Бранко Кучинић, Загреб

СИНТЕТИЧКА ВЕЗА KLEIN-ОВОГ И GYARMATHI-ЈЕВОГ МОДЕЛА Н-РАВНИНЕ

САЖЕТАК: Умјесто аналитичке везе Klein-ова и Gyarmathi-јева модела нуди се ова веза синтетички. Ово има за циљ омогућити истраживања h-равнине у склопу елементарне конструктивне геометрије еуклидским шестаром и равналом. За везу се показује погодна обична инверзија на кружници, а њена математичка коректност произлази из геометријског изоморфизма — показује се наиме очување трију основних геометријских релација : инциденције, поређаја и конгруенције.

КЉУЧНЕ РИЈЕЧИ: Н-модели, Klein, Gyarmathi, веза.

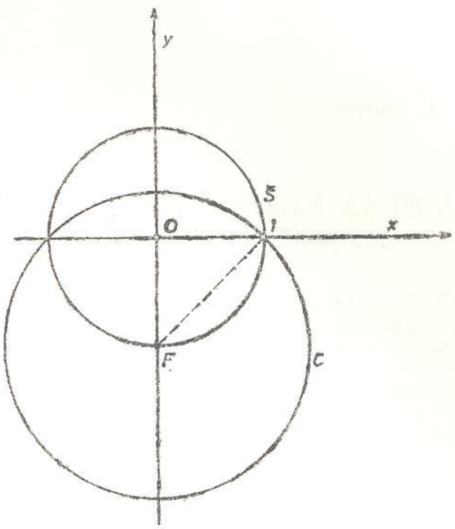
Gyarmathi-јев модел, један од новијих, интересантан је посебно због употребљивости у конструктивне сврхе. Припада фамилији модела с Hesse-овом метриком [3], што га битно разликује од опће познатог и такођер конструктивно употребљивог Klein-овог модела. У Gyarmathi-јеву моделу истакнути су фиксни правац (х-ос) и фиксна точка F (О,—1). Хиперболички правци су кружнице које припадају мрежи (F), док су точке у обичном смислу. Прави правци су оне кружнице из *(F)* које реално сијеку темељни правац *s* (а сјецишта су крајеви). Доња полуравнина испуњена је идалним точкама, јер је и инциденција у обичном смислу. Поређај точака на луку кружнице (правог h-правца) уведен је такођер у обичном смислу [1] и [2]. За релацију конгруенције двију дужина, на примјер, потребан је појам карактеристике. Карактеристика дужине је двоомјер $(A_c\, B_c\, U_c\, V_c)$ што га на луку кружнице (h-правца) чине дане точке А, В и њихови крајеви U, V. Конгруенција двију дужина дана је сада као једнакост њихових карактеристика. Слично се уводи и конгруенција кутова.

Већ је аналитички показано [4] да су Klein-ов и Gyarmathi-јев модел спојиви квадратним пресликавањем (посебно одабраном обичном инверзијом на кружници). Предност је синтетичке везе у томе што омогућава директна конструктивна истраживања у оба модела. Да би се показала геометријска изоморфност тих двају модела, потребно је за такво пресликавање доказати обострано једнозначно пресликавање геометријских елемената (точака и праваца) уз чување трију основних геометријских релација (инциденција, поређај и конгруенција).

Узмимо у реалној пројективној равнини (еуклидски модел) Klein--ов модел h равнине с апсолутом на јединичној кружници.

$$\bar{S} \ldots x^2 + y^2 - 1 = 0$$

Пресликајмо овај модел обичном инверзијом на кружници с којој је центар точка F (0,—1) кружнице (1), а полумјер $r = \sqrt{2}$ (сл. 1). На основу својстава обичне инверзије закључујемо [5]:



Сл. 1

a) H-правац сматрамо и даље h-правцем у „подручју слика", што је сада кружница кроз точку F. Како се кружница $\bar{s}$ пресликава у ос $x = s$, прави правци бити ће оне кружнице точке F које ос x реално сијеку, а сама ос x представљат ће крајеве. Klein-ови правци који пролазе точком F пресликат ће се сами у себе, али их можемо сматрати распаднутим кружницама.

б) Инверзија је точковно пресликавање. Обострана једнозначност овог пресликавања нарушена је за точку F, којој је придружен читав бесконачно далеки правац. Ово се може избјећи увођењем Möbius-ове равнине [1].

ц) Реализација инциденције очито остаје и даље релација инциденције у обичном смислу. Инверзија дакле чува ту релацију.

д) Поређај точака (ABC) перспективно из центра F преко зрака $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ преноси се на точке ($A_c\, B_c\, C_c$) (сл. 2). Према томе, инверзија чува и поређај точака у обичном смислу.

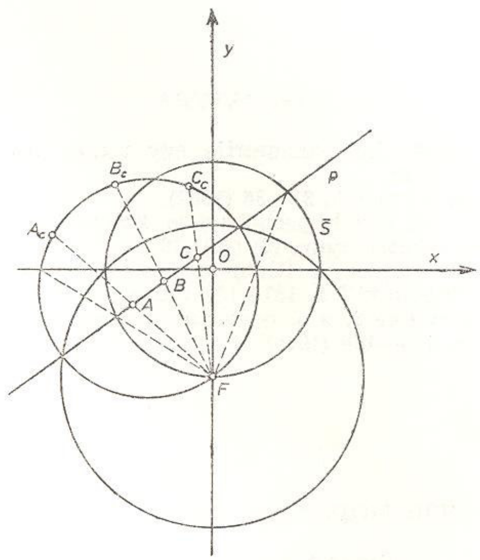
е) Испитајмо још релацију конгруенције за дужине. Будући да је удаљеност точака AB у Klein-овом моделу дефинирана Laguere--овим изразом $d = \frac{1}{2} \ln (ABUV)$, очито је да је релација конгруенције двију дужина AB и CD дана једнакошћу двоомјера (ABUV) = (CDU'V'), гдје су U, V, односно U', V' крајеви спојница AB, односно CD. Након пресликавања инверзијом, на основу Pappus-овог и Steiner-овог ставка, излази да на Gyarmathi-јевим h-правцима важи

$$(ABUV)=(A_c\, B_c\, U_c\, V_c)$$

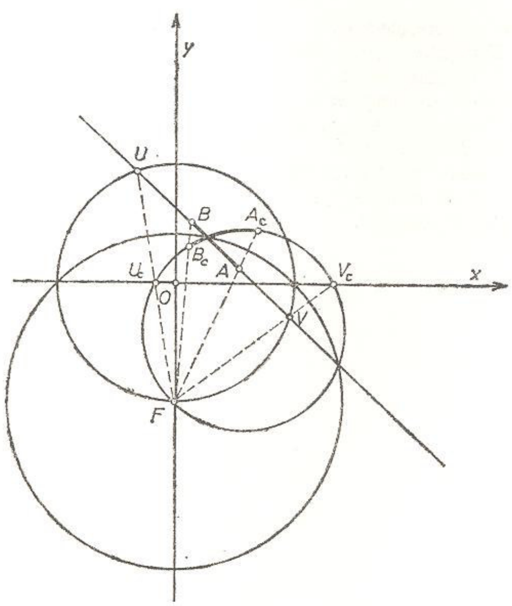
$$(CDU'V')=(C_c\, D_c\, U_c'\, V_c')$$

односно,

$$(A_c\, B_c\, U_c\, V_c)=(C_c\, D_c\, U_c'\, V_c')$$



Сл. 2



Сл. 3

а то значи једнакост Gyarmathi-јевих карактеристика за дужине. Другим ријечима, релација конгруенције из Klein-овог модела прелази оваквом инверзијом у релацију конгруенције Gyarmati-јевих модела. Могло би се показати да је сачувана и релација конгруенције за кутове, што излази на основу чињенице да су тијела крајева у Gyarmathi-јеву и Klein-ову моделу изоморфна с тијелом крајева хиперболичне равнине. Овиме је тражена веза доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gyarmathi, L.:* A hiperbolikus geometrija egy újabb modellje. Acta Univ. Debereceniensis 6 21—36 (1960.
2. *Gyarmathi, L.:* исто (folytatás), 7, 31—36 (1962).
3. *Кучинић, Б.:* Ein Modell der hyperbolischen Ebene in der Theorie der Kegelschnittnetze, Гласник математички, (6) (26) (1970).
4. *Кучинић, Б.:* Веза Ф-модела и Klein-овог модела геометрије хиперболичне равнине, V конгрес, Зборник Т I, 131—137 Скопје (1973).
5. *Ниче, В.:* Кривуља и плохе 3. и 4. реда настале поопћеном квадратном инверзијом. Рад ЈАЗУ 78/86 153—194 (1945).

СИНТЕТИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ МОДЕЛИ Н-ПЛОСКОСТИ КЛЕЙНА И ГЯРМАТИЯ

Бранко Кучинич, Загреб

РЕЗЮМЕ

Конструктивные исследования в Н-плоскости линейкой и циркулем возможны в моделей Клейна (линейком) и Гярматия (циркулем). Навязывается вопрос синтетической связи этих двух моделей, как было бы возможно исследовать комбинированиые конструкции. Эта связь исследованна аналитически [4], но для её синтетической фазы нужно при помощи особо выбранной обычной квадратной инверсии (рисунок) отобразить модель Клейна и показать что таким образом полученная конфигурация есть Гярматия модель, то-есть здесь сохранен геометрический изоморфизм. В статьи сохранени соотиошения: совпадение, порядок и конгруенция.