VEZA Φ-MODELA I KLEINOVOG MODELA GEOMETRIJE HIPERBOLIČNE RAVNINE

Branko Kučinić, Zagreb

Neka su Φ-model [5] i Kleinov model hiperbolične ravnine smješteni u istoj ravnini π i neka je dan zajednički pravokutni Kartezijev koordinatni sustav (OXY), odnosno (O, ξ, η) za oba područja. Kleinova kružnica (apsolutna) neka u Beltramijevim koordinatama ima jednadžbu

$$s' \ldots X^2 + Y^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Polazeći od ideje iznesene u Uvodu [5], formirajmo elemente poopćene kvadratne inverzije [7] koja će nam vizuelno iz Kleinovog modela dati općenitu Φ-figuru [5]. Trebat će dakako pokazati da ovakim preslikavanjem Φ-figura postaje Φ-model geometrije hiperbolične ravnine.

Uzmimo tačke

$$\left\{F(0, -1);\ G\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right);\ H\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\} \in s' \tag{2}$$

za temeljne tačke poopćene kvadratne inverzije s tim da su pravci

$$FG = t_1 \ldots \eta + \frac{1}{\sqrt{3}}\xi + 1 = 0 \tag{3}$$

i

$$FH = t_2 \ldots \eta - \frac{1}{\sqrt{3}}\xi + 1 = 0 \tag{4}$$

tangente temeljne konike, c koja još neka prolazi tačkama $\{M_1(-1, 0); M_2(1, 0)\} \in s'$. Polara pola F s obzirom na koniku c ima jednadžbu

$$f \ldots \eta + \frac{1}{2} = 0. \tag{5}$$

Za ovako određenu temeljnu koniku nalazimo jednadžbu

$$c \ldots \xi^2 + 5\eta^2 + 2\eta - 1 = 0. \tag{6}$$

Ova metrička razmatranja od sporednog su značaja, ali izabrane su ovakve veličine radi jednostavnijeg računanja. Budući da je poopćena inverzija točkovno preslikavanje i dano (po definiciji) kroz pridruženje konjugiranih točaka na pravcima pola F [7], klao je naći analitičke izraze ove transformacije (uz unapomenu da se radi o involutornom preslikavanju):

$$\xi = \frac{2X(2Y+1)}{X^2+5Y^2+6Y+1} \tag{7}$$

$$\eta = -\frac{X^2+Y^2-1}{X^2+5Y^2+6Y+1}, \tag{8}$$

odnosno

$$X = \frac{2\xi^2(2\eta+1)}{\xi^2+5\eta^2+6\eta+1} \tag{9}$$

$$Y = -\frac{\xi^2+\eta^2-1}{\xi^2+5\eta^2+6\eta+1} \tag{10}$$

Primjenom relacija (9) i (10) na kružnicu (1) dobijamo:

$$\eta\left(\eta+\frac{1}{2}\right)\left(\eta-\frac{1}{\sqrt{3}}\xi+1\right)\left(\eta+\frac{1}{\sqrt{3}}\xi+1\right)=0, \tag{11}$$

dakle, jednadžbu krivulje 4. reda koja je degenerirala u pravce (3), (4), (5) i pravac $\eta=0$, tj. os ξ. Da će ova degeneracija uslijediti bilo je ajsno iz same definicije poopćene inverzije [7], pa za sliku Kleinove kružnice s' uzimamo os ξ. Da se ne naruši jednoznačnost preslikavanja, smatrat ćemo da se tačka $G \in s'$ preslikava u $G' = FG \cap \xi$, tačka H u $H' = FH \cap \xi$, a tačka F u beskonačno daleku tačku osi ξ. Budući da se tačka preslikava u tačku, odmah je jasno da se u Φ-modelu susrećemo s incidencijom u običnom smisu, a pseudotačke dane su umjesto konikama njihovim ψ-slikama [5], koje možemo nazvati *reprezentantima*. No ovu je incidenciju lako prevesti u oblik incidencije općenitog Φ-modela na osnovu pogodnih lema u ([5] (t. 1)).

Ako su (U, V) Beltramijeve pravčaste koordinate, tada relacija incidencije u Kleinovom modelu ima oblik

$$UX + VY - 1 = 0, \tag{12}$$

a to je zapravo jednadžba pravca, odnosno tačke [2]. Primjenom relacija (9) i (10) na (12) dobivamo pseudopravac Φ-modela:

$$(V+1)\,\xi^2 + 4U\xi\,\eta + (V+5)\,\eta^2 - 2U\xi + 6\,\eta - (V-1) = 0, \tag{13}$$

dakle, koniku za koju je lako provjeriti da prolazi tačkama (2) i da siječe os ξ ukoliko je pravac (12) realan, tj. ukoliko taj pravac siječe realno apsolutu (1). Krajevi pseudopravca (13) su tačke $P_1\,(u, o)$ i $P_2\,(v, o)$, tj. njegova sjecišta s osi ξ, a veličine (u, v) možemo smatrati pravčastim koordinatima Φ-modela. Iz (13) izlazi:

$$u = \frac{U - \sqrt{U^2 + V^2 - 1}}{V+1}, \tag{14}$$

$$v = \frac{U + \sqrt{U^2 + V^2 - 1}}{V+1}, \tag{15}$$

odnosno

$$U = \frac{u+v}{1+uv}, \tag{16}$$

$$V = \frac{1-uv}{1+uv}, \tag{17}$$

te tako dobiamo transforamciju (7)—(10) izraženu pravčastim koordinatama.

U kakvom su odnosu izometrije hiperbolične ravnine u oba ova modela? U Φ-modelu promotrimo izometriju s obzirom na čuvanje kongruencije kuta. Budući da je ovaj model direktno građen na π_1-interpretaciji Bilinskog i budući da se pokazuje [1] da je izometrija dana projektivitetom, možemo izometričku transformaciju hiperbolične ravnine pisati jednadžbama projektiviteta:

$$u = -\frac{\gamma u' + \delta}{\alpha u' + \beta}, \tag{18}$$

$$v = -\frac{\gamma v' + \delta}{\alpha v' + \beta}, \tag{19}$$

uz uvjet

$$D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0. \tag{20}$$

Primjenom transformacija (18) i (19) na izraze uv i $u+v$ slijedi:

$$uv = f_1\,(u'v', u' + v');\;\; u + v = f_2\,(u'v', u' + v'). \tag{21}$$

Iz (14) i (15) izlaze relacije:

$$uv = -\frac{V-1}{V+1}, \quad u+v = \frac{2U}{V+1}, \quad u'v' = -\frac{V'-1}{V'+1}, \quad u'+v' = \frac{2U'}{V'+1} \tag{22}$$

Postupak (22) → (21) daje nakon rješenja po u i v:

$$U = \frac{a_{11}U' + a_{12}V' + a_{13}}{a_{31}U' + a_{32}V' + a_{33}}, \tag{23}$$

$$V = \frac{a_{21}U' + a_{22}V' + a_{23}}{a_{31}U' + a_{32}V' + a_{33}}, \tag{24}$$

gdje je

$$a_{ij} = f_\nu(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \text{ uz } i, j = 1, 2, 3; \; \nu = 1 \ldots 9. \tag{25}$$

Izometrija Φ-modela inducira, dakle, u Kleinovoj slici projektivne transformacije (23), (24). Veličine a_{ij} su određene s četiri homogene veličine (vezane relacijom (20)), dakle je grupa ovih transformacija tročlana. Kako je potpuna grupa projektivnih transformacija 8-člana, ovdje se radi o izvjesnoj podgrupi grupe projektivnih transformaaija, s tim da za izraze a_{ij} vrijedi određen broj relacija, kojima oni stoje u međusobnoj vezi. Na primjer:

$$\left.\begin{array}{c} a_{1j}^2 + a_{2j}^2 - a_{3j}^2 = 4\,D^2\,(j = 1,\ 2,\ 3) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1j}\,a_{1k} + a_{2j}\,a_{2k} - a_{3j}\,a_{3k} = 0\ (j = 1,\ 2;\ k = 2,\ 3;\ j \neq k) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{26}$$

gdje je D iz (20).

Izometrija Kleinove ravnine zaista je dana tročlanom grupom transformacija. Ako transformacije (23), (24) znače ovu izometriju, mora biti zadovoljena bitna kaarkteristika grupe — djelovanje na apsolutu je identitet. Apsoluta (1) u Beltramijevim pravčastim koordinatama ima jednadžbu

$$U^2 + V^2 - 1 = 0. \tag{27}$$

Transformiramo li apsolutu (27) s (23) i (24), izaći će primjerom (26) i (20) izraz

$$U'^2 + V'^2 - 1 = 0. \tag{28}$$

Prema tome, izometrija Φ-modela odgovara izometriji Kleinove ravnine, a to je izometrija hiperbolične ravnine. Preslikavanje (7)—(10), je dakle hiperbolički izometrično za geometrije tih dvaju modela. Pri tom se nipošto ne misli na izometrično preslikavanje same hiperbolične ravnine na pojedini model, jer bi to (bar na projektivnu ili Euklidovu ravninu) bilo apsurdno.

Sad je lako direktno dobiti hiperboličnu mjeru kuta u Φ-modelu. Za dva pravca $p_\nu(U_\nu, V_\nu)$ $(\nu = 1{,}2)$ vrijedi općepoznata relacija

$$\varphi = \frac{i}{2} \ln (p_1 p_2 t_1 t_2), \tag{29}$$

gdje su t_μ imaginarne tangente povučene iz sjecišta pravaca p_ν na apsolutu. Iz (29) dobivamo poznati mjerni broj kuta u Beltramijevim koordinatama

$$\cos \varphi = \frac{U_1 U_2 + V_1 V_2 - 1}{\sqrt{U_1^2 + V_1^2 - 1}\ \sqrt{U_2^2 + V_2^2 - 1}}. \tag{30}$$

Primjenom transformacije (16) (17) na (30) dobivamo izraz u pravčastim koordinatama Φ-modela:

$$\cos \varphi = \frac{u_1 u_2 - 2 u_1 v_2 + u_1 v_2 + u_2 v_1 - 2 u_2 v_2 + v_1 v_2}{u_1 u_2 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + v_1 v_2}. \tag{31}$$

Ako (31) transformiramo na $\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}$ i uvažimo karakterističnu veličinu za kut u Φ-modelu [5], koja je jednaka dvoomjeru krajeva:

$$\Delta = (u_1 v_1 u_2 v_2), \tag{32}$$

dobivamo verificirani izraz za mjeru kuta u Φ-modelu:

$$\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} \underset{+}{\sqrt{-\Delta}}. \tag{33}$$

Ova razmatranja važe za sasvim općeniti Φ-model, pa važe i za njegove specijalne slučajeve [6]. Prema tome, metrička relacija (33) važi i za Gyarmathijev model [3] i [4]. No, da se relacija (33) za Gyarmathijev model izvede postupno, potrebno je modificirati transformaciju (7)—(10). Ostavimo li tačke F, M_1, M_2 (sl. 1) na miru, a za tačke G i H uzmemo apsolutne tačke ravnine π (dakle, još uvijek tačke Kleinove kužnice), preći će poopćena kvadratna inverzija u običnu inverziju na kružnici polumjera $r = \sqrt{2}$ sa središtem u F [7], a model Φ postaje Gyarmathijev model [6]. Transformacije (7)—(10) poprimaju sad jednostavniji oblik:

$$\xi = \frac{2X}{X^2 + (Y+1)^2}, \tag{34}$$

$$\eta = -\frac{X^2 + Y^2 - 1}{X^2 + (Y+1)^2}, \tag{34}$$

i obratno

$$X = \frac{2\xi}{\xi^2 + (\eta+1)^2}, \tag{36}$$

$$Y = -\frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + (\eta+1)^2}, \tag{37}$$

gdje su (ξ, η) sad koordinate tačaka Gyarmathijeve ravnine. Analogna razmatranja dosadašnjima dat će za pseudopravce kružnice, koje sve prolaze tačkom $F(o, -1)$. Međutim, već relacije (14)—(17) neće biti promjenjene. No, kako je Gyarmathijeva izometrija [3]:

$$u = \frac{\alpha u' + \beta}{\gamma u' + \delta}, \quad v = \frac{\alpha v' + \beta}{\gamma v' + \delta}, \quad D \neq 0 \tag{38}$$

samo formalno, a ne i suštinski različita od izometrije (18)—(20), neće se mićjenjati sva daljnja razmatranja, pa će i mjera kuta biti dana izrazom (33) u kojem veličina Δ ima sad značenje Gyarmathijeve *karakteristike kuta* [3].

LITERATURA

[1] S. Bilinski, Eine Interpretation der ebenen hyperbolischen Geometrie in der projektiven Geometrie der Geraden, Glasnik matematičko-fizičko-astronomski, 20 (1965) 99—135.

[2] S. Bilinski, Einige Betrachtungen über Koordinatensysteme und Modelle der Lobatschewskyschen Geometrie, Glasnik matematički, 1 (21) (1966) 177—198.

[3] L. Gyarmathi, A hyperbolikus geometria egy ujabb modellje, Acta Univ. Debreceniensis, 6 (1960) 21—36.

[4] L. Gyarmathi, A hyperbolikus geometria egy ujabb modellje (folytatas), Acta Univ. Debreceniensis, 7 (1962) 31—36.

[5] B. Kučinić, Ein Modell der hyperbolischen Ebene in der Theorie der Kegelschnittnetze, Glasnik matematički, 6 (26) (1970).

[6] B. Kučinić, Specialjnie slučai odnoj modeli geometrii giperboličeskoj ploskosti, Rad JAZU (1971) (u štampi).

[7] V. Niče, Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije, Rad JAZU, 78/86 (1945) 153—194.

Institut za matematiku
Sveučilišta u Zagrebu

DER ZUSAMMENHANG DES Φ-MODELLS UND DES KLEINSCHEN MODELLS DER HYPERBOLISCHEN EBENENGEOMETRIE

Branko Kučinić, Zagreb

Zusammenfassung

Durch die allgemeine quadratische Inversion wird in dieser Arbeit das Kleinsche Modell der hyperbolischen Ebene in eine Φ-Figur [5] transformiert, für welche bewiesen wird, dass sie dem Φ-Modell der hyperbolischen Ebene entspricht, weil die Isometrien dieser zwei Modelle untereinander entsprechen. Auf Grund dieser Entsprechung werden die Kleinsche metrische Relationen direkt in die Masszahl des Winkels (33) im Φ-Modell übergeführt. Einen besonderen Rückblick wird den Isometrien der hyperbolischen Ebene und den metrischen Relationen des Gyarmathischen Modell [3] gewidmet.