GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 10 (30) (1975), 101—108.

О НЕКОТОРЫХ НОВЕЙШЫХ МОДЕЛЯХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Бранко Кучинич, Загреб

1. Введение

Разрабатывая идею паракоординатизации и алгебраизации соотношений аналитической гиперболической геометрии [1], и получив в связи с этим ряд моделей гиперболической плокости, Б и л и н с к и особенно рассматривает координаты прямой [2]. С помощью концов каждой h-прямой можно присоединить пару σ, τ так называемых *линейных координат Гильберта*. Таким образом получается одна удовлетворяющая алгебраизация упомянутых соотношений, при чем условие действительности h-прямой можно записать в виде

$$\tau^2 - \sigma > 0\,. \tag{1.1}$$

Билински в [2] строит модель H-плоскости так что h-прямую $p(\sigma, \tau)$ интерпретирует как поляру полюса $P(\sigma, \tau)$ в отношении к абсолюту. Уравнение

$$Y^2 - X = 0 \tag{1.2}$$

является уравнением этого абсолюта в ортогональной системе координат в Евклидовой плоскости. Так уравнение принадлежности h-точки $T(X, Y)$ и h-прямой $p(\sigma, \tau)$ записывается в виде

$$X - 2\,\tau\, Y + \sigma = 0\,. \tag{1.3}$$

Аналогично можно координаты X, Y назвать *точечными координатами Гильберта*. Это очевидно случай общей модели H-плоскости Клейна, которую надо понять проективно с параболой (1.2) как абсолютом. Этую модель назовем *P-моделью*. В [2] введены еще и метрические соотношения, из которых приведем меру угла двух h-прямых:

$$\cos\varphi = \frac{2\,\tau_1\,\tau_2 - (\sigma_1 + \sigma_2)}{2\sqrt[+]{(\tau_1^2 - \sigma_1)\,(\tau_2^2 - \sigma_2)}}\,. \tag{1.4}$$

В [4] и [5] *Гярмати* презентирует одну модель H-плоскости, на которую можно смотреть как на обобщение модели Пуанкаре. В евклидовой плоскости (которая пополнена к

AMS (MOS) subject classification (1970): Primary 50 A 25; Secondary 50 C 05.

плоскости Мэбиуса) h-прямые являются окружностями содержащими одну неподвижную точку $F(0, -1)$ и пересекающие неподвижную прямую $s \ldots y = 0$ (т. е. ось x прямоугольной координатной системы Картезиуса). Точка в обыкновенном смысле значит h-точку, а действительные h-точки выполняют »верхнюю« полуплоскость.

В [7] доказано что модель Гярмати является специальным случаем т. зв. Ф-модели [6]. В этой модели h-точки являются окружностями проходящими точкой F и не пересекающими прямую s, а h-прямые являются окружностями не пересекающими прямую s. Каждой из окружностей p сопоставлен Ψ-образ — точка $\overline{P} = \Psi(p)$, так что пучок окружностей $\mathfrak{B}(F\overline{P})$ на прямой s определяет как раз инволюцию сопряженных точек в отношении к окружности p ([6] и [7]). В модели Гярмати теперь возможно h-точки интерпретировать окружностями сетки $\mathfrak{N}(F)$ не пересекающими фундаментальную прямую s, а на h-прямую p можно смотреть как на *ряд*, т. е. пучок $\mathfrak{B}(F\overline{P})$ окружностей, если $\overline{P} = \Psi(p)$. Концы в этой модели являются окружностями из сетки $\mathfrak{N}(F)$ которые касаются прямой s. Так интерпретированную модель Гярмати назовем *Φ^i-моделью* [7].

2. Связь Φ^i и P-модели

Пусть Φ^i-модель построена в плоскости Евклида в отношении к ортогональной системе Картезиуса в которой единицей является двухкратная абсолютная единица, так что фундаментальная прямая s иммет уравнение

$$x = -\frac{1}{4}, \tag{2.1}$$

а координаты точки F тогда будут

$$F\left(\frac{1}{4}, 0\right). \tag{2.2}$$

Отобразим Φ^i-модель так, что каждой h-точке сопоставим центр соответствующей окружности из сетки $\mathfrak{N}(F)$.

Так как абсолют является множеством концов, т. е. геометрическим местом центров всех окружностей, касающихся прямой (2.1) и проходящихся точкой (2.2), следует

ТЕОРЕМА: 2.1. *Абсолют является параболой*

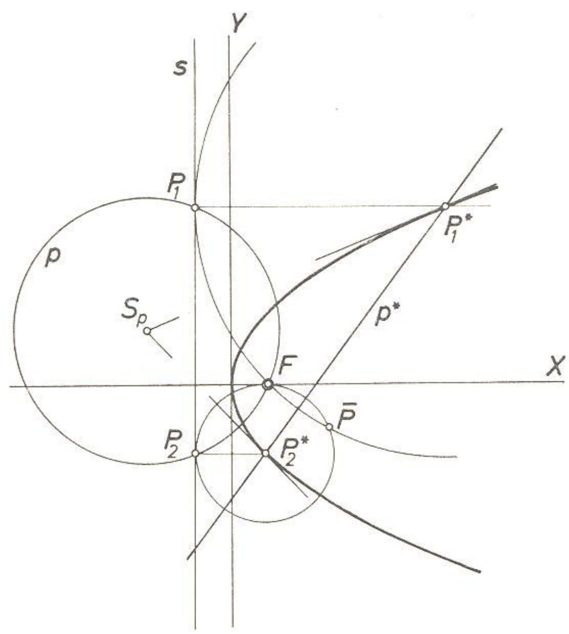
$$Y^2 = X. \tag{2.3}$$

Также очевидная

ТЕОРЕМА 2.2. *Действительные h-точки выполняют внутренность параболи (2.3), а идеальные точки выполняют ее внешность.*

Из определения нашего отображения следует что h-прямая p^* (ряд h-точек) является геометрическим местом центров окружностей принадлежащих пучку $\mathfrak{B}(F\overline{P})$, при чем $\overline{P} = \Psi(p)$, а p окружность из сетки $\mathfrak{N}(F)$ пересекающая прямую s в действительных точках.

ТЕОРЕМА 2.3. *h-прямая p^* является прямой в обыкновенном смысле пересекающей параболу (2.3) в действительных точках.*



р. 1.

Доказательство. Пучок $\mathfrak{B}(F\overline{P})$ — это гиперболический пучок окружностей, центры которых принадлежать оси симетрии отреска $F\overline{P}$ (р. 1). Две из окружностей принадлежащих пучку $\mathfrak{B}(F\overline{P})$ касаются прямой s в P_1, P_2, ибо $\mathfrak{B}(F\overline{P})$ на s определяет гиперболическую инволюцию. Следовательно, ось симетрии p^* содержит и две точки параболи (2.3).

ТЕОРЕМА 2.4. *Центр S_p окружности $p \in \mathfrak{N}(F)$, которая пересекает прямую s является полюсом прямой p^* относительно параболи (2.3).*

Доказательство. Из факта, что окружность p описана треугольнику $F P_1 P_2$ (р. 1) и из свойств параболи, вытекает очевидным образом теорема.

Пусть

$$\mathrm{P}_1\left(-\frac{1}{4}, u\right), \ P_2\left(-\frac{1}{4}, v\right)$$

координаты концов в модели Гярмати (р. 1). h-прямой p значит принадлежит пара u, v, которую назовем *линейными координатами Гярмати.* Координатами Картезиуса концов h-прямой p^* являются

$$P_1^*(u^2, u), \ P_2^*(v^2, v),$$

так, что уравнение прямой $p^* \equiv P_1^* P_2^*$ можно записать в виде

$$X - (u + v) Y + u v = 0 . \tag{2.4}$$

Координаты полюса прямой p^* относительно параболи (2.3) совпадают с координатами центра S_p (р. 1):

$$S_p\left[u v, \frac{1}{2}(u + v)\right]. \tag{2.5}$$

Сравнение с (1.2) и (1.3) говорит, что модель, которую мы получили таким образом, является P-моделью.

Есть в силе

$$\sigma = uv \qquad \tau = \frac{1}{2}(u + v), \tag{2.6}$$

или

$$u = \tau + \sqrt{\tau^2 - \sigma} \qquad v = \tau - \sqrt{\tau^2 - \sigma}. \tag{2.7}$$

Таким образом получим отношение между линейными координатами Гярмати и Гильберта. В соотношении (2.7) заметим взаимность условия действительности в этих двух моделях.

3. Изометрические преобразования H-плоскости в P-модели

В модели Гярмати изометрические преобразования H-плоскости [4] записываются в виде

$$u = \frac{\alpha u' + \beta}{\gamma u' + \delta} \qquad v = \frac{\alpha v' + \beta}{\gamma v' + \delta}, \tag{3.1}$$

при условии

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq \emptyset . \tag{3.2}$$

Из (3.1) выводим

$$\begin{aligned} uv &= \frac{\alpha^2 u'v' + \alpha\beta\,(u' + v') + \beta^2}{\gamma^2 u'v' + \gamma\delta\,(u' + v') + \delta^2} \\ u + v &= \frac{2\alpha\gamma u'v' + (\alpha\beta + \beta\gamma)\,(u' + v') + 2\beta\delta}{\gamma^2 u'v' + \gamma\delta\,(u' + v') + \delta^2}\,, \end{aligned} \tag{3.3}$$

а из (2.6) и (3.3)

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\alpha^2\sigma' + 2\alpha\beta\tau' + \beta^2}{\gamma^2\sigma' + 2\gamma\delta\tau' + \delta^2} \\ \tau &= \frac{\alpha\gamma\sigma' + (\alpha\delta + \beta\gamma)\,\tau' + \beta\delta}{\gamma^2\sigma' + 2\gamma\delta\tau' + \delta^2}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Как P-модель является специфической формой модели H-плоскости Клейна, полученные соотношения являются в самом деле изометрическими преобразованиями. Именно, эти преобразования образуют трехпараметрическую подгруппу проективной группы, так как параметры α, β, γ, δ связаны соотношением (3.2). Останется проверить, что абсолют $\tau^2 = \sigma$ является инвариантным образом преобразований (3.4), а это тривиально.

4. Гиперболическая метрика в P-модели

Здеся поговорим о гиперболической мере угла, потому что h-прямая является первыуным элементом [2]. В Φ^i-модели [7] угол φ двух h-прямых $p\,(u_1, v_1)$, $q\,(u_2, v_2)$ определен соотношением

$$\varphi = 2\, arc\, tg \underset{+}{\sqrt{-(u_1\, v_1\, u_2\, v_2)}}\,. \tag{4.1}$$

Преобразывая (4.1) с помощью соотношений (2.7) получаем и засвидетельствуем соотношение (1.4).

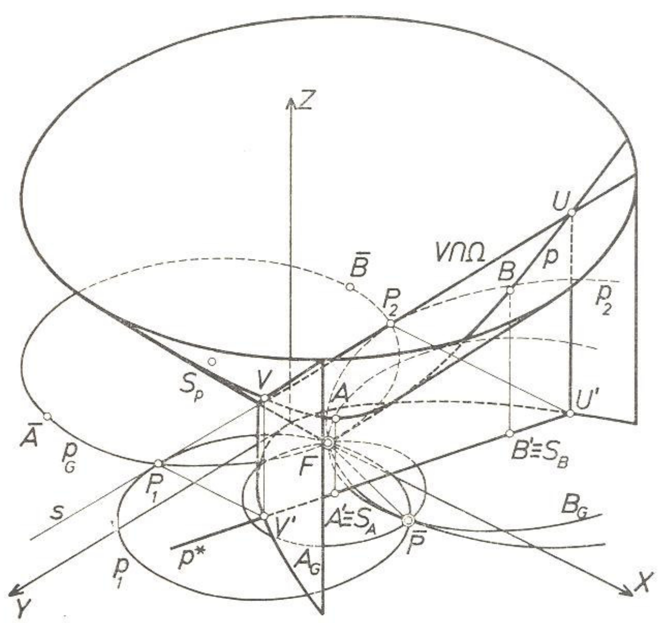
5. V-модель

В [3] устроил С. Билински модель H-плоскости в »торовой плоскости«, которая получается из модели H_3-пространства на плоскости с »двойными числами« [10]. Ѐтую модель В. Вундерлих [11] с помощью *циклографии* [8] отобразил на модель Пуанкаре плоскости Лобачевского. Так как Φ^i-модель Гярмати является в каком то смысле аналогией модели Пуанкаре, можно ожидать *циклографическую надстройку* Φ^i-модели, т. е. модель которая допускает циклографическое отображение на Φ^i-модель, а которую назовем V-модель.

Из определания циклографической проекции очевидно, что существуют две V-модели (»положительная« и »отрицательная«). И дальше будем рассматривать только »положительную« V-модель. Из этого определения дальше происходит, что циклографический прообраз Φ^i-модели в самом деле является циклографическим прообразом P-модели. Исследуем подробно это отображение:

1. *Все h-точки* (действительные, концы, идеальные). Каждая точка S_T отображается в точку T, которая находится перпендикулярно над S_T и на растоянии $S_TF = r$. H-плоскость Φ^i-модели отображается следовательно на прямоугольный конус V, вершина которого находится в точке F (2.2), а ось перпендикулярна плоскости (X, Y) (р. 2).

2. *Концы.* Концы отображаются в точки принадлежащие образующими прямого параболического цилиндра Ω, направляющей которого является парабола (2.3), а фокальная ось совпадает с осью конуса V (р. 2).



р. 2.

3. *Абсолют* — пространственная кривая 4. порядка $V \cap \Omega$. В этом случае она вырождается в две параболи, потому что у поверхностей V и Ω пара совместных касательных плоскостей — пара изотропных плоскостей пересекающихся в совместной фокальной оси этих поверхностей (р. 2). Очевидная

ТЕОРЕМА 5.1. *Абсолют $V \cap \Omega$ разделяет поверхность »положительного« конуса V на две части. Область действительных h-точек является областью конуса V в которой находится его вершина F.*

4. *h-прямая.* — Циклографический прообраз точек $\cup S_T$ принадлежащих обыкновенной прямой p^*, которая является осью симетрии отреска $F\overline{P}$ (р. 1), или циклографический прообраз огибающей окружностей которая вырождается в пару точек $F, \overline{P}$ [11]. Это следовательно равносторонняя гипербола конуса V, т. е. коническое сечение с плоскостью перпендикульярной плоскости (XY), а след которой являегся прямая p^* (р. 2).

5. *Принадлежность* определяется в обыкновенном смысле.

6. *Порядок* — в обыкновенном смысле.

7. *Конгруентность h-отрезков.* — Равенство соответствующих двойных соотношений $(A_i B_i U_i V_i)$ $(i = 1,2)$. с соответсвенных равносторонних гипербол принадлежащих конусу V, если эти двойные соотношения рассматриваем в их горизонтальных проекциях, т. е. в P-модели.

Примечание 1. Упомянутые двойные соотношения не следует рассматривать на равносторонней гиперболи, потому что пучок проектирующих прямых является пучком параллельных прямых, вершина которого не принадлежит гиперболе и не справедлива теорема Штейнера [9] (р. 2).

Примечание 2. h-прямыми V-модели надо считать и пары перпендикулярных образующих конуса V (осьные сечения), потому что они являются циклографическими прообразами p^*-прямых принадлежащих фокусу F параболи (2.3).

Примечание 3. В V-моделе возможно одновременно рассматривать »положительный« и »отрицательный« конус V. Тогда h-точки являются парами точек, соединяющая прямая которых параллельна оси конуса V. h-прямые тогда целые равносторонние гиперболы, оси которых параллельны оси конуса V.

ЛИТЕРАТУРА:

[1] *S. Bilinski,* Einige Betrachtungen über Koordinatensysteme und Modelle der Lobatschewskischen Geometrie, Glasnik Mat. Ser. III. **1** (**21**) (1966), 177—198.

[2] *S. Bilinski,* Einige Betrachtungen über Geradenkoordinaten in der hyperbolischen Ebene, Glasnik Mat. Ser. III. **2** (**22**) (1967), 179—190.

[3] *S. Bilinski,* Über ein Modell der zweidimensionalen hyperbolischen Geometrie in der Torusebene, Glasnik Mat. Ser. III. **2** (**22**) (1967), 191—200.

[4] *L. Gyarmathi,* A hyperbolikus geometria egy újabb modellje, Acta Univ. Debreceniensis, **6** (1960), 21—36.

[5] *L. Gyarmathi,* A hyperbolikus geometria egy újabb modellje (foliattás), Acta Univ. Debreceniensis, **7** (1962), 31—36.

[6] *B. Kučinić,* Ein model der hyperbolischen Ebene in der Theorie der Kegelschnittnetze, Glasnik Mat. Ser. III. **5** (**25**) (1970), 319—333.

[7] *Б. Кучинич,* Специальные случаи одной модели геометрии гиперболической плоскости. Rad. Jugosl. Akad. znan. umjet. knj. **349** (1971), 159—164.

[8] *E. Müler—J. L. Krames,* Die Ziklographie, Bd II, Leipzig 1929.

[9] *Th. Reye,* Die Geometrie der Lage, Abt. I, 1910.

[10] *Б. А. Розенфельд,* О связи модели Билинского плоскости Лобачевского на »торовой плоскости«, с двойными числами, Glasnik Mat. Ser. III. **5** (**25**) 1970), 307—309.

[11] *W. Wunderlich,* Über das Bilinskische Modell der hyperbolischen Ebene, Glasnik Mat. **7** (**27**) (1972), 83—86.

(Поступило 24. IV. 1974.)

Математический институт
Университета в Загребе

O NEKIM NOVIJIM MODELIMA HIPERBOLIČKE RAVNINE

Branko Kučinić, Zagreb

Sadržaj

Kroz razrješenje problema parakoordinatizacije pravčastih koordinata S. Bilinski je [2] uspostavio jedan model H-ravnine s apsolutom na paraboli (1.2). Ovaj P-model zapravo je specifičan Kleinov model, a moguće ga je postići pogodnom interpretacijom Gyarmathijevog modela [4], [5], ako se ovaj shvati kao specijalni slučaj Φ-modela [7]. Osim niza srodnosi spomenutih modela, u članku se rješava problem Gyarmathijevog modela kao ciklografske projekcije nekog originala. Pokazuje se da se radi o modelu H-ravnine, smještenom na stošcu pravokutnog otvora (V-model).