Matematika 1, (1975), (20–22), Beograd

GRAFIČKO ODREĐENJE HIPERBOLIČKOG KUTA U KLEINOVOM MODELU I JEDNO IZVOĐENJE LAGUERREOVE FORMULE

BRANKO KUČINIĆ,
Zagreb

U literaturi [2] poznato je stereometrijsko provođenje veze Kleinovog i Poincaréovog modela ravnine Lobačevskoga. *Kleinov model hiperboličke ravnine* uzmimo u njegovoj najčešćoj formi na jediničnoj kružnici c:

(1) $$c \ldots x^2+y^2-1=0.$$

Neka je ravnina π Kleinovog modela dirna ravnina kugle $\mathcal{K}$ u južnom polu S, a diralište neka se podudara sa ishodištem pravokutnog *Kartezijevog koordinatnog sustava ravnine* π. Projicirajmo sad negativnom ortogonalnom projekcijom ravninu π na južnu polukuglu $\mathcal{K}$. Ovo projiciranje ψ zahvatit će samo realne dijelove hiperboličke ravnine iz Kleinovog modela (*ravnina Lobačevskog*), dok će idealni dijelovi biti izgubljeni. Apsoluta c projicirat će se u ekvator e kugle $\mathcal{K}$, točke će ostati u običnom smislu, a realni dijelovi pravaca dat će na južnoj polukugli polukružnice okomite na ekvator. Geometrijske su relacije pri ovom projiciranju jasne, te postižemo Kleinov model na polukugli.

U slijedećem koraku centralnom projekcijom χ preslikat ćemo južnu polukuglu $\mathcal{K}$ iz sjevernog pola N ponovno u ravninu π (stereografska projekcija). Apsolutom postaje kružnica s:

(2) $$s \ldots x^2+y^2-4=0,$$

a realni dijelovi h-ravnine preslikavaju se u unutrašnjost kružnice s. Na osnovi svojstava stereografske projekcije lako je zaključiti da smo kompozicijom preslikavanja ψ i χ postigli Poincaréovu interpretaciju ravnine Lobačevskog, gdje se kut dvaju h-pravaca pokazuje u originalnoj veličini.

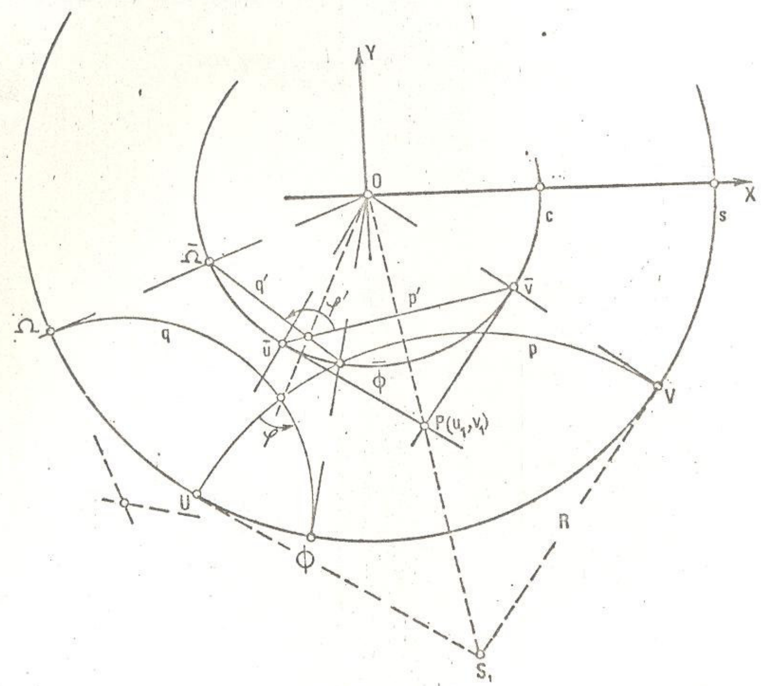
Ako ovu stereometrijsku transformaciju promatramo u tlocrtu na ravnini π, lako je uočiti jednostavnu mogućnost grafičkog određenja hiperboličkog kuta u Kleinovom modelu (sl. 1).

Kleinovi h-pravci:

(3) $$p' \ldots u_1x+v_1y-1=0,$$
$$q' \ldots u_2x+v_2y-1=0,$$

gdje su u_i i v_i *Beltramijeve pravčaste koordinate*, tj. točkovne koordinate pola pravca u odnosu na apsolutu c, zatvaraju kut φ', koji je slika hiperboličkog kuta φ.

Prelaz na *Poincaréov model* grafički je vrlo jednostavan, a *Poincaréovi* h-pravci (kružnice p, q) zatvaraju upravo kut φ.



Slika 1

Dalje pojednostavljenje ove konstrukcije pokazano je na slici 2. Potrebno je ravninu Lobačevskog sa Poincaréovom kružnicom s (polumjera $R=2$) stegnuti na područje jedinične kružnice c. Jednostavno je uočiti da se za ova istraživanja bitni geometrijski odnosi ne mijenjaju. Vrijednost ove konstrukcije očita je i iz stereografske projekcije χ, ako se ova izvrši ne na ravninu π nego na ravninu ekvatora e, pa se onda te dvije ravnine promatraju sjedinjene, tj. u tlocrtu (sl. 2).

Kut φ iz Kleinovog modela može se dobiti, inače, izrazom

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln (p' q' t_1 t_2), \tag{4}$$

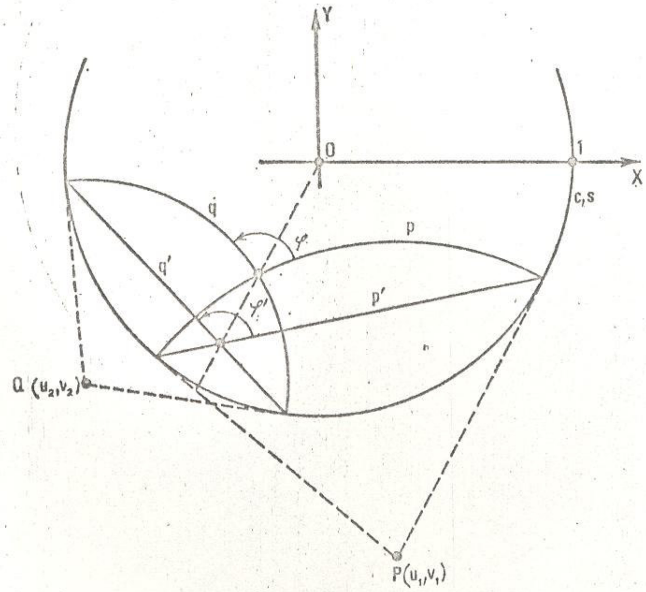
gdje su u dvoomjeru oznakama $t_{1,2}$ označene imaginarne tangente povučene na apsolutu c iz realnog sjecišta pravaca p', q'. Izraz (4) poznata je *Laguerreova formula*, a sredstvima elementarne analitičke geometrije lako je ovaj izraz izvesti iz prethodnih konstrukcija (sl. 1):

Hiperbolički kut φ što ga zatvaraju pravci p i q kongruentan je euklidskom kutu φ kružnica:

$$\begin{aligned} p \ldots (x-2u_1)^2+(y-2v_1)^2-4(u_1^2+v_1^2-1)&=0, \\ q \ldots (x-2u_2)^2+(y-2v_2)^2-4(u_2^2+v_2^2-1)&=0. \end{aligned} \tag{5}$$

Iz izraza za kut dviju kružnica slijedi:

$$\cos \varphi = \frac{u_1 u_2 + v_1 v_2 - 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 - 1}\sqrt{u_2^2 + v_2^2 - 1}}, \tag{6}$$



Slika 2

a to je, također, poznat izraz za mjeru hiperboličkog kuta pravaca iz Kleinovog modela uz pomoć njihovih pravčastih koordinata. U literaturi se mogu naći [1] prikladne transformacije koje omogućavaju da se izraz (6) prevede u (4).

LITERATURA

[1] N. V. Jefimov: *Vysšaja geometrija*, Moskva

[2] F. Klein: *Vorlesungen über Nicht-euklidische Geometrie*, New York

GRAFISCHE BESTIMMUNG DES HYPERBOLISCHEN WINKELS IM KLEINSCHEN MODELL UND EINE HERLEITUNG DER LAGUERRESCHEN FORMEL

BRANKO KUČINIĆ, Zagreb

Der bekannte stereometrische Zusammenhang zwischen dem Kleinschen und Poincareschen Modell [2] ist im Grundriss zu betrachten, wodurch man die Möglichkeit einer konstruktiven Bestimmung des hyperbolischen Winkels erhält (Abb. 1). Eine Vereinfachung dieser Konstruktion ersieht man aus Abb. 2. Die Laguerresche Formel (4) oder der Ausdruck (6) lässt sich aus diesen zwei Konstruktionen durch einfache analytische Hilfsmittel herleiten.