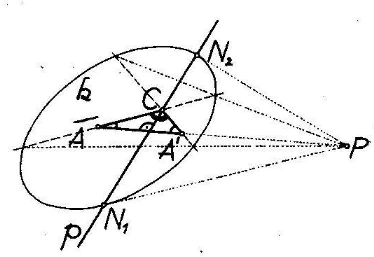
Centralno simetrični likovi hiperbolične ravnine su direktno sukladni.

Osna simetrija

56. — Ako je zadan po volji pravac p u hiperboličnoj ravnini, onda osnovni pomak (Pp) određuje u hiperboličnoj ravnini simetriju s obzirom na pravac p, (sl. 11.). Iz toga slijedi, da simetrično pridružene točke A i A' leže na okomici pravca p i da je pravac p simetrala svih spojnica simetrično pridruženih točaka. Simetrično



Sl. 10



Sl. 11

pridruženi pravci a i a' sijeku se na osi simetrije, s kojom zatvaraju jednak kut. Dva trokuta ABC i $A'B'C'$ koji su simetrično pridruženi obzirom na pravac p sukladni su, ali nemaju istosmisleni smjer ophodnje periferije; takovi se trokuti zove simetrično sukladni.

57. — Po volji točka C na osi simetrije p i dvije simetrično pridružene točke A i A' određuju općeno istokračan trokut $AA'C$. Iz svojstva osnovnog pomaka (Pp) slijedi ispravnost ovih poučaka u hiperboličnoj ravnini:

a) Kutovi na osnovici istokračnog trokuta su jednaki.

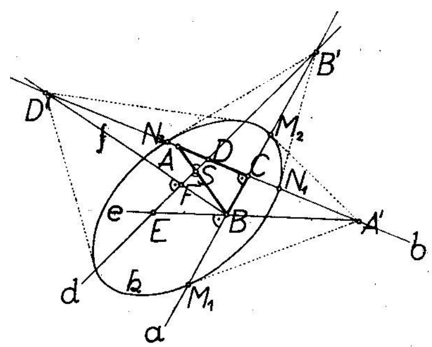
b) Simetrala osnovice istokračnog trokuta predstavlja ujedno visinu koja pripada osnovici i simetralu kuta nasuprot osnovici.

c) Dva su pravokutna trokuta sukladna, ako se podudaraju u hipotenuzi i jednom kutu uz hipotenuzu.

d) U istostraničnom trokutu su svi kutovi jednaki.

58. — Zadatak. *Ispitaj sa koliko se osnovnih pomaka* (Pp) *može zadani trokut* ABC *prevesti: a) u direktno sukladni, b) u simetrično sukladni?*

Rješenje: Usmjereni pravac a i po volji točku A na njemu možemo prevesti u zadani usmjereni pravac a' i po volji točku A' na njemu s dva osnovna pomaka (isporedi točku 14.). Iz toga slijedi,



Sl. 12

da se direktno sukladni trokuti dadu prevesti jedan u drugi s dva osnovna pomaka, a simetrično sukladni sa tri. Za simetrično sukladne trokute treba izvršiti još osnovni pomak oko jedne stranice, da bi trokuti došli do pokrivanja.

O kutovima u trokutu

59. — Dokazati ćemo sada, da za trokute hiperbolične ravnine vrijedi ovaj poučak:

U svakom trokutu ABC *je zbroj nutarnjih kutova manji od* π, *t. j.* $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Dokaz. a) Da bi dokazali gornji poučak, dokazat ćemo najprije taj poučak za pravokutne trokute.

Neka su $a = \overrightarrow{M_1 M_2}$ i $b = \overrightarrow{N_1 N_2}$ dva okomita pravca, koji određuje pravokutni trokut ABC (sl. 12.). Označimo sa S polovište hipotenuze AB. Spustimo iz točke S okomicu d na katetu b (d je spojnica točke S sa polom B' katete b), označimo nožište sa D. Odredimo zatim u točki B okomicu e na katetu a (e je spojnica točke B sa polom A' katete a), označimo $d \times e = E$. Napokon spustimo iz točke B okomicu f na pravac $d = SD$ (f je spojnica točke B sa polom D' pravca d), označimo $d \times f = F$. Točke su C i A', zatim D i D' dva para konjugiranih polova na pravcu b, oni određuju na pravcu b s obzirom na apsolutu hiperboličnu involuciju parova konjugiranih polova, zato se parovi točaka C i A', zatim D i D' među sobom ne rastavljaju. Budući da je točka D unutar dužine

$\overrightarrow{CA}$, zato je točka D' unutar dužine $\overrightarrow{AA'}$, a iz toga slijedi, da je kut CBF manji od kuta $CBE = \frac{\pi}{2}$. Prema točki 57., c), pravokutni trokuti ADS i BSF su sukladni, jer se podudaraju u hipotenuzi i jednom kutu uz nju (vršni kutovi kod S). Zato je $\sphericalangle DAS = \sphericalangle SBF$, a $\sphericalangle SBF + \sphericalangle SBC = \sphericalangle CBF < \frac{\pi}{2}$ ili $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, kako smo željeli dokazati.

b) Ako u po volji zadanome trokutu ABC spustimo okomicu na najveću stranicu, dobivamo dva pravokutna trokuta. Promatranjem nutarnjih kutova tih trokuta možemo onda dokazati, da je zbroj nutarnjih kutova u trokutu ABC manji od π, čime je dokaz potpuno završen.

Napomena. Izraz $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ zove se defekt trokuta ABC.

60. — Neka je β_1 izvanji kut trokuta ABC kod vrha B. Budući da je $\delta = \pi - (\alpha + \beta + \gamma) > 0$, a $\beta + \beta_1 = \pi$, slijedi, da je $\alpha + \gamma < \beta_1$.

Poučak: *U hiperboličnoj ravnini je izvanji kut u trokutu veći od zbroja suprotnih nutarnjih kutova.*

Konkavni mnogokuti

61. — Konkavni se mnogokut može sa $\frac{n(n-3)}{2}$ dijagonale povučenih iz bilo kojeg vrha razdijeliti na $(n-2)$ trokuta. Nutarnji kutovi tih trokuta određuju nutarnje kutove zadanog mnogokuta. Suma defekata tih pojedinih trokuta ne ovisi od izbora vrha iz kojeg smo potezali dijagonale. Zato se izraz $\delta = (n-2)\pi - \sum_i \alpha_i > 0$ zove defekt mnogokuta sa n stranica.

Iz toga slijedi, da je zbroj nutarnjih kutova u četverokutu manji od 2π, zbroj nutarnjih kutova u peterokutu manji od 3π itd.

Odnos stranica i kutova u trokutu

62. — Budući da se poučci u vezi s odnosom stranica i kutova u trokutu dokazuju pomoću nutarnjih i vanjskih kutova trokuta na isti način kao u euklidskoj geometriji, ne ćemo te dokaze ponavljati, nego samo spomenuti te poučke:

a) Zbroj dviju stranica u trokutu uvijek je veći od treće stranice.

b) Razlika dviju stranica u trokutu uvijek je manja od treće stranice.

c) Dužina je najkraća spojnica svojih krajnjih točaka.

d) Nasuprot većem kutu leži u trokutu veća stranica; vrijedi i obrat. Nasuprot jednakim kutovima leže jednake stranice; vrijedi i obrat.

Poučci o sukladnosti trokuta

63. — Za trokute hiperbolične ravnine imademo 5 poučaka o sukladnosti trokuta, koji glase:

I. Dva su trokuta sukladna, ako se podudaraju u jednoj stranici i u dva susjedna kuta toj stranici.

II. Dva su trokuta sukladna, ako se podudaraju u dvije stranice i u kutu, kojega zatvaraju te stranice.

III. Dva su trokuta sukladna, ako se podudaraju u jednoj stranici, u jednom od kutova toj stranici susjednih i u kutu nasuprot toj stranici.

IV. Dva su trokuta sukladna, ako se podudaraju u sve tri stranice.

V. Dva su trokuta sukladna, ako se podudaraju u sva tri nutarnja kuta. Dokazi poučaka I., II. i IV. izvode se na isti način kao u euklidskoj geometriji, a dokazi za III. i V. poučak izvode se na temelju poučka o vanjskome kutu, gledaj točku 60.*).

Korespondentne točke

64. — Definicija: Ako bilo koji pravac a zadanog pramena (1., 2. ili 3. vrste) prevedemo pomoću osnovnog pomaka (Pp) u pravac a' istog pramena, onda pridružene točke na pravcima a i a' pomoću (Pp) zovu se korespondentne točke.

Iz svojstva osnovnog pomaka (Pp) slijedi, da je pravac p simetrala pravaca a i a', a da korespondentne točke na pravcima a i a' leže simetrično prema pravcu p.

65. — *Konstrukcija korespondentnih točaka u pramenu pravaca 1. vrste.* Dva pravca $a = M_1M_2$ i $b = N_1N_2$ hiperbolične ravnine, koji se sijeku u točki S, određuju pramen pravaca 1. vrste (sl. 13.). Označimo sa s polaru točke S s obzirom na apsolutu k. Osnovni pomak (Pp) koji prevodi pravac $a = M_1M_2$ u pravac $b = N_1N_2$ i osnovni pomak $(P'p')$ koji prevodi pravac $a = M_1M_2$ u pravac $b = N_2N_1$, imaju svoje centre P i P' na polari s točke S, a određeni su sa $M_1N_1 \times s = P$ i $M_1N_2 \times s = P'$ (slijedi to iz određenja osnovnih pomaka (Pp) i $(P'p')$, isporedi točku 13.).

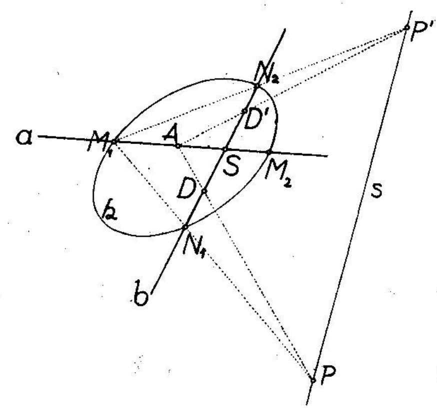
Ako je A po volji točka na pravcu a, onda s njom korespondentne točke D i D' na pravcu b leže na spojnicama AP i AP', t. j. $D = AP \times b$, $D' = AP' \times b$.

66. — *Konstrukcija korespondentnih točaka u pramenu 2. vrste.*

a) Dva mimosmjerna pravca $a = M_1M_2$ i $b = N_1N_2$ hiperbolične ravnine određuju pramen pravaca 2. vrste. Označimo sa $s = R_1R_2$

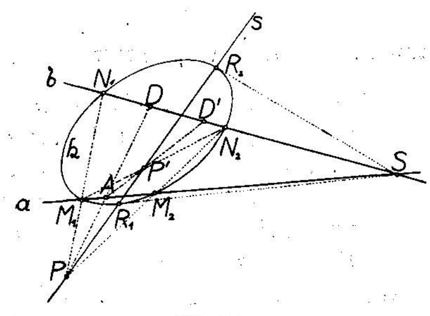
*) Isporedi Jouel, Vorlesungen über projektive Geometrie, Berlin 1934, str. 178.

njihovu zajedničku okomicu ili os, a sa S pol te osi s obzirom na apsolutu k. Osnovni pomak (Pp) koji prevodi pravac $a = M_1M_2$ u pravac $b = N_1N_2$ i osnovni pomak $(P'p')$ koji prevodi pravac $a = M_1M_2$ u pravac $b = N_2N_1$ imaju svoje centre P i P' na osi s, a određeni su sa $M_1N_1 \times s = P$ i $M_1N_2 \times s = P'$ (sl. 14.). Ako je A po volji točka na pravcu a, s njom korespondentne točke D i D' na pravcu b leže na spojnicama AP i AP', t. j. $D = AP \times b$, $D' = AP' \times b$.

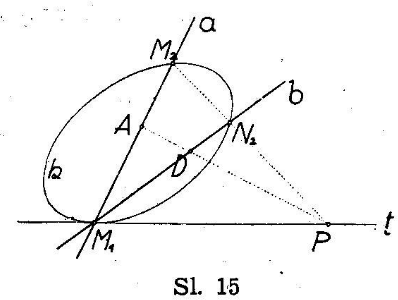


Sl. 13

b) Zadani su dva pravca a i b iz pramena 2. vrste sa vrhom u točki S, koji ne sijeku apsolutu. Označimo sa s polaru točke S. Da bismo odredili točke D i D' na pravcu b koje su korespondentne sa zadanom točkom C na pravcu a, treba da odredimo osnovne pomake (Pp) i $(P'p')$ koji prevode pravac a u pravac b prema točki 12. Onda točke D i D' leže na spojnicama CP i CP'.



Sl. 14



Sl. 15

67. — *Konstrukcija korespondentnih točaka u pramenu pravaca 3. vrste.* Dvije paralele $a = M_1M_2$ i $b = N_1N_2$ u hiperboličnoj ravnini određuju pramen pravaca 3. vrste sa zajedničkom beskonačnom točkom M_1. Osnovni pomak (Pp), koji prevodi pravac $a = M_1M_2$ u pravac $b = N_1N_2$, ima svoj centar na tangenti t apsolute k sa diralištem u točki M_1, t. j. $M_2N_2 \times t = P$, (sl. 15.). Ako je A po volji točka pravca a, onda s njom korespondentna točka D na pravcu b leži na spojnici AP, t. j. $B = AP \times b$.

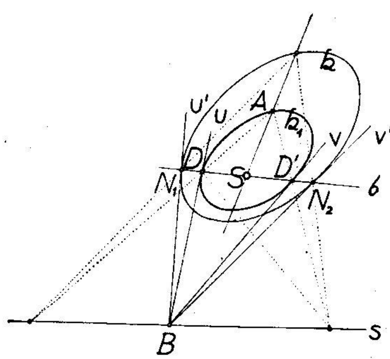
Kružnice

68. — Kružnicu možemo definirati u euklidskoj geometriji i na slijedeći način: Geometrijsko mjesto točaka na pravcima zadanog pramena s vrhom u točki S, koje su korespondentne s po volji zadanom točkom A, određuje kružnicu sa središtem u točki S i polumjerom $r = SA$.

U hiperboličnoj geometriji definirat ćemo kružnicu na isti način. Budući da u hiperboličnoj ravnini imamo tri vrste pramena, imat ćemo zato i tri vrste kružnica. Kružnica, koja je određena pomoću pramena 1., 2. i 3. vrste, zove se kružnica 1., 2. ili 3. vrste.

69. — *Kružnica 1. vrste.* Definicija: Geometrijsko mjesto točaka na pravcima pramena 1. vrste, koje su korespondentne s po volji zadanom točkom A, zove se kružnica 1. vrste.

Iz te definicije slijedi, da je kružnica 1. vrste geometrijsko mjesto točaka u ravnini, koje su jednako udaljene od točke S, vrha zadanog pramena pravaca 1. vrste. Zato točka S predstavlja sre-



Sl. 16

dište, a dužina SA određuje polumjer te kružnice, (svi nazivi u vezi s kružnicama prenose se direktno iz euklidske geometrije).

70. — Zadatak. *Konstruiraj kružnicu 1. vrste, ako je zadano središte* S *i po volji točka* A *te kružnice (sl. 16.).*

Rješenje: Zadaća se svodi na to, da prema točki 65. odredimo sa točkom A korespondentne točke na svima pravcima pramena 1. vrste s vrhom u točki S. Korespondentne točke D i D' na svakom pravcu $b = N_1N_2$ iz zadanog pramena određuju dijametar DD' tražene kružnice k_1 1. vrste (jer je $SD = SD'$). Na taj način možemo odrediti po volji mnogo parova dijametralnih točaka kružnice k_1, a to znači, da je njena konstrukcija time potpuno određena.

71. — Analizom konstrukcije kružnice k_1 1. vrste izlazi, da ta konstrukcija predstavlja centralnu kolineaciju sa centrom u točki S, sa osi u polari s (sl. 16.), koja preslikava apsolutu k u traženu kružnicu k_1 1. vrste, dakle u koniku k_1, kojoj pripada obzirom na pol S ista polara s kao i apsoluti k; označit ćemo tu centralnu kolineaciju sa $(S + s)$.

72. — Centralna kolineacija $(S+s)$ preslikava parove tangenata u' i v' apsolute k u krajnjim točkama tetiva kroz točku S u parove tangenata u i v u dijametralnim točkama kružnice k_1 na tim istim tetivama. Tangente u i v i tangente u' i v' sijeku se u istoj točki na zajedničkoj polari s. Iz toga slijedi, da svima točkama B na zajedničkoj polari s apsolute i kružnice k_1 odgovara jedna te ista polara za apsolutu i za kružnicu k_1, a to znači: a) da su tangentne kružnice 1. vrste okomite na spojnicu dirališta sa središtem kružnice; b) apsoluta k i kružnica k_1 određuju na zajedničkoj polari s istu eliptičnu involuciju parova konjugiranih polova, imaju dakle na toj polari s zajedničke imaginarne točke I_1 i I_2; c) u točki S imaju apsoluta k i kružnica k_1 zajedničku eliptičnu involuciju parova konjugiranih polara. Dvostruke imaginarne zrake te involucije su zajedničke tangente apsolute k i kružnice k_1 u točkama I_1 i I_2 na zajedničkoj polari s.

Kružnica 1. vrste, projektivno shvaćena, predstavlja koniku koja dodiruje apsolutu k u dvije imaginarne točke.

73. — Po volji točki B na zajedničkoj polari s apsolute k i kružnice k_1 pripada s obzirom na te konike jedna te ista polara b, zato osnovni pomak (Bb) prevodi apsolutu k i kružnicu k_1 u sebe, tek točke na pravcima kroz točku B zamjenjuju pri tome svoja mjesta. Iz toga slijedi, da je kružnica 1. vrste simetrična krivulja s obzirom na svaki dijametar.

U hiperboličnoj ravnini ima kružnica 1. vrste neka svojstva, koja su analogna svojstvima kružnice euklidske geometrije.

74. — N a p o m e n a. Postupimo li prema zadatku u točki 70., ali s tom razlikom, da nam točka A predstavlja nepravu točku, dobit ćemo uz istu konstrukciju geometrijsko mjesto točaka u projektivnoj ravnini, koje su uz hiperboličnu metriku sve jednako udaljene od prave točke S, samo je sada duljina SA određena kompleksnim mjernim brojem. Tako određeno geometrijsko mjesto točaka zove se neprava kružnica 1. vrste.

Sve prave i neprave kružnice 1. vrste skupa sa apsolutom, projektivno shvaćene određuju pramen konika, koje imaju u točki S zajedničku elip. involuciju parova konjugiranih polara, a na zajedničkoj polari s imaju zajedničku elip. involuciju parova konjugiranih polova (sl. 17.). Sve konike tog pramena dodiruju se u dvjema imaginarnim točkama na zajedničkoj polari s, u imaginarnim dvostrukim točkama zajedničke elip. involucije parova konjugiranih polova.

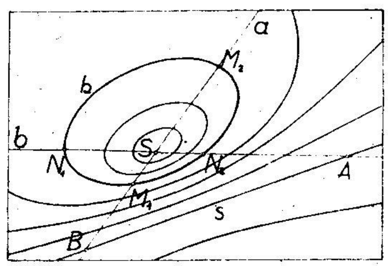
Ako kojugod od ovih konika odaberemo za apsolutu, onda u hiperboličnoj geometriji, koja je određena tom apsolutom, sve ostale konike tog pramena predstavljaju sve prave i neprave kružnice 1. vrste sa središtem u točki S.

Kružnica 2. vrste. Definicija: Geometrijsko mjesto točaka na pravcima pramena 2. vrste, koje su korespondentne sa po volji zadanom točkom A, zove se kružnica 2. vrste.

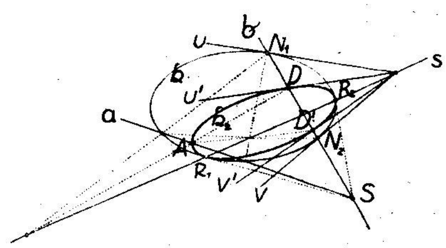
75. — Zadatak. *Konstruiraj kružnicu* k_2 *2. vrste, ako je zadana os s pramena 2. vrste i po volji točka A te kružnice, (slika 18.).*

Rješenje: Prema točki 66. treba odrediti s točkom A korespondentne točke na svim pravcima pramena 2. vrste sa osi s, koji se u tome slučaju zovu radijvektori kružnice 2. vrste. Korespondentne točke D i D' na svakom pravcu iz zadanog pramena određuju dvije točke, koje ćemo zvati dijametralnim točkama kružnice k_2 2. vrste. Na taj način možemo odrediti po volji mnogo parova dijametralnih točaka tražene kružnice 2. vrste, dakle je time njena konstrukcija potpuno određena.

76. — Analizom te konstrukcije dolazimo do analognih zaključaka kao kod analize konstrukcije kružnice 1. vrste.



Sl. 17



Sl. 18

Konstrukcija kružnice 2. vrste predstavlja centralnu kolineaciju $(S+s)$, koja apsolutu k preslikava u traženu kružnicu k_2 2. vrste.

77. — Postupajući na isti način, kao kod istraživanja svojstava kružnice 1. vrste (isporedi) točke 72., 73.), došli bismo do ovih činjenica:

a) kružnica 2. vrste je konika, koja apsolutu k dodiruje u dvije realne točke, u presjecištima R_1 i R_2 polare s sa apsolutom k; b) tangente u dijametralnim točkama kružnice 2. vrste okomite su radijvektor koji prolazi tim točkama; c) kružnica 2. vrste simetrična je krivulja s obzirom na os s pramena pravaca 2. vrste i s obzirom na svaki radijvektor; d) iz toga slijedi, da je svaka točka kružnice 2. vrste jednako udaljena od osi s zadanog pramena pravaca. Pravac s zove se os kružnice 2. vrste, a sama kružnica predstavlja geometrijsko mjesto točaka, koje su jednako udaljene od osi s. Kružnica 2. vrste predstavlja ekvidistantu osi s.

78. — Ako spojimo po volji dvije točke A i B na kružnici 2. vrste, koje su na suprotnim stranama osi s, točka C u kojoj os s siječe tu spojnicu, raspolavlja dužinu AB.

Dokaz: Odredimo točke $D = SA \times s$ i $E = SB \times s$, (S je pol osi s). Pravokutni trokuti ADC i BEC su sukladni po III. poučku, dakle su hipotenuze AC i BC jednake.

79. — Neka je $a = N_1N_2$ po volji radijvektor kružnice k_2 2. vrste, na kojem leže dijametralne točke D i D'. Prema hiperboličnoj metrici projektivne ravnine dužine su SD i $D'S$ jednake, samo je njihov mjerni broj kompleksan. Neprava točka S, pol osi s, predstavlja dakle središte kružnice 2. vrste.

80. — Napomena. Postupimo li prema zadatku u točki 75., ali s tom razlikom, da nam točka A predstavlja nepravu točku, dobit ćemo nepravu kružnicu 2. vrste. Razlikujemo dva slučaja: a) Ako radijvektor SA siječe apsolutu k, onda se neprava kružnica 2. vrste konstruira na isti način kao i prava kružnica 2. vrste; b) Ako radijvektor SA ne siječe apsolutu k, onda su svi radijvektori nepravi pravci. S točkom A korespondentne točke na njima, t. j. točke neprave kružnice 2. vrste, odredit ćemo na način kako je to pokazano u točki 66. b). Sve prave i neprave kružnice 2. vrste skupa sa apsolutom, projektivno shvaćene, određuju pramen konika, koje dodiruju apsolutu k u realnim točkama R_1 i R_2, t. j. u točkama $k \times s$. U taj pramen spadaju i dvije degenerirane konike: jednu od njih predstavlja dvostruko uzeta os s, a drugu obje tangente SR_1 i SR_2 apsolute k, koje prolaze kroz točku S. Zato se u hiperboličnoj ravnini svaki pravac može shvatiti kao kružnicu 2. vrste, kao ekvidistantu koja je pokrila svoju os, koja se u tome slučaju zove nul-linija.

Kružnica 3. vrste. Definicija: Geometrijsko mjesto točaka na pravcima pramena 3. vrste, koje su korespondentne s po volji zadanom točkom A, zove se kružnica 3. vrste.

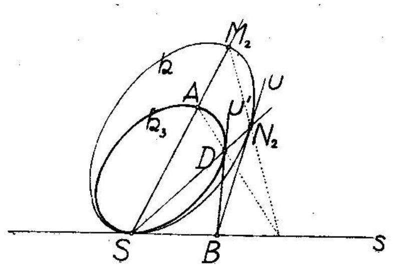
81. — Zadatak. *Konstruiraj kružnicu 3. vrste, ako je zadan pramen 3. vrste sa dvije paralele* $a = SM_2$ *i* $b = SN_2$ *i po volji neka točka* A *te kružnice (sl. 19.).*

Rješenje: Prema točki 67. moramo odrediti sa točkom A korespondentne točke D na svima pravcima zadanog pramena 3. vrste, koji se u tome slučaju zovu radijvektori zadane kružnice. Tako dolazimo do po volji mnogo točaka tražene kružnice 3. vrste, dakle je njena konstrukcija na taj način potpuno određena.

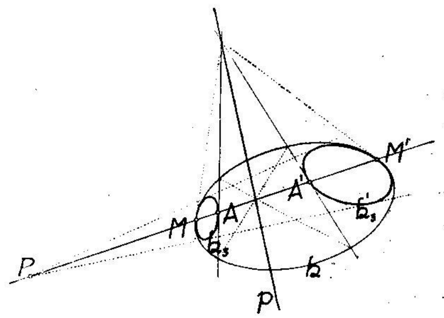
82. — Analizom te konstrukcije izlazi, da ona predstavlja centralnu kolineaciju $(S+s)$, kojoj je centar točka S, a os tangenta s apsolute k u točki S. Centralna kolineacija $(S+s)$ preslikava apsolutu k u traženu kružnicu k_3 3. vrste. Zato je kružnica k_3 3. vrste konika, koja u diralištu S sa apsolutom k ima 4 zajedničke točke. Ta točka S predstavlja središte kružnice k_3, radi toga se kružnica 3. vrste zove još granična kružnica.

Postupajući na analogan način kao u točkama 72. i 73., dokazali bismo ova svojstva granične kružnice ili kružnice 3. vrste: a) Kružnica 3. vrste je konika, koja ima s apsolutom četverostruko dirałište; b) tangente u točkama kružnice 3. vrste su okomite na radijvektore koji prolaze kroz dirałište; c) kružnica 3. vrste simetrična je obzirom na svaki radijvektor; d) jednakim tetivama odgovaraju na kružnici 3. vrste jednaki lukovi.

83. — Kružnice 3. vrste među sobom su sukladne. Dokaz: Neka su točke M i M' središta dviju po volji kružnica 3. vrste, označimo ih sa k_3 i k_3' (sl. 20.). Označimo sa A i A' točke u kojima pravac $a = MM'$ siječe granične kružnice k_3 i k_3', *t. j.* $A = a \times k_3$, $A' = a \times k_3'$. Odredimo li simetralu p dužine AA' i pol P te simetrale, onda osnovni pomak (Pp) prevodi točku M u točku M', a točku A u točku A', a to znači, da kružnica k_3 prelazi u k_3', jer su te kružnice točkama M i A, odnosno M' i A' jednoznačno određene.



Sl. 19



Sl. 20

Napomena. Kada bi točka A predstavljala nepravu točku u projektivnoj ravnini, dobili bi uz istu konstrukciju (isporedi točku 72.) nepravu kružnicu 3. vrste.

Sve prave i neprave kružnice 3. vrste sa zajedničkim središtem S predstavljaju pramen konika, koje imaju sa opsolutom četverostruko dirašte.

Veza između hiperbolične i euklidske metrike

84. — Promatrajmo u projektivnoj ravnini apsolutu k i pramen koncentričnih kružnica 1. vrste oko središta S (sl. 17.). U točki 74. opisali smo projektivna svojstva tako određenog pramena konika. Sve konike tog pramena imaju s obzirom na središte S zajedničku polaru s, na kojoj se nalazi zajednička elip. involucija parova konjugiranih polova svih konika tog pramena. Te konike iz oblika elipse preko oblika parabole i hiperbole priljubljuju se sve više polari s. Polara s predstavlja, dvostruko uzeta, degeneriranu koniku tog pramena. Ako bilo koju koniku iz tog pramena odaberemo za apsolutu, pokazali smo, da sve ostale konike iz tog pramena predstavljaju obzirom na odabranu apsolutu opet kružnice 1. vrste sa središtem u točki S.

Povucimo točkom S dva među sobom okomita pravca $a = M_1M_2$ i $b = N_1N_2$ (sl. 17.). Polovi A i B pravaca a i b s obzirom na apsolutu k i sve koncentrične kružnice 1. vrste leže na polari s, t. j. $A = b \times s$ i $B = a \times s$. Neprava točka A određuje pramen pravaca 2. vrste, kojima je pravac a zajednička okomica ili os pramena. Isto tako i neprava točka B određuje pramen pravaca 2. vrste, kojemu predstavlja pravac b zajedničku okomicu ili os pramena.

Odaberemo li za apsolutu što veću koniku iz tog pramena, područje pravih točaka u projektivnoj ravnini sve je veće, a područje nepravih točaka sve je manje. Ako odaberemo za apsolutu koniku k, koja se je već dovoljno priljubila uz polaru s, onda se je područje pravih točaka proširilo skoro na cijelu projektivnu ravninu, a neprave točke nalaze se izvan apsolute u uskoj pruzi oko polare s.

Pređimo sada na promatranje graničnog slučaja, kada ćemo za apsolutu odabrati degeneriranu koniku iz tog pramena, dvostruko prekrivenu polaru s. Područje pravih točaka proširilo se na cijelu projektivnu ravninu, a sve su neprave točke pale na polaru s. Geometrijsko mjesto beskonačnih točaka predstavlja polara s, jer ona — dvostruko uzeta — predstavlja apsolutu k.

Svaki pravac p projektivne ravnine ima u tome slučaju samo jednu beskonačnu točku $p \times s$, a parovi konjugiranih polova na svakom pravcu p čine paraboličnu involuciju (jer su sve neprave točke pravca p pale na beskonačnu točku $p \times s$). Ispitat ćemo sada u kojem se odnosu nalaze prije spomenuti prameni 2. vrste sa osima $a = M_1M_2$ i $b = N_1N_2$, $a \perp b$. Točke M_1 i M_2 pale su u jedinu beskonačnu točku pravca a, t. j. u točku $B = a \times s$; a točke N_1 i N_2 pale su u jedinu beskonačnu točku pravca b, t. j. u točku $A = b \times s$. Kod toga su svi polovi pravaca pramena 2. vrste sa osi a pali u beskonačnu točku $B = a \times s$, a svi polovi pravaca pramena 2. vrste sa osi b u beskonačnu točku $A = b \times s$. Iz toga slijedi, da je svaki pravac iz prvog pramena okomit na svakom pravcu iz drugog pramena, oni dakle dijele ravninu na četverokute sa četiri prava kuta, sa defektom $\delta = 0$, a to svojstvo pripada samo četverokutima euklidske metrike. Vidimo, da smo na taj način uveli u projektivnu geometriju euklidsku metriku, dobivamo tako projektivnu interpretaciju euklidske geometrije.

85. — Promatramo li specijalan slučaj, kada nam apsolutu k predstavlja euklidska kružnica u projektivnoj ravnini, a točka S njeno središte, onda sve kružnice 1. vrste s obzirom na tu apsolutu predstavljaju obične koncentrične kružnice sa središtem u točki S. Zajednička polara s svih tih kružnica obzirom na točku S predstavlja beskonačno daleki pravac, na kojem se nalazi elip. involucija parova konjugiranih polova svih kružnica, a dvostruke točke te involucije predstavljaju apsolutne kružne točke. (Isporedi točku 4.).

Iz toga zaključujemo: Ako odaberemo za apsolutu k beskonačno daleki pravac — dvostruko uzet — sa apsolutnim kružnim točkama na njemu, uvedena metrika primjenjena na tako odabranu apsolutu, određuje euklidsku geometriju.

Poznato je, da je već godine 1853. matematičar Laguerre u 18. godini svog života odredio na projektivan način mjerni broj kuta u obliku $\varphi = \frac{i}{2} \ln (m_1 m_2 a b)$, gdje su a i b krakovi kuta φ, a m_1 i m_2 minimalni pravci, koji prolaze kroz vrh V tog kuta, koji zapravo predstavljaju tangente spuštene iz vrha V na degeneriranu apsolutu, na beskonačno daleki pravac s apsolutnim kružnim točkama na njemu. Prema tome je mjerni broj tog kuta određen na jednak način kao mjerni broj kuta u hiperboličnoj geometriji.

Dakako, da mladi Laugerre nije bio svijestan dalekosežnosti formule $\varphi = \frac{i}{2} \ln (m_1 m_2 a b)$. Tek je matematičar F. Klein 20 godina kasnije prvi uvidio i pokazao, da je tom formulom određen na projektivan način mjerni broj kuta u vezi sa apsolutom euklidske geometrije.

D o d a t a k. Upoznavši i s te strane euklidsku metriku, možemo većini konstrukcija i likova u hiperboličnoj ravnini naći adekvatne konstrukcije i likove u euklidskoj ravnini.

Tako, na primjer, kružnici 1. vrste u hiperboličnoj ravnini odgovara kružnica u euklidskoj ravnini. Kružnici 2. vrste ili ekvidistanti u hiperboličnoj ravnini odgovaraju u euklidskoj ravnini dva paralelna pravca, koji su ekvidistantni od zadanog pravca — zadane osi. Kružnici 3. vrste odgovaraju na isti način dva paralelna pravca: jedan pravac u konačnosti i drugi u beskonačnosti.

Rotacije u hiperboličnoj ravnini

86. — Neka su u hiperboličnoj ravnini zadane dvije jednake dužine AB i $A'B'$, koje se ne mogu prevesti osnovnim pomakom jedna u drugu. Odredimo simetrale s_1 i s_2 dužina AA' i BB', a njihovo sjecište označimo sa S. Pri tome mogu nastupiti četiri slučaja, simetrale s_1 i s_2 mogu se sjeći u pravoj, u nepravoj ili u beskonačnoj točki, ili padaju zajedno.

a) Ako je točka $S = s_1 \times s_2$ prava točka, onda se oko točke S može opisati kružnica k_1 1. vrste kroz točke A i A', i koncentrična kružnica k_1' kroz točke B i B'. Zato možemo dužinu AB rotacijom za kut ASA' oko točke S pomaknuti u položaj $A'B'$.

Budući da je ravnina određena sa tri točke, izvedena rotacija pomakla je sve točke hiperbolične ravnine po koncentričnim kružnicama oko točke S za jednak kut rotacije ASA', jedino je točka S pri tome ostala na miru. Takovo se gibanje u hiperboličnoj ravnini zove rotacija 1. vrste, a točka S središte te rotacije.

b) Ako se simetrale s_1 i s_2 sijeku u nepravoj točki S, tada polara s točke S predstavlja zajedničku okomicu ili os simetrala s_1 i s_2. Kroz točke A i A' možemo opisati kružnicu k_2 2. vrste s osi s, isto tako i kroz točke B i B' možemo opisati kružnicu k_2'

2. vrste sa istom osi s. Uzmemo li u obzir da je hiperbolična metrika definirana u cijeloj projektivnoj ravnini, onda s obzirom na tu metriku možemo shvatiti kružnice k_2 i k_2' kao koncentrične kružnice oko središta S. Dužinu AB možemo pomaknuti rotacijom oko točke S u dužinu $A'B'$.

Gibanje u hiperboličnoj ravnini, kod kojeg sve točke putuju po kružnicama 2. vrste sa zajedničkom osi, koja ostaje kao cjelina na miru, zove se rotacija 2. vrste. Na zajedničkoj osi ostaju samo beskonačne točke na miru, sve ostale točke te osi mijenjaju mjesto. Pravci koji su okomiti na zajedničku os, prelaze kod tog gibanja opet u okomice te zajedničke osi.

c) Ako se simetrale s_1 i s_2 sijeku u beskonačnoj točki S, onda se kroz točke A i B, odnosno kroz točke A' i B' mogu položiti dvije kružnice k_3 i k_3' 3. vrste sa zajedničkim središtem u točki S. Zato se dužina AB može oko točke S pomaknuti u položaj $A'B'$, pri čemu točke A i B opisuju kružnice 3. vrste.

Gibanje u hiperboličnoj ravnini, kod kojeg sve točke putuju po koncentričnim kružnicama 3. vrste sa središtem u točki S, a pravci pramena 3. vrste sa vrhom u točki S prelaze u pravce istog pramena, zove se rotacija 3. vrste.

d) U slučaju da simetrale s_1 i s_2 dužina AB i $A'B'$ padnu zajedno, t. j. $s_1 \equiv s_2$, onda je središte S rotacije određeno točkom $AB \times A'B'$.

Na temelju svega toga možemo reći: Rotacija 1. vrste ostavlja na miru samo jednu točku hiperbolične ravnine. Rotacija 2. vrste ne ostavlja na miru nijednu točku hiperbolične ravnine, ali ostavlja na miru dvije beskonačne točke. Rotacija 3. vrste ne ostavlja na miru nijednu točku u hiperboličnoj ravnini, ali ostavlja na miru jednu beskonačnu točku.

Napomena. Rotaciji 1. vrste u hiperboličnoj ravnini odgovara u euklidskoj ravnini rotacija oko konačne točke. Rotaciji 2. vrste u hiperboličnoj ravnini odgovara u euklidskoj ravnini translacija koja je paralelna sa zadanim pravcem. Rotaciji 3. vrste u hiperboličnoj ravnini odgovara u euklidskoj ravnini translacija, koja je okomita na zadani pravac (translacija u euklidskoj ravnini predstavlja zapravo rotaciju oko beskonačne točke, koja je određena okomicom na pravac translacije).

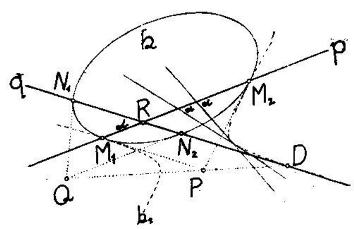
87. — Zadatak. *Odredi geometrijsko mjesto pravaca, koji sa zadanim pravcem* $\mathrm{p} = \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2$ *određuju jednaki kut* α *(slika 21.).*

Rješenje: Neka po volji pravac $q = N_1N_2$ određuje sa zadanim pravcem $p = M_1M_2$ kut α i neka je $p \times q = R$. Odredimo pol P pravca p i pol Q pravca q. Odredimo zatim nepravu kružnicu k_2 2. vrste sa središtem u točki P, a koja je određena tangentom q. Os te kružnice k_2 je pravac p, zato ta kružnica dodiruje apsolutu k u točkama M_1 i M_2. Diralište D tangente q sa kružnicom k_2 je točka $D = q \times PQ$.

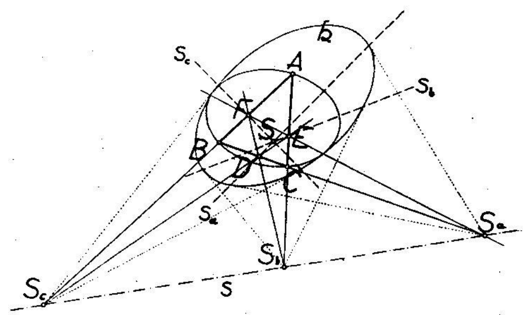
Zarotirajmo kut α sa vrhom u točki R oko točke P. Krak p tog kuta pomiče se po pravcu p, jer je pravac p kružnica druge vrste sa središtem u točki P, t. j. nullinija. Kod te rotacije tangenta q prelazi opet u tangentu kružnice k_2. Iz toga slijedi: Tangente kružnice 2. vrste određuju geometrijsko mjesto pravaca, koji zatvaraju sa osi te kružnice jednaki kut.

Trokutu opisane kružnice

88. — U zadanom trokutu ABC hiperbolične ravnine spojnica polovišta D i E stranica BC i AC predstavlja srednjicu DE, koja leži nasuprot stranici AB. Spustimo iz točaka A, B i C okomice na srednjicu DE, označimo nožišta sa A_1, B_1 i C_1. Prema III. poučku su pravokutni trokuti EA_1A i EC_1C, zatim DB_1B i DC_1C sukladni, zato su udaljenosti točaka A, B i C od srednjice DE među sobom jednake, t. j. $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Točke A, B i C leže zato na ekvidistanti, kojoj je os srednjica DE. Budući da je stranica AB tetiva te ekvidistante, t. j. kružnice 2 .vrste, simetrala s te stranice predstavlja radijvektor te kružnice, koji je okomit na srednjicu DE. Time smo dokazali dva poučka: a) *Simetrala stranice okomita je na srednjicu nasuprot toj stranici;* b) *Kroz vrhove svakog trokuta* ABC *prolaze tri kružnice 2. vrste.*



Sl. 21



Sl. 22

89. — Iz gornjeg slijedi dalje, da se svaka stranica trokuta i srednjica nasuprot njoj sijeku u polu simetrale te stranice s obzirom na apsolutu, (jer je ta simetrala okomita na tu srednjicu). Označimo sa s_a, s_b i s_c simetrale stranica a, b i c trokuta ABC, koje prolaze kroz polovišta D, E i F tih stranica, a njihove polove sa S_a, S_b i S_c (sl. 22.). Prema točki 42., uzevši u obzir da osnovni pomak predstavlja centralnu involutornu kolineaciju, slijedi $(S_a D B C) = -1$, $(S_b E A C) = -1$, $(S_c F B A) = -1$. To dokazuje, da se točke S_a, S_b i S_c nalaze na jednom nepravom pravcu s. Iz toga dalje slijedi, da simetrale s_a, s_b i s_c prolaze sve kroz jednu pravu točku S, koja je jednako udaljena od vrhova trokuta ABC.

U slučaju da nepravi pravac s tangira apsolutu k, onda simetrale s_a, s_b i s_c prolaze tim diralištem. Iz svega toga slijedi:

Kroz vrhove trokuta u hiperboličnoj ravnini prolazi uvijek jedna kružnica 1. ili 3. vrste sa središtem u zajedničkom sjecištu simetrala stranica tog trokuta.

Budući da znamo konstruirati simetrale stranica, možemo konstruirati središte, dakle i samu kružnicu 1. ili 3. vrste, koja prolazi kroz vrhove trokuta.

90. — Na temelju svega toga zaključujemo:

U hiperboličnoj ravnini mogu se kroz vrhove trokuta opisati četiri kružnice, od kojih je jedna 1. ili 3. vrste, a ostale tri su kružnice 2. vrste.

Vrhovi trokuta A, B i C određuju na pravcima a, b i c tri para orijentiranih dužina: $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{AC}$, dakle i tri para pripadnih simetrala:

$$s_a \text{ i } \bar{s}_a, \quad s_b \text{ i } \bar{s}_b, \quad s_c \text{ i } \bar{s}_c \quad \text{(točka 42.)}.$$

Po tri od tih simetrala sijeku se u središtima kružnica, koje se mogu opisati kroz vrhove trokuta. To su središta

$$S = s_a s_b s_c, \quad S_1 = s_a \bar{s}_b \bar{s}_c, \quad S_2 = s_b \bar{s}_a \bar{s}_c \quad \text{i} \quad S_3 = s_c \bar{s}_a \bar{s}_b \,.$$

Dakako, da točke S_1, S_2 i S_3 predstavljaju polove srednjica EF, DF i DE zadanog trokuta.

Napomena. U euklidskoj ravnini imamo ovaj analogon: Oko trokuta ABC može se opisati kroz vrhove trokuta kružnica i tri para ekvidistantnih pravaca s obzirom na srednjice.

Trokutu upisane kružnice

91. — Označimo sa a, b i c tri pravca, koji svojim presjecištima određuju trokut ABC. Konstruirati treba sve kružnice, koji dodiruju pravce a, b i c. Postupajući na isti način kao u euklidskoj geometriji, dokazali bismo, da se po tri simetrale vršnih kutova pravaca a, b i c sijeku u jednoj točki. Dobivamo tako ukupno četiri točke, koje predstavljaju središta traženih kružnica. Ako iz tih središta spustimo okomice na pravce a, b i c, dobivamo dirališta tih kružnica s pravcima a, b i c. Sada možemo te kružnice konstruirati, jer poznamo njihova središta i točke kroz koje one prolaze.

Simetrale nutarnjih kutova trokuta sijeku se uvijek u pravoj točki, u središtu kružnice 1. vrste. Po tri ostale simetrale sijeku se u središtima kružnica 1., 2. ili 3. vrste.

Kako vidimo, ovdje imamo potpunu analogiju sa upisanim kružnicama trokuta euklidske ravnine.

Sjecište visina

92. — Poučak: *Visine trokuta* ABC *u hiperboličnoj ravnini pripadaju pramenu pravaca 1., 2. ili 3. vrste.*

Dokaz: Visine trokuta *ABC* dobit ćemo tako, da vrhove *A*, *B* i *C* spojimo s polovima nasuprotnih stranica *a*, *b* i *c* s obzirom na apsolutu, a te spojnice, kako znademo, sijeku se samo u jednoj točki*).

93. — Poučak: *Nožišta visina u svim trokutima hiperbolične ravnine su prave točke.*

Dokaz: Kada bi, na primjer, nožište *A'* visine v_a na stranici *BC* trokuta *ABC* bila neprava točka, onda bi i visina v_a bila nepravi pravac, a to je nemoguće.

Jednakost trokuta i jednakost mnogokuta

94. — Dokazat ćemo slijedeći poučak:

Trokuti u hiperboličnoj ravnini, koji imaju jednaku površinu, imaju jednak defekt. Vrijedi i obrat:

Trokuti u hiperboličnoj ravnini, koji imaju jednak defekt, imaju jednaku površinu. Dokaz:

a) Promatrajmo trokut *ABC*. Opišimo oko njega kružnicu 2. vrste ili ekvidistantu k_2 njegove srednjice *DE* nasuprot stranici *AC*. Spustimo iz vrhova *A*, *B* i *C* okomice na srednjicu *DE*, označimo nožišta sa *A'*, *B'* i *C'*. Budući da se točke *A'*, *B'* i *C'* nalaze na ekvidistanti srednjice *DE*, dužine *AA'*, *BB'* i *CC'* su jednake, a pravokutni trokuti *BB'D* i *CC'D*, zatim *BB'E* i *AA'E* su sukladni. Zato je površina trokuta *ABC* jednaka površini četverokuta *AA'C'C* (jer su sastavljeni od sukladnih dijelova). Isto je tako defekt trokuta *ABC* jednak defektu četverokuta *AA'C'C*.

Uzmimo po volji točku *B"* na ekvidistanti k_2 s iste strane srednjice *DE* na kojoj se nalazi točka *B*. Na isti način kao prije možemo dokazati, da je površina trokuta *AB"C* jednaka površini četverokuta *AA'C'C* i da ima s njime jednak defekt. Iz toga slijedi, da su trokuti *ABC* i *AB"C* jednaki i da imaju jednak defekt.

Na temelju toga možemo svaki trokut *ABC* pretvoriti u trokut *AB"C* sa istom površinom i jednakim defektom, a da stranica *AB"* bude veća od stranice *AB*.

b) Uzmimo dva trokuta *ABC* i *A"B"C"* koji imaju jednaku površinu, neka je, na primjer stranica *AB* manja od stranice *A"B"* (tako je provedeno označivanje). Pretvorimo prema a) trokut *ABC* u jednak trokut *AB"C*, tako da bude *AB"* = *A"B"*. Položimo trokut *AB"C* na trokut *A"B"C"*, tako da stranica *AB"* padne na stranicu *A"B"*, a da se pri tome djelomično pokrivaju. Oko trokuta

*) Isporedi Jouel, Vorlesungen über projektive Geometrie, Berlin 1934, str. 15.

$A''B''C''$ opišimo ekvidistantu k_2 srednjice $E'F'$. Kada vrh C trokuta $AB''C$ nebi ležao na ekvidistanti k_2, onda bi stranica AC sjekla tu ekvidistantu u točki C' (sl. 23.). Tada bi trokut $A''B''C'$ imao prema a) istu površinu kao i trokut $A''B''C''$, dakle istu površinu kao i trokut $AB''C$, a to je samo tako moguće da bude $C' \equiv C$. Iz toga slijedi prema a), da trokuti ABC i $A''B''C''$ koji imaju jednak defekt.

c) Uzmimo sada dva trokuta ABC i $A''B''C''$ koji imaju jednak defekt, dokazat ćemo da ti trokuti imaju jednaku površinu.

Ako nemaju jednakih stranica, neka su ti trokuti tako obilježeni da bude stranica AB manja od stranice $A''B''$. Pretvorit ćemo sada trokut ABC u trokut $AB''C$, tako da bude $AB'' = A''B''$.. Položimo trokut $AB''C$ na trokut $A''B''C''$ tako, da stranica AB'' padne na stranicu $A''B''$, a da se pri tome djelomično pokrivaju. Odredimo srednjice EF i $E''F''$ trokuta $AB''C$ i $A''B''C''$, a označimo sa A_1 i A_2, sa B_1 i B_2 ortogonalne projekcije točaka A'' i B'' na srednjicu EF i $E''F''$. Četverokuti $A''B''A_1B_1$ i $A''B''A_2B_2$ imaju jednak defekt. Budući da je simetrala zajedničke stranice $A''B''$ trokuta $A''B''C''$ i $AB''C$ okomita i na srednjicu EF i na srednjicu $E''F''$, srednjice se EF i $E''F''$ ne sijeku u pravoj točki. Budući da četverokuti $A''B''A_1B_1$ i $A''B''A_2B_2$ leže simetrično prema simetrali stranice $A''B''$, radi jednakosti defekta oni imaju jednake kutove, a to znači da su ti četverokuti sukladni. Iz toga dalje slijedi, da trokuti $A''B''C''$ i $AB''C$ imaju jednaku površinu, kako smo željeli dokazati.

Iz svega toga zaključujemo, da je površina trokuta proporcionalna sa njegovim defektom.

95. — Ako se zadani mnogokut rastavi bilo kako na trokute, onda se može pokazati, da je suma defekata djelnih trokuta jednaka defektu mnogokuta. Iz toga slijedi: Mnogokuti jednakih površina imaju jednak defekt. Vrijedi i obrat: Mnogokuti jednakih defekata imaju jednake površine.

Površina mnogokuta proporcionalna je s njegovim defektom.

Asimptotski trokuti

96. — U hiperboličnoj ravnini postoji još jedna vrsta trokuta, kojima nema analognih u euklidskoj ravnini.

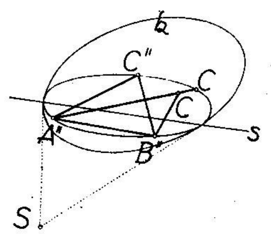
Trokut, komu padne jedan vrh u beskonačnu točku, ima dvije paralelne stranice, zove se jednostruko asimptotski trokut.

Trokut, komu padnu dva vrha u beskonačne točke, ima dva para paralelnih stranica, zove se dvostruko simptotski trokut.

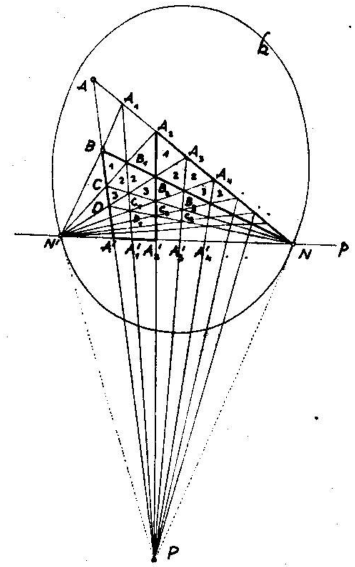
Trokut, komu su svi vrhovi pali u beskonačne točke, zove se trostruko simptotski trokut.

97. — P o u č a k: *Svi su trostruko asimptotski trokuti među sobom sukladni.*

Dokaz: Neka su zadani trostruki trokuti $N_1N_2N_3$ i $N_1'N_2'N_3'$. Osnovni pomak (Pp), koji prevodi pravac $N_1'N_2'$ u pravac N_1N_2, prevodi točku N_3 u točku N_3''. Osnovni pomak $(P'p')$, koji prevodi točku N_3'' u točku N_3, a pravac N_1N_2 ostavlja na miru, dovodi do pokrivanja tih trokuta.



Sl. 23



Sl. 24

98. — Poučak: *Asimptotski trokuti imaju konačnu površinu.*

Dokaz*): a) Promatrajmo najprije jednostruko asimptotski trokut ABN sa kutovima $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta > \frac{\pi}{2}$ (sl. 24.).

Odredimo najprije okomicu na stranicu AB, koja prolazi točkom N, neka to bude pravac $p = NN'$, označimo sa P njegov pol s obzirom na apsolutu k. Odredimo sada mrežu trokuta, odredivši njihove vrhove kako slijedi:

$$\begin{array}{lll}
A_1 = BN' \times AN, & A_2 = B_1N' \times AN, & A_3 = B_2N' \times AN, \dots \\
B_1 = A_1P \times BN, & B_2 = A_2P \times BN, & B_3 = A_3P \times BN, \dots \\
C = AP \times A_2N', & D = AP \times A_3N', & \\
C_1 = A_1P \times CN, & D_1 = A_1P \times DN, & \dots\dots\dots\dots \\
C_2 = A_2P \times CN, & D_2 = A_2P \times DN, & \\
C_3 = A_3P \times CN, & D_3 = A_3P \times DN, & \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots &
\end{array}$$

Označimo još sa A', A_1', A_2', ortogonalne projekcije točaka A, A_1, A_2 . . . . . na pravac p.

*) Isporedi: Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, II. izdanje, str. 53.

Tom smo podjelom dobili unutar jednostruko asimptotskog trokuta A_2B_2N i unutar četverokuta $A'A_2'B_2B$ beskonačno mnogo trokuta, ali se ti trokuti mogu tako pridružiti, da svakom trokutu unutar jednostruko asimptotskog trokuta A_2B_2N odgovara jednoznačno sukladan trokut unutar četverokuta $A'A_2'B_2B$. Tako metodom ekshaustije zaključujemo, da je jednostruko asimptotski trokut A_2B_2N jednak četverokutu $A'A_2'B_2B$, iz toga dalje slijedi, da je jednostruko asimptotski trokut ABN eksaustijski jednak četverokutu $AA'A_2'A_2$, i zato kažemo da ima jednaku površinu kao četverokut $AA'A_2'A_2$.

Na slici 24. su pridruženi sukladni trokuti unutar jednostruko-asimptotskog trokuta A_2B_2N i unutar četverokuta $A'A_2'B_2B$ označeni istim brojevima. Da dokažemo, da su na primjer trokuti označeni sa 1, dakle trokuti $A_2B_2A_3$ i BB_1C sukladni, zaključit ćemo ovako: A_2A_2' je simetrala kuta $N'A_2N$ (jednaki kutovi paralelnosti $N'A_2A_2'$ i $A_2'A_2N$ s obzirom na pravac p), zato trokut $A_2B_2A_3$ leži s obzirom na pravac A_2A_2' simetrično s trokutom $A_2B_1B_2$, a taj leži simetrično sa trokutom B_1BC s obzirom na pravac $A_1A'_1$. Na isti bismo način mogli dokazati, da su sukladni i ostali trokuti, koji su označeni jednakim brojevima i t. d.

Defekt jednostruko asimptotskog trokuta ABN jednak je defektu četverokuta $AA'A_2'A_2$, koji s njim ima ekshaustijski jednaku površinu (jer su kutovi ABN i AA_2A_2' jednaki).

b) Od svakog se jednostruko-, dvostruko-, odnosno trostruko-asimptotskog trokuta može otcijepiti jedan, dva odnosno tri jednostruko-asimptotska trokuta sa jednim šiljastim i jednim tupim kutom, tako da od jednostruko asimptotskog trokuta ostaje četverokut, od dvostruko asimptotskog trokuta ostaje peterokut, a od trostruko asimptotskog šesterokut. Budući da odrezani jednostruko asimptotski trokuti imaju konačnu površinu prema a), imaju zato konačnu površinu i dvostruko odnosno trostruko simptotski trokuti.

99. — P o u č a k: *Asimptotski trokuti jednakih površina imaju jednak defekt.* Vrijedi i obrat: *Asimptotski trokuti jednakih defekata imaju jednaku površinu.*

D o k a z: Za trostruko asimptotske trokute to je evidentno.

a) Neka su zadani dva jednaka jednostruko asimptotska trokuta ABN i $A'B'N'$, dokazat ćemo da su im defekti jednaki.

Položimo trokut $A'B'N'$ na trokut ABN, da stranice $N'A'$ i $N'B'$ padnu na stranice NA i NB. Ako pri tome stranica $A'B'$ ne padne na stranicu AB, onda se stranice AB i $A'B'$ sijeku u točki C. Iz jednakosti trokuta ABN i $A'B'N'$ slijedi, da su trokuti $AA'C$ i $BB'C$ jednaki, dakle imadu jednaki defekt, t. j. $\pi - (\alpha' + (\pi - \alpha) + \gamma] = \pi - [\beta + (\pi - \beta') + \gamma]$ ili $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$. Iz toga slijedi, da su defekti trokuta ABN i $A'B'N'$ jednaki.

Ako zadani jednostruko asimptotski trokuti ABN i $A'B'N'$ imadu jednak defekt, dokazat ćemo, da imadu jednaku površinu na slijedeći način: Položimo opet trokut $A'B'N'$ na trokut ABN kako smo ranije postupili. Nastupiti mogu dva slučaja: ili se stranice AB i $A'B'$ ne sijeku, ili se one sijeku.

Ako se stranice AB i $A'B'$ ne sijeku nego se trokut ABN nalazi unutar trokuta $A'B'N'$, onda četverokut $AA'BB'$ ima defekt $2\pi - [\alpha + (\pi - \alpha') + (\pi - \beta') + \beta] = \alpha' + \beta' - \alpha + \beta = 0$, a to je nemoguće, dakle prvi slučaj otpada.

Ako se stranice AB i $A'B'$ sijeku u točki C, onda defekti trokuta $AA'C$ i $BB'C$ glase $\delta_1 = \pi - [\alpha + (\pi - \alpha') + \gamma]$ i $\delta_2 = \pi - [\beta + (\pi - \beta') + \gamma]$. Radi jednakosti defekata trokuta ABN i $A'B'N'$ je $\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$, ili $\alpha - \alpha' = \beta' - \beta$, a iz toga slijedi $\delta_1 = \delta_2$.

Na isti bismo način dokazali da gornji poučci vrijede za dva dvostruko asimptotska trokuta, kao i za jedan jednostruko, a drugi dvostruko asimptotski trokut.

Površina trokuta

100. — U hiperboličnoj se geometriji površina trokuta i mnogokuta izražava pomoću površine trostruko asimptotskog trokuta, komu se površina određuje mjernim brojem $k \cdot \pi$ (gdje konstanta k ovisi od površinske jedinice mjere). Poznato je da je već Gauss na deduktivan način pokazao, da površina trokuta glasi $P = k \cdot (\pi - \alpha - \beta - \gamma)$.

Komplementarne dužine

101. — Funkcija Lobačevskog $\Pi(a)$ daje funkcionalnu povezanost između kuta paralelnosti α i pripadne udaljenosti a, t. j. $\alpha = \Pi(a)$. Inverziju bilježimo sa $\triangle$, pa pišemo $a = \triangle(\alpha)$.

Definicija: Dužine a i a' zovu se komplementarne, ako je $\Pi(a) + \Pi(a') = \frac{\pi}{2}$. Zato je prema toj definiciji

$$a' = \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \quad (a')' = \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \alpha'\right) = \Delta\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right] = \Delta(\alpha) = a.$$

102. — Z a d a t a k. *Zadan je kut α, odredi dužine*

$$a = \Delta(\alpha) \quad \text{i} \quad a' = \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

R j e š e n j e: Nacrtajmo kut $NAN' = \alpha$. Spustimo iz točaka N i N' okomicu na krak AN kuta α, a nožište označimo sa B; tada je po definiciji $AB = \triangle(\alpha) = a$. Odredimo zatim pravi kut NAN'', pa spustimo okomicu iz točke N' na krak AN'', nožište označimo sa B', tada je po definiciji

$$AB' = \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \Delta(\alpha') = a'.$$

Pravokutni trokut i pridruženi mu četverokut

103. — Promatrat ćemo u hiperboličnoj ravnini pravokutni trokut ABC s katetama $AC = b$ i $BC = a$, nasuprotnim kutevima $\sphericalangle A = \lambda$ i $\sphericalangle B = \mu$ i hipotenuzom $AB = c$. Stranice tog trokuta određuju kutove paralelnosti $\Pi(a) = \alpha$, $\Pi(b) = \beta$ i $\Pi(c) = \gamma$, a kutevi λ i μ dužine $l = \Delta(\lambda)$ i $m = \Delta(\mu)$.

Prema tome pravokutni trokut ABC određuje 10 veličina, to su dužine a, b, c, l, m i kutovi $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma$.

104. — Nacrtajmo trokut ABC, pri tome označimo beskonačne točke na pravcu AC sa N_1 i N_2, na pravcu BC sa M_1 i M_2, na pravcu AB sa L_1 i L_2. Pol pravca AC označimo sa $\overline{D}$ (sl. 25.).

Spustimo iz točke L_1 okomicu na pravac AC, a nožište označimo sa D. Budući da je kut $L_1AD = \lambda$, to je $AD = \Delta(\lambda) = l$. Spojimo točku A sa točkom M_1, kut $CAM_1 = \Pi(b) = \beta$.

Označimo sa e zajedničku okomicu ili os pravaca DL_1 i AM_1 (koja je s tim pravcima jednoznačno određena, vidi točku 40.), a presjecišta te okomice s njima sa E i F, t. j. $E = e \times DL_1$, $F = e \times AM_1$. Dakako da je pol $\overline{E}$ pravca e točka $\overline{E} = DL_1 \times AM_1$.

Dobili smo tako četverokut $ADEF$, u kojem je $AD = \Delta(\lambda) = l$, $\sphericalangle DAF = \Pi(b) = \beta$. Četverokut $ADEF$ jednoznačno je određen pravokutnim trokutom ABC, jer je taj četverokut $ADEF$ jednoznačno određen stranicom $AD = \Delta(\lambda) = l$ i kutom $\sphericalangle DAM = \Pi(b) = \beta$ (ostali kutovi u četverokutu $ADEF$ su pravi). No veličine $\Pi(l) = \lambda$ i $b = \Delta(\beta)$ jednoznačno određuju pravokutni trokut ABC po III. pravilu sukladnosti, zato i četverokut $ADEF$ sa stranicom $AD = \Delta(\lambda) = l$, kutom $\sphericalangle MAD = \Pi(b) = \beta$ i ostalim pravim kutovima određuje jednoznačno pravokutni trokut ABC. Pravokutni trokut ABC i četverokut $ADEF$ zovu se među sobom pridruženi*).

105. — Dokazat ćemo, da je stranica DE u četverokutu $ADEF$ jednaka kateti $CB = a$ pridruženog pravokutnog trokuta ABC (sl. 25.).

Kutovi su BCD i EDC pravi. Ako je $CB = DE$, točke se B i E nalaze na ekvidistanti sa osi N_1N_2. Zato se spojnica BE mora sjeći sa spojnicom M_1L_1 u točki G na ekvidistantinoj osi N_1N_2 (gledaj konstrukciju ekvidistante, točka 75.). Budući da je spojnica EF polara točke $\overline{E}$, mora biti $(L_1 L_1' E \overline{E}) = -1$.

Označimo točku $GL_1' \times M_1A$ sa M', pa uočimo potpuni četverokut $L_1 M_1 M_1' L_1'$. Niz točaka na pravcu L_1M_1 označimo sa (M_1). Ako točku L_1' spojimo sa svima točkama niza (M_1), dobit ćemo pramen pravaca, koga označujemo sa $L_1'(M_1)$. Pramen $L_1'(M_1)$ perspektivan je s nizom (M_1), t. j. $L_1'(M_1) \overline{\wedge} (M_1)$.

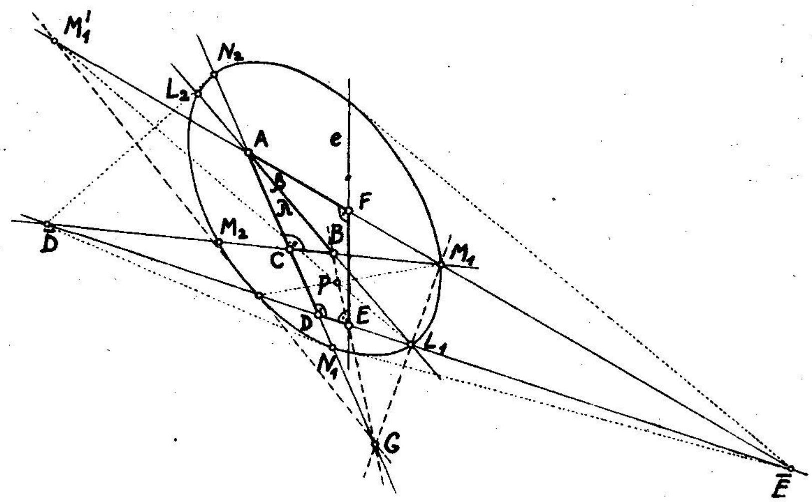
*) Isporedi Liebmann: Nichteuklidische Geometrie, II. izdanje, str. 37.

Ako sve točke niza (M_1) spojimo sa točkom $\overline{E}$, dobivamo pramen pravaca $\overline{E}(M_1)$, koji siječe pravac GL_1' u nizu (M_1'), dakako $\overline{E}(M_1) \overline{\wedge} (M_1')$. Ako sve točke niza (M_1') spojimo sa točkom L_1, dobivamo pramen pravaca $L_1(M_1')$.

Budući da je $L_1'(M_1) \overline{\overline{\wedge}} \overline{E}(M_1)$, a $\overline{E}(M_1) \overline{\overline{\wedge}} (M_1')$, to je pramen $L_1'(M_1)$ projektivan s pramenom $L_1(M_1')$, t. j. $L_1'(M_1) \overline{\wedge} L_1(M_1')$.

Iz definicije projektivnih pramenova $L_1(M_1')$ i $L_1'(M_1)$ slijedi:

a) pravcu L_1L_1' iz prvog pramena pridružen je pravac $L_1'L_1$ iz drugog pramena. Iz toga slijedi, da su prameni $L_1(M_1')$ i $L_1'(M_1)$ perspektivni, zato im se pridruženi pravci sijeku na osi perspektivnosti s.



Sl. 25

b) Pravcu L_1M_1' iz prvog pramena pridružen je pravac $L_1'M_1$ iz drugog pramena, zato os perspektivnosti s prolazi kroz točku $P = L_1M_1' \times L_1'M_1$.

c) Pravcu L_1G iz prvog pramena pridružen je pravac $L_1'G$ iz drugog pramena, zato os perspektivnosti s prolazi točkom G, t. j. $s = PG$.

d) Iz konstrukcije točke P vidimo, da je točka P jedna od dijagonalnih točaka potpunog četverokuta $L_1\,M_1\,M_1'\,L_1'$. Zato os perspektivnosti s siječe pravac L_1L_1' u točki E, za koju je $(L_1\,L_1'\,E\,\overline{E}) = -1$.

Sad ćemo dokazati, da je spojnica BG identična sa spojnicom $PG = s$. Uočimo opet potpuni četverokut $L_1\,M_1\,M_1'\,L_1'$ na sl. 25., a na njegovoj stranici L_1L_1' hiperboličnu involuciju sa dvostrukim točkama u L_1 i L_1'. Točke D i $\overline{D}$ su dva konjugirana pola apsolute k na sekanti L_1L_1', zato točke D i $\overline{D}$ predstavljaju jedan par točaka spomenute hiperbolične involucije.

Ako točka D opisuje niz točaka (D) na pravcu $L_1 L_1'$, onda i točka $\bar{D}$ opisuje kolokalan projektivan niz $(\bar{D})$ (jer su točke D i $\bar{D}$ u involuciji).

Ako sve točke niza $\bar{D}$ spojimo sa točkom M_1, dobivamo pramen pravaca $M_1(\bar{D})$ perspektivan sa nizom $\bar{D}$.

Ako sve točke niza (D) spojimo sa točkom G, dobivamo pramen pravaca $G(D)$ perspektivan sa nizom (D). Pravci pramena $G(D)$ sijeku pravac $M_1 M_1'$ u nizu točaka (A), koji je perspektivan s pramenom $G(A)$. Ako sve točke niza (A) spojimo sa točkom L_1, dobivamo pramen $L_1(A)$, koji je perspektivan s nizom (A).

Budući da je $(D) \overline{\wedge} (\bar{D})$, $G(D) \overline{\overline{\wedge}} (A)$, $L_1(A) \overline{\overline{\wedge}} (A)$, slijedi, da je pramen $M(\bar{D})$ projektivan s pramenom $L_1(A)$.

Iz definicije projektivnih pramenova $M(\bar{D})$ i $L_1(A)$ slijedi:

a) Pravcu $M_1 L_1$ iz prvog pramena pridružen je pravac $L_1 M_1$ iz drugog pramena. Iz toga slijedi, da su ti prameni perspektivni, pridruženi im se zato pravci sijeku na osi perspektivnosti s'.

b) Pravcu $M_1 \bar{D}$ iz prvog pramena pridružen je pravac $L_1 A$ iz drugog pramena, zato os perspektivnosti s' prolazi točkom $B \equiv M_1 \bar{D} \times L_1 A$.

c) Pravcu $M_1 L_1'$ iz prvog pramena pridružen je pravac $L_1' M_1$ iz drugog pramena, zato os perspektivnosti s' prolazi točkom $P \equiv M_1 L_1' \times L_1 M_1'$.

d) Pravcu $M_1 E$ iz prvog pramena pridružen je pravac $L_1 E$ iz drugog pramena, zato os perspektivnosti s' prolazi točkom E.

Dokazali smo tako, da os perspektivnosti s pramenova $L_1(M_1')$ i $L_1'(M_1)$ prolazi kroz točke P, E i G, a os perspektivnosti s' pramenova $M(\bar{D})$ i $L_1(A)$ kroz točke B, P i E, dakle je $s \equiv s'$. Iz svega toga slijedi, da točka E zadovoljava uvjetu $(L_1 L_1' E \bar{E}) = -1$, i da spojnica BE prolazi točkom G, čime je dokaz završen.

106. — Nacrtajmo opet pravokutni trokut ABC i njemu pridruženi $ADEF$ (sl. 26.), pri čemu zadržavamo iste oznake kao na slici 25.

Spustimo iz točke L_2 okomicu $L_2 L_2'$ na pravac $N_1 N_2$, a nožište označimo sa C'. Budući da je kut $C'AL_2 = \lambda$, to je $C'A = \Delta(\lambda) = l$.

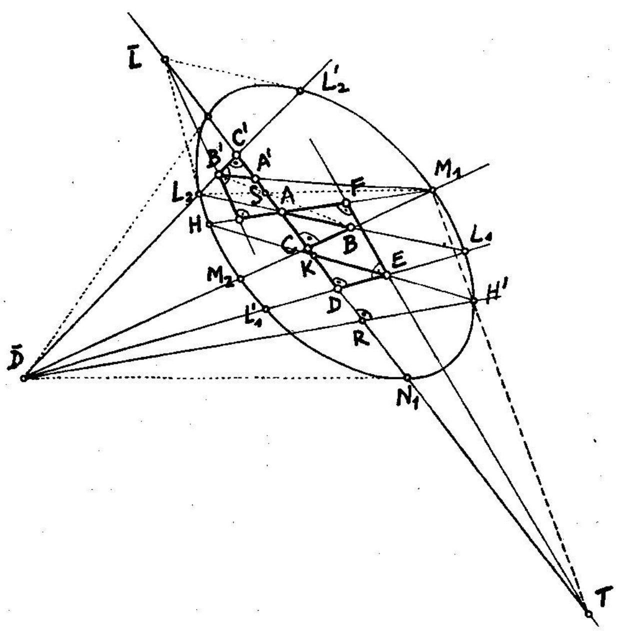
Spojnica CC' je zajednička okomica pravaca $M_1 M_2$ i $L_2 L_2'$, zato je točka $S \equiv CC' \times L_2 M_1$ centar simetrije za pravce $M_1 M_2$ i $L_2 L_2'$. Odredimo sada centralno simetrični pravokutni trokut $A'B'C'$ sa trokutom ABC s obzirom na točku S. Trokuti su $A'B'C'$ i ABC sukladni (vidi točku 55.).

Konstruirajmo u točki B' okomicu na pravac $L_2 L_2'$, označimo sa D' presjek te okomice sa pravcem AM_1. Četverokut $AC'B'D'$ je pravokutnom trokutu $A'B'C'$ pridružen, jer je $AC' = \Delta(\lambda) = l$, $B'C' = b$, a kut $C'AD' = \beta$. Zato je četverokut $AC'B'D'$ sukladan sa četverokutom $ADEF$.

107. — Hipotenuza $A'B'$ pravokutnog trokuta $A'B'C'$ ima zajedničku beskonačnu točku M_1 sa stranicom $D'A$ pridruženog četverokuta $AC'B'D'$. Iz toga slijedi:

a) ako u pridruženom četverokutu povučemo iz vrha nasuprot kutu β paralelu sa stranicom koja leži nasuprot stranici a, tada ova paralela sa stranicama l i a određuje pridruženi pravokutni trokut.

Ako označimo sa H drugu beskonačnu točku na pravcu FA (sl. 26.), a sa $K = EH \times DA$, tada je pravokutni trokut KED sukladan sa trokutom ABC.



Sl. 26

b) Budući da hipotenuza $A'B'$ ima zajedničku beskonačnu točku M_1 sa stranicom $D'A$, a kut je

$$A'B'D' = \frac{\pi}{2} - \mu, \quad \text{to je} \quad B'D' = \Delta\left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) = m'.$$

Iz toga slijedi: U pridruženom četverokutu leži nasuprot stranice l stranica m'. Zato je $B'D = EF = m'$.

108. — Sada ćemo odrediti preostalu stranicu pridruženog četverokuta. Dokazat ćemo, da je stranica AF četverokuta $ADEF$ jednaka hipotenuzi pridruženog pravokutnog trokuta ABC, t. j. $AF = AB = c$, (sl. 26.).

Označimo sa T pol pravca $t = L_1L_1'$, a beskonačne točke na spojnici EK sa H i H'. Spustimo iz točke H' okomicu na pravac N_1N_2, nožište označimo sa R. Tada je $CR = \Delta(\lambda) = l$, jer je kut

$H'CR = \lambda$. Prema tome je $DR = KR - KD = l - b$, a $DC = DA - CA = l - b$ ili $DR = DC$. Iz toga slijedi, da osnovni pomak (Tt) prevodi točku R u točku C, a pravac $\overline{D}R$ u pravac $\overline{D}C$, dakle prevodi točku H' u točku M_1, t. j. spojnica M_1H' prolazi točkom T. Ali točkom T prolaze i spojnice AD i EF, jer su spojnice AD i EF okomite na pravac $t = L_1L_1'$, dakle su dvoomjeri $(HAFM_1)$ i $(HKEH')$ u perspektivnom položaju s obzirom na točku T. Zato je $(HAFM_1) = (HKEH')$, ili $AF = KE = c$.

109. — Na taj smo način odredili sve elemente pridruženog četverokuta pravokutnome trokutu (a, b, c, λ, μ). Polazeći od šiljastog kuta β njegove su stranice l, a, m' i c.

Lanac pravokutnih trokuta

110. — Uzmimo četverokut (l, a, m', c, β) i pridruženi mu pravokutni trokut (a, b, c, λ, μ). Odredimo četverokut $l_1 = c$, $a_1 = m'$, $m_1' = a$, $c_1 = l$, $\beta_1 = \beta$, koji je nastao iz zadanog četverokuta zamjenom veličina l i c, te a i m'. Odredimo sada četverokutu $(l_1, a_1, m_1', c_1, \beta_1)$ pridruženi pravokutni trokut $(a_1, b_1, c_1, \lambda_1, \mu_1)$. Biti će zato $a_1 = m'$, $b_1 = \Delta(\beta_1) = \Delta(\beta) = b$, $c_1 = l$, $\lambda_1 = \Pi(b_1) = \Pi(c) = \gamma$, $\mu_1 = \Pi(m_1) = \Pi(a') = \frac{\pi}{2} - a$. Ako u četverokutu $(l_1, a_1, m_1', c_1, \beta_1)$ zamijenimo l_1 sa c_1, m_1' sa a_1, dobili bi postupajući na isti način kao prije četverokut $(l_2, a_2, m_2', c_2, \beta_2)$ i pridruženi mu pravokutni trokut $(a_2, b_2, c_2, \lambda_2, \mu_2)$. Ako nastavimo taj postupak, dobiti ćemo lanac od 6 članova, jer je šesti tako dobiveni trokut sukladan sa početnim.

Matematičar Engel je izrekao pravilo, po analogiji s Neperovim, po komu se mogu odmah odrediti elementi pravokutnih trokuta iz lanca, koji pripada pravokutnom trokutu (a, b, c, λ, μ):

Napišimo s vanjske strane uz stranice peterokuta počevši od kojegod stranice i u kojemgod smislu ophođenja ovim redom veličine: a', l, c, m, b', a iz nutarnje strane počevši od kojegod stranice i u kojemgod smislu ovim redom veličine: a_1', l_1, c_1, m_1, b_1'. Ako izjednačimo veličinu s nutarnje strane sa veličinom s vanjske strane uz svaku stranicu peterokuta, odredit ćemo veličine pravokutnog trokuta $(a_1, b_1, c_1, \lambda_1, \mu_1)$ pomoću veličina koje pripadaju pravokutnom trokutu (a, b, c, λ, μ). Tako određeni pravokutni trokut $(a_1, b_1, c_1, \lambda_1, \mu_1)$ je jedan od trokuta u lancu, koji pripada pravokutnom trokutu (a, b, c, λ, μ). Na primjer: Iz $a_1' = m$, $b_1' = b'$, $c_1 = l$, $m_1 = a'$, $l_1 = c$, slijedi: $a_1 = m'$, $b_1 = b$, $c_1 = l$, $\lambda_1 = \gamma$, $\mu_1 = \frac{\pi}{2} - a$.

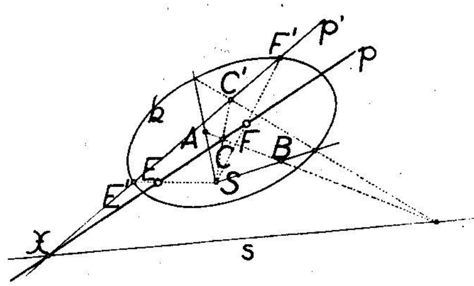
Osnovne konstrukcije u vezi s kružnicama

A) *Pravac i kružnica*

111. — Zadatak. *Konstruiraj točke u kojima pravac* p *siječe kružnicu* k_1 *1. vrste, koja je zadana središtem* S *i periferijskom točkom* A *(sl. 27.).*

Rješenje: Označimo polaru točke S sa s. Centralna kolineacija $(S + s)$ preslikava apsolutu k u kružnicu k_1 i obrnuto. Pravcu p iz područja kružnice k_1 odredit ćemo pomoću centralne kolineacije $(S + s)$ pridruženi pravac p' u području apsolute; sjecišta pravca p' sa apsolutom k označimo sa E' i F', a tim točkama pridružene točke E i F na pravcu p određuju presjecišta pravca p i kružnice k_1.

Do točaka E i F doći ćemo najbrže na slijedeći način: Odredimo pomoću centralne kolineacije $(S + s)$ još jednu točku B na periferiji kružnice k_1, tako da spojnica AB siječe pravac p u točki



Sl. 27

C. Spojnica SC siječe pravcu AB pridruženi pravac $A'B'$ u točki C', koja je pridružena s točkom C. Označimo li $p \times s = X$, onda je $p' = XC'$. Pravac p' siječe apsolutu k u točkama E' i F', a tražene točke E i F leže onda na spojnicama SE' i SF', t. j. $E = SE' \times p$. a $F = SF' \times p$.

Napomena. Na isti bi se način odredio presjek pravca p sa kružnicama 2. i 3. vrste.

112. — Zadatak. *Konstruiraj pol* P *pravca* p *s obzirom na kružnicu* k' *1. vrste u hiperboličnoj ravnini, koja je zadana središtem* S *i periferijskom točkom* A.

Rješenje: Pravcu p iz područja kružnice k' odredit ćemo pomoću centralne kolineacije $(S + s)$, koja preslikava zadanu kružnicu u apsolutu i obrnuto, pridruženi pravac p' u području apsolute (isporedi točku 111.). Zatim ćemo pravcu p' odrediti pol P' s obzirom na apsolutu. Točka P, koja je u centralnoj kolineaciji $(S + s)$ pridružena točki P', je traženi pol P pravca p.

113. — Zadatak. *Konstruiraj točki* P *polaru* p *s obzirom na kružnicu* k' *u hiperboličnoj ravnini, koja je zadana središtem* S *i periferijskom točkom* A.

Rješenje: Točki P odredit ćemo pomoću $(S + s)$ pridruženu točku P' u području apsolute. Zatim ćemo točki P' odrediti polaru p' s obzirom na apsolutu. Pridruženi pravac p u $(S + s)$ je tražena polara (to je dualno rješenje zad. 112.).

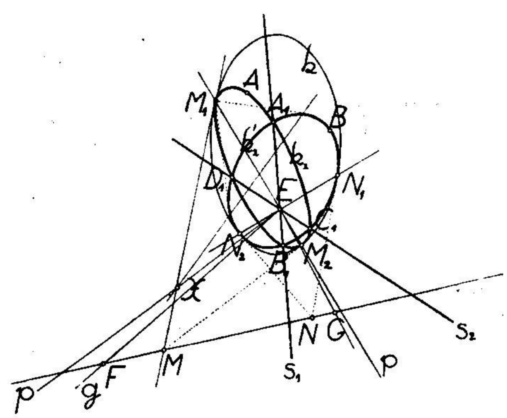
B) *Konstrukcija zajedničkih točaka dviju kružnica*

Kružnice u hiperboličnoj ravnini su elipse, zato se one mogu sjeći u dvije ili četiri realne točke.

Zajedničke točke dviju kružnica 2. vrste

114. — Konstruirat ćemo najprije zajedničke točke dviju kružnica 2. vrste, kojima se osi sijeku u pravoj točki.

Neka je kružnica k_2 određena osi $m = M_1M_2$ i točkom A, a kružnica k_2' sa osi $n = N_1N_2$ i točkom B. Označimo neprava središta tih kružnica sa M i N, a presjek njihovih osi sa $E = m \times n$ (sl. 28.).



Sl. 28

Točka E i pravac $e = MN$ su pol i polara apsolute k. Kružnice k_2 i k_2' nastaju preslikavanjem iz apsolute k pomoću centralnih kolineacija $(M + m)$ i $(N + n)$. Budući da centri M i N tih kolineacija leže na pravcu e, točka E i pravac e su zajednički pol i polara kružnica k_2 i k_2'. Na pravcu e nalazi se elip. involucija parova konjugiranih polova kružnice k_2 i elip. involucija parova konjugiranih polova kružnica k_2'. Zajednički par točaka tih kolokalnih elip. involucija određuje zajednički par konjugiranih polova F i G kružnica k_2 i k_2' na pravcu e. Budući da dvije kolokalne eliptične involucije imaju uvijek jedan zajednički realan par pridruženih točaka, točke su F i G realne. Zato je trokut EFG zajednički polarni trokut kružnica k_2 i k_2'.

Da bismo što prije došli do zajedničkih točaka kružnica k_2 i k_2', odredit ćemo zajedničke sekante tih kružnica, koje prolaze točkom E. U tu svrhu provest ćemo ovo kratko razmatranje: Neka je p po volji pravac koji prolazi točkom E. Polare točaka tog pravca s obzirom na kružnice k_2 i k_2' određuju dva pramena polara sa vrhovima u točkama P i P' na pravcu e. Točke P i P' su polovi pravca p obzirom na kružnice k_2 i k_2'. Prameni P i P' projektivni su sa nizom točaka na pravcu p. Pravac $e = PP'$ je u tim pramenima pridružen sam sebi, jer je to dvostruka polara kružnica k_2 i k_2'. Zato su prameni P i P' u perspektivnom položaju, prema tome sjecišta pridruženih polara leže na osi perspektivnosti p', a ta su sjecišta konjugirani polovi odgovarajućih točaka pravca p s obzirom na kružnicu k_2 i kružnicu k_2'. Budući da je točka $e \times p$ konjugirana sa točkom E, pravac p' prolazi točkom E. Promatramo li pramen pravaca sa vrhom u točki E, dobit ćemo kolokalni pramen pravaca p'. Ti su kolokalni prameni u involuciji, jer su pravci p i p' uzajamno pridruženi. Budući da su točke F i G konjugirani polovi kružnica k_2 i k_2', stranice EF i EG polarnog trokuta EFG čine jedan par te involucije. Dvostruke zrake te involucije bit će zajedničke sekante kružnica k_2 i k_2' jer su zajedničke sekante pravci, koji su konjugirani sami sebi. Iz toga slijedi ovaj pomoćni stavak: Parovi konjugiranih pravaca p i p', koji se sijeku u točki E određuju involuciju, stranice EF i EG polarnog trokuta EFG čine jedan par pridruženih pravaca te involucije, a dvostruki pravci te involucije su zajedničke sekante s_1 i s_2 kružnica k_2 i k_2'.

Primjenimo li taj stavak na naš promatrani slučaj, parovi konjugiranih pravaca kroz točku E određuju hiperboličnu involuciju, jer su sekante, koje prolaze kroz točku E realne. Da bismo došli što brže do jednog para konjugiranih pravaca p i p' kroz točku E, uzet ćemo pravac $p \equiv m$ i točku M_1 na njemu. Ako se polare točke M_1 s obzirom na kružnice k_2 i k_2' sijeku u točki X, onda je $p' = EX$. Konstruiramo li sada dvostruke pravce hiperbolične involucije, koja je određena parovima pravaca p i p', zatim $EF = g$ i $EG = f$, dobit ćemo zajedničke sekante s_1 i s_2 kružnica k_2 i k_2' koje prolaze točkom E. Na sekantama s_1 i s_2 leže tražene četiri zajedničke točke A_1, B_1, C_1, D_1 kružnica k_2 i k_2', koje možemo konstruirati prema točki 111.

115. — Promatramo opet presjek dviju kružnica k_2 i k_2' 2. vrste, kojima su osi paralelne. Zadržavamo isto obilježavanje kao u točki 114., jedino uzimamo da je $M_1 \equiv N_1$. U tome slučaju u beskonačnoj točki M_1 imaju kružnice k_2 i k_2' dvije zajedničke točke i zajedničku tangentu t. Prema tome one mogu imati još najviše dvije realne zajedničke točke. Promatrajmo pramen pravaca P sa vrhom u točki M_1. Svakom pravcu p iz tog pramena odgovaraju po dva pola P i P' na pravcu t s obzirom na kružnice k_2 i k_2', zato pramenu pravaca (p) odgovaraju dva kolokalna projektivna niza točaka (P) i (P') na pravcu t. Točka M_1 je zajednička točka tih nizova. Odredimo li drugu njihovu zajedničku točku E, tada točki E s obzirom na kružnice k_2 i k_2' pripada ista polara e, t. j. točka E i pravac e su zajednički pol i polara kružnica k_2 i k_2'. Na zajedničkoj polari e kružnica k_2 i k_2' određuju dvije kolokalne invo-

lucije parova konjugiranih polova, kojima je zajednički par točaka E i F pao u točku M_1. Zato je u ovome slučaju polarni trokut EFG degenerirao u dužinu EM_1, u dvostruki pravac hiperbolične involucije parova konjugiranih pravaca koji se sjeku u točki E, dakle u jednu zajedničku sekantu s_1 kružnica k_2 i k_2'. Odredimo jedan par konjugiranih pravaca p i p', koji se sijeku u točki E. Odredimo li onda pravac s_2 prema zahtjevu $(p\,p'\,s_1\,s_2) = -1$, tada pravac s_2 predstavlja drugu sekantu kružnica k_2 i k_2'. Ako je pravac s_2 pravi pravac, kružnice k_2 i k_2' sijeku se u dvije realne točke, koje leže na tom pravcu, mogu se dakle konstruirati prema točki 111.

116. — Ako se osi m i n kružnica k_2 i k_2' 2. vrste sijeku u nepravoj točki E, tada točki E s obzirom na kružnice k_2 i k_2' 2. vrste pripada jedna te ista polara, pravac $e = MN$. Označimo presjecišta kružnice k_2 i pravca e sa C i D, a presjecišta kružnice k_2' i pravca e sa C' i D'. Sada mogu nastupiti tri slučaja: Parovi točaka C, D i C', D' mogu se rastavljati, mogu biti jedan unutar drugog ili jedan izvan drugog. Zajednički konjugirani polovi F i G kružnica k_2 i k_2' na pravcu e bit će u prvom slučaju imaginarni, a u druga dva slučaja realni. Prema tome polarni trokut EFG u prvom slučaju degenerira u točku E i pravac e, a u ostalim slučajevima bit će realan. No u svakom slučaju konjugirani pravci p i p' koji se sjeku u točki E, određuju hiperboličnu involuciju. Ako su stranice EF i EG konjugirano imaginarne, moraju dvostruki pravci involucije parova konjugiranih pravaca p i p' biti realni, jer dva para elemenata, koji se harmonično dijele, ili su oba realna ili jedan realan, a drugi imaginaran, no nikako ne mogu biti oba imaginarna.

Postupajući dalje kao u točki 114. možemo odrediti zajedničke sekante s_1 i s_2 kružnica k_2 i k_2' koje prolaze točkom E, na kojima onda leže zajedničke realne točke kružnica k_2 i k_2', ukoliko se te kružnice sijeku u realnim točkama.

Zajedničke točke dviju kružnica 1. vrste

117. — Neka je kružnica k_1 zadana središtem S_1 i točkom A na njenoj periferiji, a kružnica k_1' središtem S_2 i točkom A_2 na njenoj periferiji. Označimo sa s_1 i s_2 polare točaka S_1 i S_2. Iz konstrukcije tih kružnica slijedi, da je točka $E = s_1 \times s_2$ i pravac $e = S_1 S_2$ zajednički pol i polara kružnica k_1 i k_1'. Zato se ovaj slučaj rješava na isti način kao slučaj u točki 116.

Zajedničke točke dviju kružnica 3. vrste

118. — Neka je kružnica k_3 zadana beskonačnom točkom S i periferijskom točkom A, a kružnica k_3' beskonačnom točkom S' i periferijskom točkom B. Označimo tangente apsolute u točkama S i S' sa s i s'.

a) Neka je $S \neq S'$. Iz konstrukcije kružnica 3. vrste slijedi, da su točke $E = s \times s'$ i pravac $e = SS'$ zajednički pol i polara kružnica k_3 i k_3'. To je dakle opet slučaj analogan sa slučajem tretiranim u točki 116.

b) Ako je $S = S'$, kružnice k_3 i k_3' imaju u beskonačnoj točki S 4 zajedničke točke, dakle nemaju više zajedničkih točaka.

Zajedničke točke dviju kružnica 1. i 2. vrste

119. — Neka je kružnica k_1 1. vrste zadana središtem S_1 i periferijskom točkom A_1, a kružnica k_2 2. vrste sa osi m i periferijskom točkom B. Označimo sa s_1 polaru točke S_1, a sa M pol pravca m. Iz konstrukcije tih kružnica slijedi, da su točka $E = s_1 \times m$ i pravac $e = S_1M$ zajednički pol i polara kružnica k_1 i k_2. Prema tome to je opet isti slučaj kao onaj, koji je riješen u točki 116.

Zajedničke točke dviju kružnica 1. i 3. vrste

120. — Rješava se na isti način kao slučaj u točki 116., odnosno u točki 117.

Zajedničke točke dviju kružnica 2. i 3. vrste

121. — Neka je kružnica k_2 2. vrste zadana sa osi $m = M_1M_2$ i periferijskom točkom A, a kružnica k_3 3. vrste beskonačnom točkom S i periferijskom točkom B. Označimo pol osi m sa M, a polaru točke S sa s.

a) Neka je beskonačna točka S izvan osi m. Iz konstrukcije tih kružnica slijedi, da je točka $E = m \times s$ i pravac $e = SM$ zajednički pol i polara kružnica k_2 i k_3, dakle slučaj kao u točki 116.

b) Ako je $S = M_1$, iz konstrukcije tih kružnica slijedi, da je točka $E \equiv M$ i pravac $e \equiv m$ zajednički pol i polara tih kružnica, prema tome imamo opet slučaj analogan s onim u točki 116.

Zajedničke tangente dviju kružnica

122. — Konstrukcija, kojom određujemo zajedničke tangente dviju kružnica u hiperboličnoj ravnini, dualna je sa konstrukcijom kojom određujemo zajedničke točke tih kružnica.

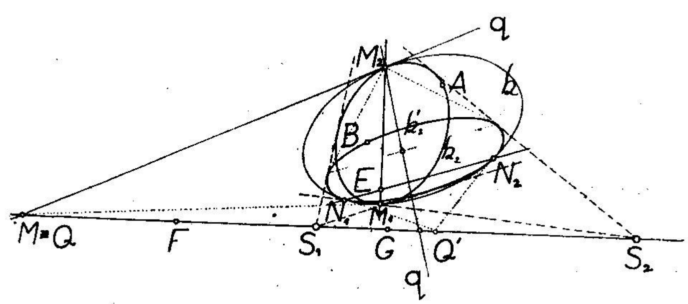
123. — Ilustracije radi odredit ćemo zajedničke tangente dviju kružnica k_2 i k_2' 2. vrste, kojima se osi sijeku u pravoj točki.

Prema tome treba da izvedemo dualnu konstrukciju sa onom u točki 114., pri tome zadržavamo isto obilježavanje.

Konstruirat ćemo kao i tamo najprije vrhove zajedničkog polarnog trokuta EFG kružnica k_2 i k_2' (sl. 29.). Pomoćni stavak, koji smo upotrebili za konstrukciju zajedničkih sekanata s_1 i s_2, koje su se sjekle u točki E, u zajedničkom polu kružnica k_2 i k_2', glasi dualno ovako:

Na stranici e polarnog trokuta EFG, koja predstavlja zajedničku polaru kružnica k_2 i k_2', određuju svi parovi konjugiranih točaka Q i Q' tih kružnica involuciju točaka. Točke E i F su također jedan par pridruženih točaka te involucije. Dvostrukim točkama S_1 i S_2 te involucije prolaze zajedničke konjugirane polare kružnica k_2 i k_2' koje su pale zajedno, dakle zajedničke njihove tangente.

Da dođemo što brže do dvostrukih točaka S_1 i S_2, odredit ćemo par konjugiranih polara q i q', ali tako, da uzmemo $q = MM_2$, tada q' prolazi točkom M_2. Odredimo li pol X pravca q s obzirom na kružnicu k_2', onda je $q' = M_2X$. Točke $Q = q \times e = M$ i $Q' = q' \times e$ su jedan par, a točke E i F su drugi par involucije, koja određuje dvostruke točke S_1 i S_2, koje možemo konstruirati.



Sl. 29

Označimo li sa o_1 polaru točke S_1, sa o_2 polaru točke S_2 s obzirom na kružnicu k_2, a presjeke polara o_1 odnosno o_2 sa kružnicom k_2 označimo sa C i D odnosno sa C' i D', onda su pravci S_1C, S_1D, S_2C' i S_2D' su tražene zajedničke tangente kružnica k_2 i k_2'.

Konstrukcija trokuta iz zadanih elemenata

124. — Ako je u hiperboličnoj ravnini zadan trokut sa tri elementa na temelju 1., 2. ili 4. poučka sukladnosti, t. j. ako je trokut zadan jednom stranicom i sa dva priležeća kuta ,ili sa dvije stranice i kutom među njima, ili sa tri stranice, onda je konstrukcija tog trokuta analogna konstrukciji euklidskog trokuta, koji je zadan istim elementima.

Ako je trokut zadan na temelju 3. ili 5. poučka sukladnosti, t. j. s jednom stranicom, jednim priležećim i suprotnim kutom, ili sa tri kuta, pripadnim konstrukcijama nema analognih u euklidskoj geometriji. Zato ćemo sada prikazati konstrukcije trokuta, koji su zadani na temelju 3. ili 5. poučka sukladnosti.

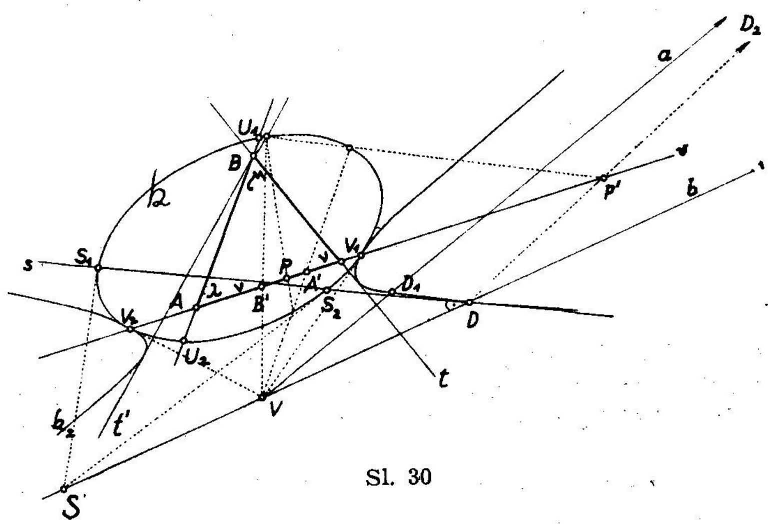
Napomena. Kad kažemo, da smo odmjerili, ili prenijeli, ili odredili zadanu dužinu odnosno zadani kut, to znači da smo tu dužinu odnosno kut pomakli pomoću jednog ili više osnovnih pomaka u željeni položaj.

Konstrukcije trokuta u vezi s 3. poučkom sukladnosti

125. — Zadatak. *Konstruiraj trokut* ABC (abc$\lambda \mu \nu$), *koji je zadan stranicom* AB $=$ c *i kutovima* $\sphericalangle$ A $= \lambda$, $\sphericalangle$ C $= \nu$ (sl. 30.).

Rješenje: Odredimo na pravcu $u = U_1U_2$ stranicu $AB = c$, a u vrhu A priležeći kut $\lambda = U_1 A V_1$; drugi krak kuta λ je pravac $v = V_1V_2$, pol tog pravca označimo sa V. Svi pravci, koji zatvaraju s pravcem v kut ν, anvelopiraju nepravu kružnicu k_2 2. vrste s osi v i nepravim središtem u točki V (vidi zadatak 87.).

Bilo koji pravac $s = S_1S_2$, koji zatvara sa pravcem v kut ν, tangenta je neprave kružnice k_2. Označimo li pol pravca s sa S, onda je točka $D = VS \times s$ diralište tangente s s kružnicom k_2, a



Sl. 30

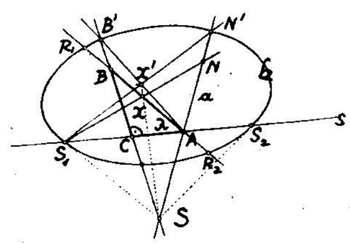
spojnica VS njen radijvektor u točki D. Povučemo li po volji još jedan radijvektor a, dakle po volji nepravi pravac a kroz točku V, onda možemo pomoću osnovnih pomaka (Pp) i ($P'p'$) odrediti s točkom D korespondentne točke D_1 i D_2 na pravcu a (vidi točku 66.b), t. j. $D_1 = PD \times a$, $D_2 = P'D \times a$. Označimo sa $A' = a \times v$, a onda točki A' odredimo točku A prema uvjetu $(V_1 V_2 A' A) = -1$; vidimo, da je točka A pol pravca a s obzirom na apsolutu i kružnicu k_2 u isti mah. Zato su spojnice AD_1 i AD_2 tangente kružnice k_2. Budući da od kružnice k_2 poznamo sada pet tangenata: S_1S_2, VV_1, VV_2, AD_1, AD_2, možemo konstruirati tangente t i t' kružnice k_2, koje prolaze točkom B. Jedna od tih tangenata, koja izlazi iz točke B, siječe krak AV_1 u točki C, u vrhu traženog trokuta ABC.

126. — Zadatak. *Konstruiraj pravokutan trokut* ABC (abc$\lambda\mu$), *koji je zadan katetom* BC $=$ a *i nasuprotnim kutom* $\sphericalangle$ A $= \lambda$ *(sl. 31.).*

Rješenje: Neka je kut $\lambda = R_1 A S_1$ zadan sa dva pravca $r = R_1R_2$ i $s = S_1S_2$, koji se sijeku u točki A. Pol pravca s označimo sa S. Odredimo li na kraku AR_1 točku B, koja je udaljena od pravca s za duljinu stranice a, onda nožište C okomice spuštene iz točke B na pravac s određuje s točkama A i B traženi pravokutni trokut ABC.

Točku B možemo konstruirati, jer se ona nalazi na ekvidistanti k_2 pravca s u udaljenosti a. Presjek kraka AR_1 i ekvidistante k_2 konstruirat ćemo, kako je pokazano u točki 111.

U tu svrhu konstruirat ćemo u točki A okomicu na pravac s i na nju odmjeriti počevši od točke A dužinu $AN = a$. Označimo presjek zrake AN i apsolute k sa N'. Pravcu S_1N iz područja ekvidistante pridružen je s obzirom na centralnu kolineaciju $(S + s)$ pravac S_1N' u području apsolute. Zato je točki $X = S_1N \times AR$ na pravcu S_1N pridružena točka $X' = S_1N' \times SX$ na pravcu S_1N'.



Sl. 31

Pravcu AX pridružen pravac AX'. Označimo presjek pravca AX' s apsolutom sa B', onda spojnica $B'S$ određuje na kracima AR i AS točke B i C, koje skupa s točkom A određuju traženi pravokutni trokut ABC.

127. — Zadatak. *Konstruiraj pravokutan trokut* ABC $(abc\lambda\mu)$, *koji je zadan hipotenuzom* AB $=$ c *i* $\sphericalangle$ A $= \lambda$.

Rješenje: Neka je kut $\lambda = R_1 A S_1$ zadan s dva pravca $r = R_1R_2$ i $s = S_1S_2$, koji se sijeku u točki A. Označimo sa S pol pravca s. Prenesimo na krak AR, počevši od točke A dužinu $AB = c$. Ako iz tako dobivene točke B spustimo okomicu na pravac s, a nožište te okomice obilježimo sa C, onda točke A, B i C određuju traženi pravokutni trokut ABC.

128. — Zadatak. *Konstruiraj jednostruko-asimptotski trokut* ABN_1 $(\lambda\mu)$, *koji je zadan stranicom* AB $=$ c *i priležećim kutom* $\sphericalangle$ A $= \lambda$.

Rješenje: Neka je kut $\lambda = M_1 A N_1$ zadan s dva pravca $m = M_1M_2$ i $n = N_1N_2$, koji se sijeku u točki A. Prenesemo li počevši od točke A dužinu AB na pravac m, pa tako dobivenu točku B spojimo s beskonačnom točkom N_1 kraka AN_1 kuta λ, onda smo na taj način konstruirali traženi trokut ABN_1.

Konstrukcije trokuta u vezi s 5. poučkom sukladnosti

129. — Zadatak. *Konstruiraj trokut* ABC(abc$\lambda\,\mu\,\nu$), *koji je zadan kutovima* $\sphericalangle A = \lambda$, $\sphericalangle B = \mu$, $\sphericalangle C = \nu$, $\lambda + \mu + \nu < \pi$.

Rješenje: Neka je zadan kut $\nu = P_1 C Q_1$. Svi pravci, koji čine s krakom CP_1 kut λ, anvelopiraju nepravu kružnicu k_2 2. vrste sa osi $p = P_1P_2$. Svi pravci, koji čine s krakom CQ_1 kut μ, anvelopiraju drugu nepravu kružnicu k_2' 2. vrste s osi $q = Q_1 Q_2$. Prema tome zajednička tangenta tih kružnica k_2 i k_2', koja siječe krakove CP_1 i CQ_1 u točkama A i B, određuje traženi trokut ABC, jer je $\sphericalangle A = \lambda$ i $\sphericalangle B = \mu$.

Odaberimo na kraku CP_1 po volji točku L, a na kraku CQ_1 po volji točku M. Odredimo zatim uz krak CP_1 u točki L priležeći kut $P_3LR_1 = \lambda$, a uz krak CQ_1 u točki M priležeći kut $Q_1MS_1 = \mu$. Pravac LR_1 određuje jednoznačno nepravu kružnicu k_2, a pravac MS_1 određuje jednoznačno nepravu kružnicu k_2'. U točki 123. pokazali smo, kako se može konstruirati kružnicama k_2 i k_2' zajedničke tangente. Ona od tih tangenata, koja siječe krakove CP_1 i CQ_1 kuta $P_1 C Q_1 = \nu$ u točkama A i B, određuje na taj način traženi trokut ABC.

130. — Zadatak. *Konstruiraj pravokutni trokut* ABC (abc$\lambda\mu$), *koji je zadan kutovima* $\sphericalangle A = \lambda$, $\sphericalangle B = \mu$, $\lambda + \mu < \frac{\pi}{2}$.

Rješenje kao u zadatku 129., samo treba uzeti u obzir da je ovdje $\nu = \frac{\pi}{2}$.

131. — Zadatak. *Konstruiraj jednostruko-asimptotski trokut* ABN (c$\lambda\,\mu$), *koji je zadan kutovima* $\sphericalangle A = \lambda$, $\sphericalangle B = \mu$, $\lambda + \mu < \pi$.

Rješenje:

a) Ako je $\lambda < \frac{\pi}{2}$ i $\mu < \frac{\pi}{2}$, odredit ćemo dužine $l = \Delta(\lambda)$ i $m = \Delta(\mu)$; tada je $AB = c = l + m$.

b) Ako je $\lambda < \frac{\pi}{2}$, a $\mu > \frac{\pi}{2}$, odredit ćemo dužine $l = \Delta(\lambda)$ i $m_1 = \Delta(\pi - \mu)$; tada je $AB = c = l - m_1$.

Odredivši tako stranicu AB, zadatak se svodi na poznati slučaj.

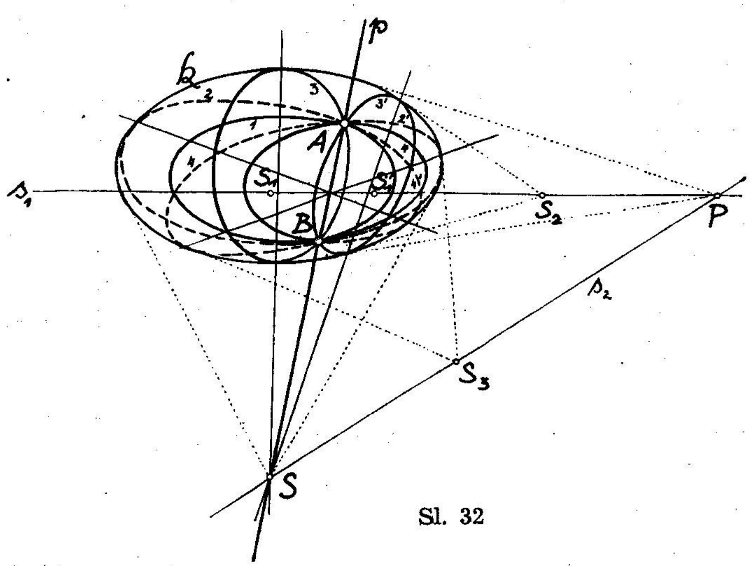
Pramen kružnica

U hiperboličnoj geometriji pramen kružnica ima slična svojstva sa pramenom kružnica u euklidskoj geometriji, razlika je samo u tome, što se ovdje pojavljuju u pramenu tri vrste kružnica, kružnice 1., 2. i 3. vrste.

Pramen kružnica s realnim i različitim bazičnim točkama

132. — Sve kružnice hiperbolične ravnine, koje prolaze dvjema realnim i različitim točkama A i B, čine pramen kružnica sa bazičnim točkama A i B.

Točke A i B, koje leže na pravcu $p = P_1P_2$, određuju s obzirom na hiperboličnu metriku projektivne ravnine dvije usmjerene dužine, dužinu $\overrightarrow{AB}$ i dužinu $\overrightarrow{BA}$. Kružnice našeg pramena, koji ćemo obilježiti sa (A, B), možemo podijeliti na dva dijela, na kružnice, koje imaju svoje pravo ili nepravo središte na simetrali s_1 dužine $\overrightarrow{AB}$, i na kružnice koje imaju svoje nepravo središte na simetrali s_2 dužine $\overrightarrow{BA}$. Kružnice sa središtima na simetrali s_1 izvučene su punom linijom, a kružnice sa središtima na simetrali s_2 izvučene su crtkano (sl. 32.). Među kružnicama iz prvog dijela imamo kružnica 1., 2. i 3. vrste, a u drugom dijelu samo kružnice 2. vrste.



Sl. 32

Svakoj kružnici iz pramena kružnica (A, B) može se pridružiti kružnica iz tog pramena, tako da pridružene kružnice leže simetrično s obzirom na os pramena, t. j. s obzirom na pravac $p = AB$.

Pramen kružnica s realnom dvostrukom bazičnom točkom

133. — Ako točke A i B na pravcu p padnu zajedno, kružnice sa središtem na okomici s_1 pravca p u točki $A = B$ dodiruju pravac p u točki A, a kružnice sa središtem na polari s_2 bazične točke A degenerirale su u nullinije, u dvostruko uzete tetive apsolute k, koje čine pramen tetiva apsolute u točki A. I u ovome pramenu mogu se kružnice pridružiti u parove koji leže simetrično s obzirom na os p, *t. j.* prema zajedničkoj tangenti kružnica u pramenu.

Pramen kružnica s konjugirano imaginarnim baznim točkama

134. — Ispitat ćemo sada svojstva pramena kružnica, koje sve prolaze kroz dvije konjugirano imaginarne točke A i B.

U taj pramen kružnica spadaju dvije kružnice 1. vrste, koje su se reducirale na točku (polumjer $r = 0$), a zovu se nulkružnice, označimo ih sa K_1 i K_1'. Nulkružnice K_1 i K_1' leže simetrično prema osi pramena, koja predstavlja os perspektivnosti eliptičnih involucija parova okomitih dijametara nulkružnica K_1 i K_2' (par okomitih dijametara tih nulkružnica predstavlja par konjugiranih polara apsolute).

Da to dokažemo, uzimamo u hiperboličnoj ravnini dvije po volji točke K_1 i K_1', a u točki K_1 eliptičku involuciju parova okomitih dijametara nulkružnice K_1. Osnovni pomak (Pp) (p polara neprave točke P), koji prevodi točku K_1 u točku K_1', prevodi eliptičnu involuciju parova okomitih dijametara nulkružnice K_1 u eliptičnu involuciju parova okomitih dijametara nulkružnice K_1'. Budući da osnovni pomak (Pp) predstavlja simetriju s obzirom na pravac p, elip. involucije parova okomitih dijametara leže simetrično s obzirom na pravac p, a simetrično ležeći parovi okomitih dijametara sijeku se na pravcu p.

Time smo dokazali, da nulkružnice K_1 i K_1' određuju na pravcu p istu eliptičnu involuciju parova konjugiranih polova. Dvostruke imaginarne točke te eliptične involucije na pravcu p su imaginarne bazične točke A i B našeg pramena kružnica, koji ćemo od sada dalje obilježiti sa $(K_1 + K_1')$.

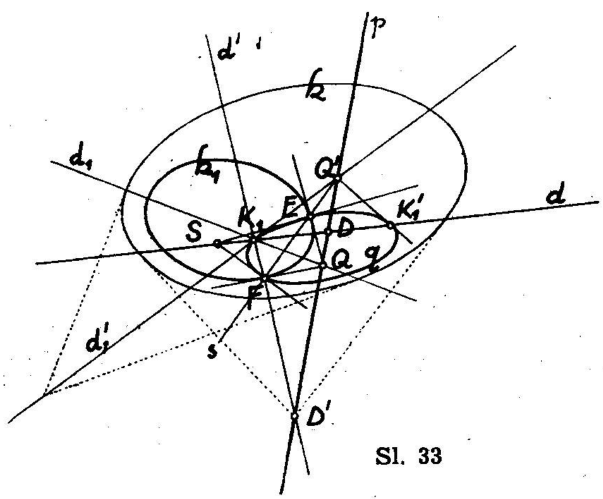
Iz svega toga slijedi, da je pramen kružnica $(K_1 + K_1')$ jednoznačno određen, ako su nam poznate nulkružnica K_1 i K_1' tog pramena.

135. Postavlja se pitanje, kako se mogu odrediti sve kružnice pramena $(K_1 + K_1')$, kada su nam poznate nulkružnice K_1 i K_1'? Da bismo na to pitanje mogli odgovoriti, izvodimo ovo kratko razmatranje (sl. 33.):

Odredimo najprije os pramena $(K_1 + K_1')$, dakle simetralu p dužine zadanih točaka K_1 i K_1'. Označimo sa $D = K_1K_1' \times p$, a sa D' pol pravca $d = K_1K_1'$. Pravac $d = K_1D$ i pravac $d' = K_1D'$ određuju jedan par okomitih dijametara nulkružnice K_1. Neka je d_1 po volji pravac kroz K_1, a d_1' njegova okomica u točki K_1, tada pravci d_1 *i* d_1' određuju drugi par okomitih dijametara nulkružnice K_1. Parovi d, d' i d_1, d_1' određuju jednoznačno eliptičnu involuciju parova okomitih dijametara nulkružnice K_1. Zato parovi točaka $D = d \times p$, $D' = d' \times p$ i $Q = d_1 \times p$, $Q' = d_1' \times p$ određuju jednoznačno eliptičnu involuciju parova konjugiranih polova nulkružnica K_1 i K_1' na pravcu p, s kojom su određene imaginarne bazične točke pramena kružnica $(K_1 + K_1')$ u vidu dvostrukih imaginarnih točaka te involucije.

Opišimo oko središta Q kružnicu q, koja prolazi točkama K_1 i K_1' (ta će kružnica biti 1., 2. ili 3. vrste prema tome da li je točka Q prava, neprava ili beskonačna točka). Kroz točku Q' povucimo po volji sekantu s kružnice q, točke presjeka označimo sa E i F. Iz $d \perp d'$ slijedi, da je $QK_1 \perp K_1Q'$ i da su spojnice $Q'K_1$ i $Q'K_1'$ tangente spuštene iz točke Q' na kružnicu q. Zato je pravac $d = K_1K_1'$ polara točke Q' s obzirom na kružnicu q. Iz toga dalje slijedi, da se tangente kružnice q u točkama E i F sijeku na pravcu $d = K_1K_1'$, označimo to sjecište sa S. Kružnica k_1, koja je opisana oko središta S i koja prolazi točkama E i F (to može biti kružnica 1., 2. ili 3. vrste), siječe kružnicu q pod pravim kutom.

Tvrdimo, da tako određena kružnica k_1 pripada pramenu $(K_1 + K_1')$ t. j. da su parovi točaka D i D', zatim Q i Q' dva para konjugiranih polova te kružnice. Iz konstrukcije tih parova točaka i kružnice k_1 možemo odmah zaključiti, da je gornja tvrdnja ispravna.



Sl. 33

Na taj smo način u stanju da odredimo sve kružnice pramena $(K_1 + K_1')$, jer svakoj sekanti s kroz točku Q' odgovaraju po dvije kružnice pramena k_1 i k_1', koje leže simetrično prema osi p.

136. — Središta svih kružnica 1., 2. i 3. vrste pramena $(K_1 + K_1')$ leže na pravcu $d = K_1K_1'$ izvan dužine K_1K_1'. Drugi dio pramena, kružnice sa središtem na polari točke D, nisu realne. One su u pramenu kružnica sa realnim bazičnim točkama bile realne, u pramenu kružnica s dvostrukom bazičnom točkom degenerirale su u nullinije, a sada — u slučaju imaginarnih bazičnih točaka — su imaginarne.

137. — Iz određenja i konstrukcije pramena kružnica $(K_1 + K_1')$ slijedi, da su dužine tangenata točke Q s obzirom na sve kružnice tog pramena među sobom jednake. No točka je Q bila po volji uzeta na pravcu p (sl. 33.), zato ovo svojstvo imaju sve točke pravca p.

Iz te konstrukcije dalje slijedi, da su kružnice pramena (K_1, K_1') sa bazičnim točkama K_1 i K_1' ortogonalne trajektorije pramena kružnica $(K_1 + K_1')$, a da su dužine tangenata točke S s obzirom na sve kružnice pramena (K_1, K_1') među sobom jednake. No točka S pridružena je točki Q, pa bismo mogli na isti način pokazati, da to vrijedi za sve točke pravca $d \equiv K_1 K_1'$.

Budući da je pravac p zajednička sekanta kružnica iz pramena $(K_1 + K_1')$, a pravac d zajednička sekanta kružnica iz pramena $(K_1 K_1')$, slijedi:

Svaka točka na zajedničkoj sekanti dviju kružnica (bez obzira na to, da li sekanta siječe te kružnice u realnim ili imaginarnim točkama) ima s obzirom na te kružnice jednake dužine tangenata ili jednaku potenciju; zato se zajednička sekanta dviju kružnica zove potencijala tih kružnica.

138. — Sada smo napokon u stanju da riješimo ovaj zadatak:

Zadane su dvije kružnice k *i* q *u hiperboličnoj ravnini, koje nemaju zajedničkih točaka. Konstruiraj os i nulkružnice pramena kružnica* $(K_1 + K_1')$, *komu pripadaju zadane kružnice* k *i* q.

R j e š e n j e: Zajednička prava sekanta p kružnica k i q predstavlja os tog pramena, a možemo je konstruirati prema postupku, koji smo upotrebili, kad smo određivali zajedničke točke dviju kružnica. Odaberemo li na tako konstruiranoj sekanti p po volji točku Q, pa odredimo polaru s točke Q s obzirom na kružnicu k, a točke presjeka polare s i kružnice k označimo sa E i F, onda kružnica q sa središtem u točki Q, koja prolazi točkama E i F, siječe pravac S_1S_2 u točkama K_1K_1', u nulkružnicama pramena (K_1+K_1'). Točke S_1 *i* S_2 su pravo ili nepravo središte kružnica k i q. Odredivši tako nulkružnice K_1 i K_1' odredili smo traženi pramen (K_1+K_1'), jer smo time omogućili njegovo popunjavanje.

LITERATURA:

Liebman, Nichteuklidische Geometrie.
Schilling, Projektive und nichteuklidische Geometrie.
Jouel, Vorlesungen über projektive Geometrie.

ETUDE SUR DES CONSTRUCTIONS FONDAMENTALES PLANIMETRIQUES DE LA GEOMETRIE DE LOBATCHEVSKY, PAR DES METHODES SYNTHETIQUES DE LA GEOMETRIE PROJECTIVE

Par Lav Rajčić, Zagreb

Résumé

Dans ce travail on donne un court aperçu des constructions fondamentales planimetriques de la géométrique de L. dans un plan projectif, tout en se basant sur les propriétés connues de la polarité des coniques.

Dans les N^os^ 1—6 on traite quelques théorèmes connus de la géométrie projective, dont on se servira souvent dans les N^os^ suivants.

Le point de départ est le système polaire absolue dans un plan projectif, qui est donné par une conique réelle nondégénérée — l'absolue k (№ 7).

Chaque pôle P et la polaire correspondante p peuvent être considérés, par rapport à l'absolue k, comme le centre et l'axe de la collinéation centrale involutoire (homologie). La collinéation centrale involutoire ainsi définie, avec le pôle P et la polaire p, sera désignée par (Pp) (№ 8).

Chaque collinéation involutoire centrale (Pp) définit dans le plan projectif une certaine modification des figures géométriques; cette modification sera définie comme un déplacement fondamental dans le plan projectif. Le système polaire absolu détermine dans le plan projectif ∞^2 des déplacements fondamentaux (Pp).

Le déplacement dans le plan projectif produit par deux ou plusieurs déplacements successifs sera appelé déplacement général et nommé $O = \Sigma\,(Pp)$. Le déplacement général représente une collinéation projective.

Les déplacements generaux $O = \Sigma\,(Pp)$ détérminent le groupe des déplacements projectifs; le déplacement $O = (Pp) + (Pp)$ represente l'identité de ce groupe (№ 15).

Pour plus de facilité dans l'expression les symboles suivants ont été introduits pour la droite: Si la droite a coupe l'absolue dans les points N_1 et N_2, nous écrivons: $a = N_1 N_2$. Si la droite a est orientée, nous dirons, que la longueur orientée $\overrightarrow{N_1 N_2}$ détermine l'orientation de la droite a, et nous écrivons: $a = \overrightarrow{N_1 N_2}$.

Dans les N^{os} 10, 11, 12, 13 et 14 on donne les constructions suivantes:

1° Construire une droite orientée $a' = \overrightarrow{N_1'N_2'}$ provenant de la droite orientée $a = \overrightarrow{N_1N_2}$ par le déplacement donné (Pp) (fig 1).

2° Déterminer deux déplacements fondamentaux qui déplacent le point T en T' (figure 2).

3° Déterminer le déplacement fondamental (Pp) qui déplace la droite orientée $a = \overrightarrow{N_1N_2}$ sur la droite orientée $a' = \overrightarrow{N_1'N_2'}$.

5° Etant donnée la droite $a = M_1M_2$ et le point T_1 sur elle, de meme que la droite $b = N_1N_2$ avec le point T_2, mais de sorte que les points T_1 et T_2 se trouvent à l'intérieur de l'absolue; démontrer qu'il est possible de déplacer, par deux déplacements fondamentaux, la droite orientée a sur la droite orientée b, de facon que le point T_1 tombe sur le point T_2.

On introduit ensuite dans le plan projectif la géométrie métrique (N^{os} 17—19), comme il suit: Afin de pouvoir déterminer dans le plan projectif le nombre de mesure pour les logueurs et les angles, on établit d'abord le critérium duquel il est possible de décider si deux figures géométriques de même nature sont congruentes ou non. La congruence est definie de la façon suivante: Si la figure géométrique B ressort de la figure géométrique A par n'importe quel déplacement appartenant au groupe $O = \Sigma\,(Pp)$, alors les figures géométriques A et B sont congruentes l'une par rapport à l'autre.

Etant donné que le groupe des déplacements generaux $O = \Sigma\,(Pp)$ a son élément d'identité il s'ensuit: Si les figures géométriques A et B sont congruentes avec la figure géométrique C, la figure géométrique A est congruente avec la figure géométrique B.

En conséquence de la congruence ainsi définie et à condition que les nombres de mesures introduits satisfassent les conditions suivantes: a) Si les longueurs AB et CD sont égales, elles doivent avoir le meme nombre de mesure, b) Si nous choissons sur la droit orientée p trois points A, B et C, les nombres de mesure des longueurs orientées doivent correspondre à la relation $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

On introduit dans les N^{os} 20—29 le nombre de mesure de la longuer AB se trouvant sur la droite $p = N_1N_2$ sous la forme $AB = \frac{\mu}{2} \ln (N_2\,N_1\,A\,B)$, μ étant un paramètre arbitraire. Du paramètre μ indétérminé nous disposons de façon que nous puissions choisir une longueur queleconque comme unité de mesure. Si nous cherchons la longueur RS qui, pour $\mu = 1$, représente l'unité de mesure, cette longueur RS est déterminée par la métrique acceptée, car $(N_2\,N_1\,R\,S) = e^2$. Cette unité de mesure s'appelle unité absolue de mesure ($\mu = 1$). Les nombres de mesure ainsi introduits correspondent aux conditions données. A coté de l'unité absolue, le nombre de mesure de la droite est πi (periode πi).

D'après la métrique ainsi définie les points du plan projectif se divisent en trois parties:

1° Tous les points à l'intérieur de l'absolue sont appelés point propres. Les longueurs déterminées par les points propres ont un nombre de mesure réél (période πi).

2° Les points à l'extérieur de l'absolue sont appelés points impropres. Si la droite, qui joigne deux points impropres, ne coupe pas l'absolue, les longueurs ainsi déterminées ont un nombre de mesure imaginaire. Si un point est propre et l'autre impropre, le nombre de mesure de la longueur correspondante est complexe (période πi).

3° Les points de l'absolue sont appelés points à l'infini, car ils représentent pour la métrique prévue des points infiniment éloignés.

Pour la même raison nous distinguons deux groupes des droites:

1° Toutes les droites avec deux points à l'infini — droites propres.

Toutes les droites avec un, ou aucun point à l'infini — droites impropres.

(Les droites impropres avec 1 point à l'infini se comportent comme des droites isotropes du plan euclidien).

Dans les N^os^ 30—34 a été introduit de façon duale le nombre de mesure de l'angle $\alpha = \sphericalangle ab$ sous la forme $\sphericalangle ab = \frac{i}{2} \ln (n_2 n_1 ab)$ et nous aurons:

1° Les droites qui se coupent dans un point propre, forment un angle à nombre de mesure réél (periode 2π).

2° Les droits qui se coupent sur un point de l'absolue, forment un angle à nombre de mesure 0, ce sont par conséquent selon la métrique acceptée des droites parallèles.

3° Une droite propre et une droite impropre, de même que deux droites impropres forment un angle à nombre de mesure complexe.

4° Les droites perpendiculaires sont détermenées par une paire de polaires conjuguées de l'absolue et forment 4 angles droits avec le nombre de mesure $\frac{\pi}{2}$.

La géométrie métrique dans le plan projectif, détérminé par la métrique ci-introduite, s'appelle géométrie hyperbolique.

Nous n'allons pas étudier ici toutes les figures géométriques du plan projectif, mais uniquement celles dont les longueurs et les angles ont un nombre de mesure réél, c'est à dire seulement les figures géométriques a l'intérieur de l'absolue, (№ 35).

Les relations entre les points, les droites et entre les points et les droites à l'intérieur de l'absolue (l'ensemble des points propres appartenant à une droite coupant l'absolue en deux points distincts sera appele — »droite«) satisfont tous les groupes d'axiomes de Hilbert, à l'exception de l'axiome des parallèles d'Euclid, qui doit être remplace par l'axiome des parallèles de Lobatchevsky (dont il est question au № 49), la géométrie hyperbolique a l'intérieur de l'absolue représente l'interprétation projective de la géométrie de L.

Les considérations ici présentées n'ont pas un caractère axiomatique. Notre but est, avant tout, d'obtenir les théorèmes fondamentaux planimétriques de la géométrie de L. à l'aide des constructign de la géométrie synthétique.

Dans les N^{os} 36 et 37 nous considérons les relations entre les points et les droites et le faisceau de 1re espèce. Dans les N^{os} 38—41 sont traitées les propriétés des droites perpenduculaires et le faisceau de 2^{e} espèce. Dans le № 42 on expose les caractéristiques de la symétrale de la longueur. On résout ainsi les constructions suivantes:

1^{o} Construire une perpenduculaire commune à deux droites semiparallèles (figure 4).

2^{o} Construire par le point A une perpenduculaire à la droite p.

3^{o} Construire la symétrale d'une longueur (figure 5).

Dans les N^{os} 43—44 il est question des symétrales d'angles opposés, de la symétrale d'un angle donné et de ses caractéristiques.

Dans les N^{os} 45—49 il on parle des droites parallèles, des faisceaux de droites de la 3^{e} espèce et de la fonction de L. $\alpha = \Pi(a)$.

Dans les N^{os} 50—54 sont données les constructions suivantes:

1^{o} Déplacer la longueur AB, qui se trouve sur la droite $a = M_1M_2$, sur la droite $b = N_1N_2$ à partir du point C de sorte que $CD = AB$, (figure 9).

2^{o} Construire le centre de la longueur AB (figure 5).

3^{o} Etant donnée la longueur AR, construire la longueur $AB = 2\,AR$, $AD = 3\,AR\ldots$

4^{o} Doubler l'angle donné.

Dans le N^{o} 55 il est question de la symétrique centrale et des triangles centralement symétriques (figure 10).

Dans les N^{os} 56—58 on mentionne la symétrie axiale et les figures axialement symetriques. En même temps on obtient les propriétés caractéristiques des triangles isocèles et equilatéraux par rapport aux angles et aux hauteurs (figure 11).

Dans les N^{os} 59—60 on mémontre par une construction synthétique que la somme des angles d'un triangle et moindre de π. On le demontre d'abord pour un triangle rectangle (figure 12), en se basant sur le caractère de l'involution hyperbolique, c'est à dire que ses paires de points associés ne se divisent pas.

Dans les N^{os} 62—63 sont présentées cinq régles sur la congruence des triangles.

Dans les N^{os} 64—67 sont présentées les constructions des points correspondants selon la definition: Si la droite *a* d'un faisceau donné (de 1re, 2^{e} ou 3^{e} espèce) est déplacée à l'aide du déplacement fondamental (*Pp*) sur la droite *a'* du même faisceau, alors nous appellerons correpondants les points associes sur les droites *a* et *a'* (figure 13, 14 et 15).

A l'aide de ces constructions il est possible de construire des cercles. Dans les N^{os} 68—83 on analyses leurs propriétés caractéristiques en se basant sur la définition: Le lieu géométrique des points des droites du faisceau (de 1re, 2^{e} ou 3^{e} espèce), qui correspondent avec un point donnée, s'appelle cercle (de 1re, 2^{e} ou 3^{e} espèce). Les cercles sont étudiés à l'aide de leurs constructions (figure 16, 18, 19 et 20). Il s'ensuit que la collinéation centrale, qui a son centre au centre du cercle et son axe dans la polaire de ce centre par rapport à l'absolue, déplace l'absolue dans le cercle donné. Par conséquent, au sens projectif, l'image des cercles sont des coniques qui touchent l'absolue en deux points à savoir:

1° Le cercle de 1re espèce en deux points imaginaires.

2° Le cercle de 2^{e} espèce en deux points rééls différents.

3° le cercle de 3^{e} espèce en deux points rééls qui coincident.

Les cercles de 2^{e} espèce ont leurs centres dans un point impropre, les cercles de 3^{e} espèce dans un point à l'infini. Si les points du cercle se trouvent a l'intérieur de l'absolue, le cercle s'appelle propre. Si tous les points du cercle sont a l'extérieur de l'absolue, le cercle s'appelle impropre. On demontre enfin, que tous les cercles de 3^{e} espèce sont congruents l'un par rapport a l'autre. Les cercles concentriques autour d'un centre donné détérminent, du point de vue projectif, un faisceau de coniques, parmi lesquelles figure aussi l'absolue.

Dans les N^{os} 84—85 nous considérons le cas ou l'absolue, d'abord sous la forme d'ellipse, grandit et en passant la forme parabolique et hyperbolique, dégénère en une droite double. En même temps par ce fait la métrique hyperbolique se transforme en métrique euclidienne.

Dans les N^{os} 86—87 nous considerons la rotation de 1re, 2^{e} et 3^{e} espèce et résolvons ce probleme: Construire le lieu géométrique des droites qui forment avec une droite donnée un angle constant donné. (Ces droites envelopent un cercle impropre de 2^{e} espèce, figure 21).

Dans les N^{os} 88—89 on traite les cercles circonscrits à un triangle donne et on démontre les théorèmes suivants:

1° La symétrale du coté d'un triangle est perpenduculaire à la médiane opposée (figure 22).

2° Par les points de chaque triangle passent 4 cercles, l'un est de la 1re ou 3e espèce, les trois autres sont de la 2e espèce. Le centre du cercle de 1re ou 3e espèce qui est circonscrit au triangle, est le point d'intersection des symétrales de cotés du triangle. Les centres des autres trois cercles de 2e espèce sont les pôles des médianes du triangle donné par rapport à l'absolue.

Dans le Nó 91 on démontre que les symétrales des angles opposés de cotés du triangle donné se coupent en 4 points et que ce sont les centres des cercles de 1re, 2e ou 3e espèce inscrits dans le triangle donné.

Dans les Nos 92—93 on demontre, que les hauteurs d'un triangle appartiennent à un faisceau de droites de 1re, 2e ou 3e espèce, et que les points pédaux des hauteurs sont des points propres.

Ensuite on étudie dans les Nos 94—95 par construction l'egalité du triangle par rapport à la surface, resp. le défaut (figure 23).

Dans les Nos 96—97 les triangles asymptotiques sont étudiés. On démontre d'abord que les triangles triplement asymptotique sont congruents entre eux et qu'ils possédent une surface définie. A cet effet on considère le triangle simplement asymptotique *ABN*, qui se transforme par la méthode de l'exhaustion selon Liebmann au quadrilatère $AA'A_2'A_2$ (figure 24).

Dans les Nos 103—110 on traite le triangle rectangle, de même que son quadrilatère associé et on considère leurs caractère déterminatif mutuel. On construit le quadrilatère *ADEF* associé au triangle rectangle *ABC*, (figure 25 et 26), et ensuite, à l'aide de séries de points et de faisceaux de droites projectifs, on détermine les cotés du quadrilatère à l'aide des éléments du triangle rectangle donné. A la fin on mentionne la règle d'Engel sur la châin de triangles rectangles, qui appartiennent au triangle *ABC* donné.

Dans les Nos 111—123 les constructions suivants sont résolues:

1° Construire les points d'intersection d'une droite et d'un cercle, dont le centre et un point de la circonference sont connus (figure 27).

2° Construire le pôle d'une droite par rapport à un cercle donné.

3° Construire les points communs de deux cercles (figure 28). Ce problème consiste en la construction des points communs de deux coniques qui touchent l'absolue en deux points.

4° Problème dual: Construire les tangentes communes à deux cercles (figure 29).

Dans les Nos 124—131 sont donnés les constructions du triangle en partant de ses éléments donnés à l'aide des cinq règles de congruence des triangles. Si le triangle *ABC* est donné selon la 3e regle, c'est à dire par le coté $AB = c$ et les angles $\sphericalangle A = \lambda$, $\sphericalangle C = \nu$, ce triangle est costruit comme il suit (figure 30): Toutes les droites qui ferment l'angle ν avec la coté *AC*, enveloppent un cercle impropre de 2^e^ espèce. La tangente tirée du point B sur ce cercle, coupe le coté b dans le point C. Si le triangle ABC est donné par la 5^e^ regle, par les angles $\sphericalangle A = \lambda$, $\sphericalangle B = \mu$, $\sphericalangle C = \nu$, ce triangle est construit comme il suit: On dessine l'angle $\sphericalangle A = = \lambda = \sphericalangle bc$. Toutes les droites qui ferment avec la droite c l'angle μ enveloppent le cercle k_2 impropre de 2^e^ espèce; et toutes les droites qui ferment avec la droite b l'angle ν, enveloppent un cercle impropre k_2' de 2^e^ espèce. Les tangentes communes des cercles k_2 et k_2' déterminent deux triangles centralement symétriques congruents aux angles λ, μ et ν.

Finalement, les N^os^ 137—138 est étudié le faisceau de cercles à deux points fondamentaux réels A et B; à deux points fondamentaux réels coincidants $A = B$; et enfin à deux points fondamentaux imaginaires.

Dans le faisceau à deux points fondamentaux réels les cercles peuvent être divisés en deux parties: Les cercles avec leurs centres sur la symétrale s_1 de la longueur $\overrightarrow{AB}$, et les cercles de 2^e^ espèce avec leurs centres sur la symetrale s_2 de la longueur $\overrightarrow{BA}$ (figure 32).

Dans le cas $A = B$, les cercles dont les centres sont sur la polaire s_2 du seul point fondamental A, dégénèrent en droites, c'est à dire en ligne-zéro.

Après cela on étudie encore le faisceau avec des points fondamentaux imaginaires (figure 33) et on arrive à ce théorème: Chaque point sur la sécante commune de deux cercles (la sécante coupe les cercles dans des points réels ou imaginaires) a par rapport à ces cercles la même longueur des tangentes ou la même puissance.

On réponde ensuite à la question, comment construire un cercle qui passe par un point donné et qui appartient au faisceau déterminé par deux de ses cercles (les points d'intersections des ces cercles pouvant être réels ou imaginaires).