Rad Hrvatske akad. znan. umj. mat. [467] **11** (1994), 67–75

M-MODELL DES HYPERBOLISCHEN H^3-RAUMS IN DER MÖBIUS-EBENE

Ivanka Babić und *Branko Kučinić*

Abstract. In this paper we present the construction of a new model of H^3-space called M-model as well as all his metrical and other properties.

Die Beiträge der Theorie des Projizierens im H^3-Raum sind in der Literatur meistens theoretysch ohne praktische Anwendung und Bestätigung bearbeitet. Die Bestrebungen, diese Probleme konstruktiv durch die Mittel der euklidischen Geometrie zu lösen, führen zuerst zum Bau eines Modells, das durch *orthogonales Projizieren des H^3-Raums auf die Horosphäre* und dann durch *isomorphe Abbildung* der mit einem unendlich fernen Punkt bereicherten *Horosphäre* auf *die Möbius--Ebene* erreicht wird.

Für diese erste Abbildung sind zwei aus der Literatur bekannte Sätze hervorzuheben [6]:

a. *jeder Geraden des L^3-Raums ist auf der bereicherten Horosphäre des Bildes ein Punktepaar* $(A'I_\infty, A'II_\infty)$ *zugeordnet, die die orthogonale Projektion unendlich ferner Punkte einer gegebenen Geraden sind und umgekehrt;*

b. *das Randbild jeder Ebene des L^3-Raums ist auf der Horosphäre ein Zyklus oder eine Kreislinie* $\Pi(k)$. *Wenn aber die Ebene die Achse der Horosphäre enthält, so ist das Randbild ein Horozyklus und umgekehrt.*

Diese Sätze auf den H^3-Raum zu erweitern bedeutet, auch die uneigentlichen (idealen) Punkte des Raums einzubeziehen. Dabei ist zu bemerken, daß alle eigentlichen Punkte der Geraden auf den Bogen des Horozyklus projiziert werden, der die Projektionen der unendlich fernen Punkte der Geraden verbindet, und die uneigentlichen Punkte der Geraden auf dem übrigen Teil des Horozyklus projiziert werden. Ebenso werden die eigentlichen Punkte der Ebene in das Innere des Randbildes der Ebene und die uneigentlichen Punkte der Ebene ausserhalb projiziert.

1. Die Inzidenzrelation von Geraden und Ebene wird bei Berücksichtigung der Sätze a. und b., durch den folgenden Satz gegeben:

SATZ 1.1. *Eine Gerade* $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ *ist mit der Ebene* $\Pi(k)$ *inzident, wenn die Punkte* $A'I_\infty$ *und* $A'II_\infty$ *mit der Kreislinie k inzident sind*

Der Beweis ist evident.

Für die Inzidenzrelation von Punkt und Ebene gilt der bekannte Satz:

SATZ 1.2. *Ein Punkt ist mit einer Ebene inzident, wenn er mit einer Geraden dieser Ebene inzident ist.*

Da die innere Geometrie der Horosphäre die Geometrie der euklidischen Ebene ist, läßt sich die mit einem unendlich fernen Punkt bereicherte Horosphäre isomorphisch auf die *Möbius*-Ebene abbilden. Kreise, Horozyklen und Punkte der Horosphäre werden auf Die Kreise, Geraden und Punkte der *Möbius*-Ebene abgebildet, in der unter dem Begriff des Kreises auch die Gerade eingeschlossen ist. Die Ergebnisse sind folgende:

1. *Die Ebenen* des H^3-Raums werden bijektiv auf *die Kreise* und *Geraden* der *Möbius*-Ebene abgebildet.
2. *Die Geraden* des H^3-Raums werden bijektiv in *Paare verschiedener Punkte* der *Möbius*-Ebene abgebildet.
3. *Die Punkte* des H^3-Raums werden bijektiv in *die Punkte* der *Möbius*-Ebene abgebildet jedoch sind sie nicht selbständig, sondern mit *den Trägergeraden* verbunden.

Für das so gewonnene Modell soll gezeigt werden, daß die interpretierten Elemente bei den erwähnten Relationen der Geometrie des H^3-Raums genügen. Zuerst werden Lagenbeziehungen eingeführt, und danach die *als Sätze* im Modell begriffenen *Inzidenzaxiome bewiesen.*

Für *die Beziehung zweier Ebenen, einer Geraden* und *einer Ebene* sowie *zwei Geraden* gelten im gewonnen Modell folgende konstruktiv leicht beweisbare Lemmata.

LEMMA 1.1. *Zwei Ebenen* $\Pi_1(k_1)$ *und* $\Pi_2(k_2)$ *des* H^3*-Raums schneiden sich in einer eigentlichen Geraden, einer uneigentlichen (idealen) mit einem Grenzpunkt oder in einer uneigentlichen Geraden ohne Grenzpunkte je nachdem, ob sich ihre Randbilder (Kreise und Geraden) schneiden, berühren oder nicht real schneiden.*

Der Beweis ist evident. Von Ebenen, die einen gemeinsamen Grenzpunkt haben, sagt man, daß sie *parallel* im *Lobatschevski*schen Sinne sind, und Ebenen ohne gemeinsame Grenzpunkte sind *überparallel.*

DEFINITION 1.1. *Alle Ebenen einer eigentlichen Geraden bilden ein elliptisches Ebenenbüschel. Ein solches Ebenebüschel ist im Modell mit elliptischem Kreisbüschel repräsentiert, bei dem alle Kreise durch zwei Punkte gehen, die unendlich ferne Punkte der Achse des Ebenenbüschels sind.*

LEMMA 1.2. *Damit die Gerade* $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ *die Ebene* $\Pi(k)$ *in einem eigentlichen Punkt, Grenzpunkt oder einem uneigentlichen Punkt durchsticht, ist es notwendig und hinreichend, daß einer der unendlich fernen Punkte der Geraden innerhalb und der andere ausserhalb der Kreislinie k liegt; daß nur einer von ihnen auf der Kreislinie k liegt; daß beide innerhalb oder außerhalb der Kreislinie k liegen.*

Der Beweis wird mittels des elliptischen Kreisbüschels erbracht, wo jeder Kreis das Bild einer Ebene der Geraden $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ ist.

LEMMA 1.3. *Damit zwei Geraden $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ und $b(B'I_\infty, B'II_\infty)$ derselben Ebene $\Pi(k)$ zugehören, ist es notwendig und hinreichend, daß die beiden Punktpaare $A'I_\infty, A'II_\infty$ und $B'I_\infty, B'II_\infty$ auf derselben Kreislinie liegen. Wenn sich die Punktpaare teilen, schneiden sich die Geraden in einem eigentlichen Punkt; wenn sich die Paare nicht teilen, schneiden sich die Geraden in einem uneigentlichen Punkt, und dann sind die Geraden überparallel. Haben die beiden Punktpaare einen gemeinsamen Punkt, dann sind die Geraden parallel im Lobatschevskischen Sinne und schneiden sich in einem Grenzpunkt.*

Der Beweis geht direkt aus den Sätzen (1.1) und (1.2) hervor.

2. Die Inzidenzaxiome, I_1 und I_2 lassen sich durch einen Satz ersetzen:

(I_1, I_2); *Es gibt eine und nur eine Gerade, die mit zwei verschiedenen Punkten inzident ist.*

Da in diesem Modell jeder der Punkte mit seiner Trägergeraden, die im allgemeinen windschief zueinander sind, gegeben wird, ist es wichtig, diesen Satz zu beweisen.

Beweis des Satzes (I_1, I_2): Dieser Beweis lässt sich konstruktiv ausführen. P und R seien zwei verschiedene Punkte, und jeder der Punkte wird mit seiner Trägergeraden gegeben. Die Ebene, in der die beiden Punkte sind, ist zu bestimmen, weil sich diese dann durch eine Gerade verbinden lassen. Es wurden zwei Ebenen $\Pi_1(k_1)$ und $\Pi_2(k_2)$ bestimmt, und zwar mit der Trägergeraden eines Punktes und mit einem anderen Punkt und umgekehrt. Damit wird erreicht, daß beide Punkte auch zu der Ebene $\Pi_1(k_1)$ und zu der Ebene $\Pi_2(k_2)$ gehören. Die verbundenen Punkte bilden ein und dieselbe Gerade, die die Schnittgerade dieser zwei Ebenen ist, und zwei Ebene haben nur eine Schnittgerade (Satz 1.1. und Lemma 1.1.).

Es ist sehr interessant, die Axiome I_4 und I_5 zu beweisen, die auch mit einem Satz ausdrücken lassen:

(I_4, I_5): *Es gibt eine und nur eine Ebene, die mit allen beliebigen drei nicht kollinearen Punkten inzident ist.*

Beweis des Satzes (I_4, I_5): In diesem Fall sind drei nicht kollineare Punkte $A(A'I_\infty, A'II_\infty, A')$, $B(B'I_\infty, B'II_\infty, B')$, $C(C'I_\infty, C'II_\infty, C')$, jeder mit seiner Trägergeraden, die zueinander windschief sind, aufgegeben. Zuerst bestimmt man durch Verbinden der Punkte A und B die Verbindungsgerade $p(P'I_\infty, P'II_\infty)$ und auch die Verbindungsgerade $q(Q'I_\infty, Q'II_\infty)$ der Punkte B und C. Damit werden zwei einander schneidende Geraden gewonnen, die die Ebene $\Pi(k)$ bestimmen, in der alle drei Punkte liegen (Abb. 1). Daß die Ebene $\Pi(k)$ auch die einzige ist, in der alle drei gegebenen Punkte liegen, wird so gezeigt, daß man die Verbindungsgerade $m(M'I_\infty, M'II_\infty)$ der Punkte A und C bestimmt mittels der Ebene $\Pi_6(k_6)$ zu der die beiden Punkte gehören. Die Schnittgerade der Ebenen $\Pi(k)$ und $\Pi_6(k_6)$ ist dieselbe Gerade m zu der die Punkte A und C gehören. Das ist verständlich, weil diese Punkte auch in der Ebene $\Pi(k)$ liegen. Da die Geraden m, p, q zu derselben Ebene gehören, ist die Eindeutigkeit bewiesen.

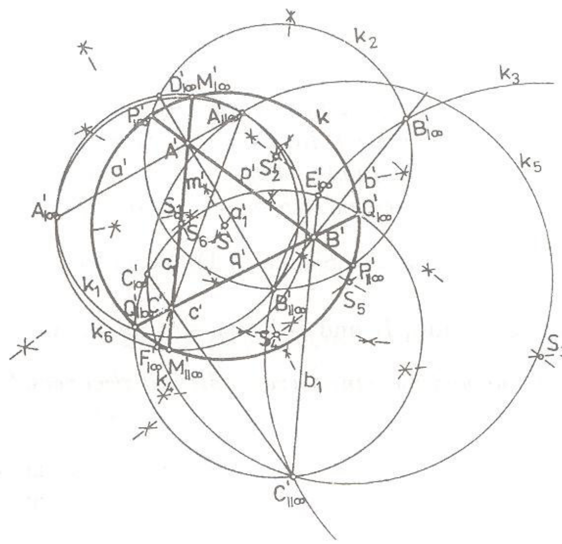

Abb. 1.

Die übrigen Inzidenzaxiome lassen sich einfach auf dieselbe Art beweisen.

3. Die Metrik wird im Modell über die metrische Grundaufgabe-*die Winkelbestimmung zweier Ebenen-eingeführt.*

SATZ 3.1. *Der Winkel zweier Ebenen $\Pi_1(k_1)$ und $\Pi_2(k_2)$, die sich in einer eigentlichen Geraden schneiden, ist gleich dem euklidischen Winkel, den die Kreislinien k_1 und k_2 bilden, die die Randbilder dieser Ebenen auf der Horosphäre sind.*

Beweis: Die Ebenen $\Pi_1(k_1)$ und $\Pi_2(k_2)$, die sich in der Geraden $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ schneiden, sind auf der Horosphäre durch die Kreislinien k_1 und k_2 dargestellt, die sich in dem Punktepaar $(A'I_\infty, A'II_\infty)$ schneiden. Der Winkel zwischen den Kreislinien wird mit dem Winkel gemessen, den im Schnittpunkt der Kreislinien deren Tangenten bilden. Da die Geraden auf der Horosphäre Horozyklen sind, werden durch die Tangenten zwei neue Ebenen bestimmt, die durch das Zentrum der Horosphäre verlaufen und sich in der Geraden $a_0 \underset{AI_\infty}{||} a$ schneiden. Die parallelen Geraden definieren eine neue Horosphäre mit dem Zentrum in dem Punkt $A'I_\infty$, auf der alle vier Ebenen mit Horozyklen repräsentiert sind. Je zwei dieser Horozyklen verlaufen parallel einander und bilden ein Parallelogramm. Berücksichtig man, daß auf der Horosphäre die euklidische Geometrie realisiert ist, so sind erweislich gegenüberliegenden Winkel im Parallelogramm einander gleich, und daß bedeutet, daß der Winkel zwischen den Tangenten gleich dem Winkel ist, den die Kreislinien k_1 und k_2 bzw. die Ebenen Π_1 und Π_2 bilden, deren Randbilder sie sind.

Der Beweis basiert auf der Φ-Abbildung wie sie *S. Bilinski* eingeführt hat. Weiter läßt sich sagen, daß dieser Satz nur ein Sonderfall eines allgemeinen Satzes ist, der besagt, daß der Winkel zweier Ebenen gleich dem Winkel ist, den die Kreislinien-die Randbilder dieser Ebenen-auf jeder beliebigen Sphäre des H^3--Raums bilden.

Der Satz 3.1 verweist auf die Tatsache, daß im Modell der Winkel zweier Ebenen auf natürliche Weise bestimmt wird. Daraus geht unmittelbar hervor, daß gegenseitig orthogonale Ebenen mit orthogonalen Kreisen dargestellt werden.

Die Orthogonalität von Geraden und Ebene ist mit dem Satz gegeben:

SATZ 3.2. *Damit die Gerade $p(P'I_\infty, P'II_\infty)$ orthogonal auf der Ebene $\Pi(k)$ steht, ist es notwendig und hinreichend, daß die Punkte $P'I_\infty$ und $P'II_\infty$ konjugiert in bezug auf die Kreislinie k und kollinear mit dem Mittelpunkt M' des Kreises k sind.*

Der Beweis wird mit Hilfe der Ebenen geführt, die orthogonal zu der gegebenen Ebene $\Pi(k)$ sind und sich in der Geraden $p(P'I_\infty, P'II_\infty)$ schneiden, die auch orthogonal zu der Ebene $\Pi(k)$ ist. Jede Ebene, die durch die Gerade p verläuft, ist orthogonal zu der Ebene $\Pi(k)$, also auch die Ebene, die durch das Zentrum der Horosphäre verläuft und im Modell mit der Geraden p identisch ist. Da der Horozyklus orthogonal zur Kreislinie ist, muß nach dem Satz 3.1. die Gerade p durch das Zentrum M' des Kreises k verlaufen. Damit wird die Kollineation der Punkte $P'I_\infty, P'II_\infty$ und M' bewiesen. Auf Grund der bekannten Eigenschaften der Polarität der Kegelschnitte [3] gilt:

$$(\overline{M'K_1'})^2 = \overline{M'P'I}_\infty * \overline{M'P'II}_\infty$$

was bedeutet, daß die Punkte $P'I_\infty$ und $P'II_\infty$ in bezug zu der Kreislinie k konjugiert sind.

Der Winkel zweier Geraden $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ und $b(B'I_\infty, B'II_\infty)$ die sich (im eigentlichen Punkt) schneiden, ist gleich dem Winkel, den die Ebenen Π_a und Π_b bilden, die durch die Geraden a und b orthogonal auf der Ebene $\Pi(k)$ stehen, (die diese Geraden bestimmen). Das bedeutet, daß die wahre Größe des Winkels zweier Geraden gleich dem Winkel ist, den die Kreislinien k_a und k_b bilden, die durch die Geraden a und b orthogonal auf dem Kreis k stehen. In bezug auf die genannten Tatsachen und Ergebnisse in [6], erhält man den algebraischen Ausdruck:

$$\mathrm{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = -(A'I_\infty A'II_\infty B'I_\infty B'II_\infty)\,. \tag{3.1}$$

Das ist die *Hesse*sche Relation für das Winkelmaß [5]. Die Relation gilt auch in dem Fall, wenn sich die Geraden in der Ebene befinden, die durch das Zentrum der Horosphäre verläuf und deren Randbild ein Horozyklus ist. Im Modell ist das die euklidische Gerade mit zwei Punktpaare die sich teilen, weil sich die Geraden schneiden. Folglich gilt:

SATZ 3.3. *Der Winkel zweier Geraden, die sich (in einem eigentlichen Punkt) schneiden, ist durch die Hessesche Relation gegeben.*

Der Wert des Doppelverhältnisses $\Delta = -1$ in der *Hesse*schen Relation ist *die Orthogonalitätsbedingung* zweier Geraden. Das bedeutet im Modell, daß die Geraden in bezug auf den Kreis, der das Bild der Ebene der gegebenen Geraden ist, *konjugiert* sein müssen. Die bekannten Eigenschaften der Polarität der Kegelschnitte [3] ermöglichen den Beweis des Satzes:

SATZ 3.4. *Damit die zwei sich schneidenden Geraden $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ und $b(B'I_\infty, B'II_\infty)$, zueinander orthogonal sind, ist es notwendig und hinreichend, daß die Punkte $A'I_\infty$, $A'II_\infty$, $B'I_\infty$, $B'II_\infty$ konzyklisch mit der Kreislinie k sind, die das Randbild der Ebene $\Pi(k)$ der gegebenen Geraden ist, und daß die Geraden a und b in bezug auf diese Kreislinie k konjugiert sind.*

Allein schon die *Hesse*sche Relation für das Winkelmaß genügt für die Verifizierung des Modells der H^2-Ebene und damit auch des H^3-Raums. Die Bestimmung der Relation für das hyperbolische Entfernungsmaß zweier Punkte führt zu einem interessanten Ergebnis. Denn im Modell wird die Entfernung zweier Punkte $P(k, P')$ und $Q(k, Q')$, die zu der Ebene $\Pi(k)$ gehören und deren Trägergerade die Gerade $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ der Ebene ist, durch die *Laguerre*sche Formel gegeben:

$$d = \frac{1}{2}\ln(P'Q'A'I_\infty A'II_\infty). \tag{3.2}$$

Der Beweis basiert auf der Bestimmung des Parallelenwinkels φ' für die Länge $P'Q'$. Ausgehend von der Relation

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = e^{-d}$$

für die Distanz d und den Parallelenwinkel [2], und unter Verwendung der Relation (3.1) und der projektiven Transformation des Doppelverhältnisses [1], wird die wahre Größe des Parallelenwinkels φ' bestimmt, dessen Parallelendistanz die wahre Größe der Länge $P'Q'$ ist, und so erhält man die Relation (3.2).

Interessant ist, daß sich in ein und demselben Modell der H^2-Ebene sowohl die *Hesse*sche Relation für das Winkelmaß zweier Geraden als auch die *Laguerre*sche Formel für das Entfernungsmaß zweier Punkte begegnen, während in einer ganzen Reihe bekannter Modelle der H^2-Ebene sind hauptsächlich immer gleichartige Relationen auftreten. Das ist aber nur natürlich, weil für das Winkelmaß räumliche Parameter (zwei Ebenen) benutzt werden, während das Entfernungsmaß in einer Ebene definiert wird, also in einem Segment des gesamten Modells, das seinerseits ein *Klein*sches Modell darstellt. Verstände man die Geraden als *Reihen* von Punkten in einer Ebene, so würde für das Winkelmaß ebenfalls die *Laguerre*sche Relation erreicht.

Das Modell ist insbesonder vom konstruktiven Aspekt her anwendbar. Alle Aufgaben im Zusammenhang mit der H^2-Planimetrie oder der H^3-Stereometrie lassen sich konstruktiv in dem gewonnenen Modell lösen, und zwar durch die Mittel der euklidischen Geometrie.

Von den metrischen Aufgaben ist es wichtig, die Winkelsymmetrale zweier Geraden hervorzuheben. Sie bestimmt man konstruktiv so, daß man eine Gerade p' parallel zu den beiden Schenkeln des Winkels aufstellt. Die Gerade s', die durch die Spitze des Winkels verläuft und zu der Geraden p' orthogonal ist, halbiert den Winkel. Aus der Orthogonalitätsbedingung zweier Geraden (Satz 3.4) folgt daß die Gerade s' durch den Pol der Geraden p' verlaufen muß (Abb. 2.).

4. Die Geradenspiegelung. Mittels der Winkelsymmetrale zweier Geraden kann man in die H^2-Ebene die Abbildung einführen, die jedem Punkt einer Geraden je einen Punkt der anderen Geraden so zuordnet, daß die Entfernungen der Punkte von der Spitze des Winkels bzw. vom Schnittpunkt zweier Geraden gleich sind.

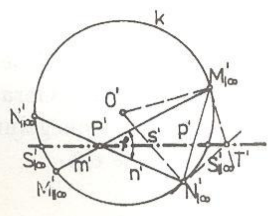

Abb. 2.

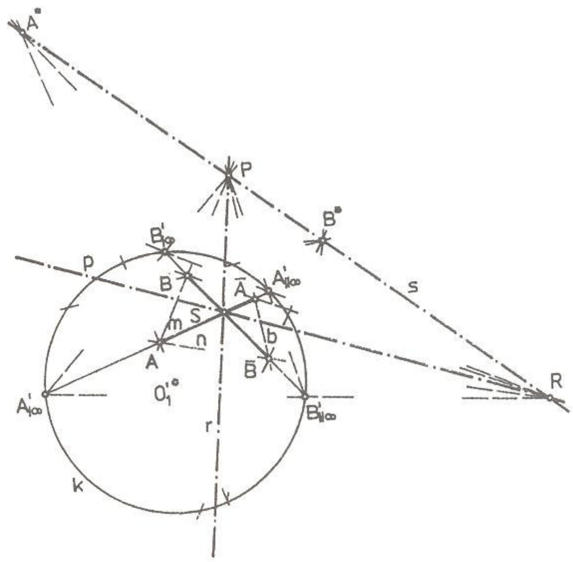

Abb. 3.

Es sei die Ebene $\Pi(k)$ mit ihren zwei Geraden $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ und $b(B'I_\infty, B'II_\infty)$ gegeben, die sich in einem eigentlichen (Abb. 3), unendlich fernen oder uneigentlichen Punkt S schneiden. Die Winkelsymmetralen dieser gegebenen Geraden seien die Geraden p und r. Jede auf der Symmetrale p orthogonal stehende Gerade muß durch den Punkt P (das heißt durch den Pol der Geraden p) gehen. Die durch den Punkt $A \in a$ orthogonal zur Symmetrale p gelegte Gerade m schneidet die Gerade b in dem Punkt B, und es gilt $SA = SB$, weil es sich um eine Spiegelung in bezug auf die Gerade p handelt (Abb. 3). Berücksichtigt man bei sich in einem eigentlichen Punkt schneidenden Geraden auch die Symmetrale r (Abb. 3) so gehen alle die orthogonal auf der Symmetrale r stehenden Geraden durch den Punkt R, so daß dem Punkt $A \in a$ auch der Punkt $\overline{B}$, der mit der Gerade b inzident ist, zugeordnet ist und dann auch $SA = S\overline{B}$ gilt. Indessen ist bei überparallelen Geraden ihre gemeinsame Normale die Gerade s, und die Gerade p befindet sich gleich weit entfernt von den beiden Geraden a und b. Defacto ist p die

Winkelsymmetrale, deren Spitze der uneigentliche Punkt S ist. Jede Gerade durch den Punkt P (d.h. durch den Pol der Geraden p) steht orthogonal auf der Geraden p und trägt Paare zugeordneter Punkte. Wenn die Punkte A und B symmetrisch in bezug auf die Gerade p zugeordnet sind, gilt auch für sie die Gleich $SA = SB$.

Die Gleich wird unter Benutzung von Projektivität und Relation (3.2) bewiesen:

$$\begin{array}{l} (ASA'II_\infty A'I_\infty) \overset{P}{\underset{\wedge}{-}} (BSB'II_\infty B'I_\infty) \\ (ASA'II_\infty A'I_\infty) \overset{R}{\underset{\wedge}{-}} (\overline{B}SB'II_\infty B'I_\infty) \end{array} \quad \overset{3.2.}{\Longrightarrow} \quad AS = BS = \overline{B}S.$$

Im allgemeinen kann man mittels der Geraden p und ihres Pols P jeder Geraden $a(A'I_\infty, A'II_\infty)$ der Ebene $\Pi(k)$ die symmetrisch zugeordnete Gerade $b(B'I_\infty, B'II_\infty)$ in bezug auf die Gerade p bestimmen, und jedem Punkt der Geraden a einen symmetrisch zugeordneten Punkt auf der Geraden b. Eine solche Abbildung wird *die Geradenspiegelung* oder (P,p) Abbildung genannt. Auf Grund der bekannten Eigenschaften der Polarität der Kegelschnitte ist dies eine Zentrale involutorische Kollineation, die ein Doppelverhältnis von vier Elementen invariant hinterläßt [4].

Durch die Abbildung (P,p) wird im Modell die Bewegung in der H^2-Ebene eigenführt, die die Übertragung der Streckenlänge von einer auf die andere Gerade der Ebene ermöglicht. Das zeigt eine große Anwendbarkeit der Geradenspiegelung bei der konstruktiven Lösung planimetrischer Aufgaben der H^2-Ebene ein.

LITERATUR:

[1] *H. S. M. Coxeter*, Projektivna geometrija, Zagreb, 1977.

[2] *V. I. Kostin*, Osnovanija geometrii, Moskva-Leningrad, 1946.

[3] *V. Niče*, Uvod u sintetičku geometriju, Zagreb, 1956.

[4] *L. Rajčić*, Obrada osnovnih planimetrijskih konstrukcija geometrije Lobačevskog sintetičkim sredstvima, Glasnik MFA **5**, (1950), 57–120.

[5] *B. A. Rozenfeljd*, Neevklidovy prostranstva, Moskva, 1969.

[6] *Z. A. Skopec*, Osnovy načertateljnoj geometrii prostranstva Lobačevskogo, Metody načertateljnoj geometrii i jejo priloženija, Sbornik statej., Moskva, 1956.

Angenommen in II. Abteilung
4. 6. 1991.

Fakultät für Bauwesen
Kačićeva 26
41000 Zagreb, Croatien

M-model hiperboličkog H^3-prostora u Möbiusovoj ravnini

Ivanka Babić i *Branko Kučinić*

Sadržaj

U članku se obrađuje model H^3-prostora dobiven ortogonalnim projiciranjem H^3-prostora na horisferu, zatim izomorfnim preslikavanjem horisfere na *Möbius*ovu ravninu. U njemu se postiže *Hesse*ova relacija za mjeru kuta i *Laguerre*ova formula za mjeru duljine. Model je pogodan za konstruktivnu obradu H-geometrije euklidskim sredstvima, posebno nakon uvođenja osne simetrije.

Prihvaćeno u II. razredu
4. 6. 1991.