Branko Kučinić

СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ ОДНОЙ МОДЕЛИ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ

Введение

В [4] дана так называемая Φ-модель геометрии гиперболической плоскости. Внутри сетки конических сечений $N\,(FGH)$ интерпретируем „прямые" гиперболической плоскости как конические сечения пересекающие одну фиксированную прямую s. „Точки" это конические сечения не пересекающие прямую s, а „концы" - конические сечения кастельные к прямой s. В такой фигуре введены три основные геометрические соотношения и формирована помянутая модель. Однако не поставлено никакое более строгое требование для соотношения фундаментальных элементов, кроме того что точкам F, G, H не надо быть инцидентными с прямой s, а тоже им не надо быть колинеарными. Две из этих трех точек могут быть сопряженно-мнимые, а прямая s может лежать где-нибудь в операционной плоскости Π_2. В каждом могущем выборе таких фундаментальных элементов все рассматривания в [4] остают неизменяемые. Некотрие выбори дают визуально различные и своим образом специфические модели которым однако значение и теория одна и та же.

Заметим еще что Π_1-интерпретация [1], которая представляет собой суть вывода в [4], базируется на инволюциях прямой Π_1 (в нашем случае s) и тогда все равно где эта прямая находится.

1. Модель Φ^∞

Предположим что прямая s бесконечно удаленная прямая аффинной плоскости Π_2, а точки F, G, H пусть будуть помещенные где-нибудь в этой плоскости, только не на бесконечно удаленной прямой. Так конструированная модель особенно интересна и в большой мере облегчает замечания. Теперь все конические сечения совокупности M_1 [4] являются исключительно гиперболями или распавшимся в пары прямыми которые имеют в себе точки F, G, H. Все конические сечения совокупности M_2 являются эллипсами, пока совокупность M_3 сочиняет ∞^1 парабол, три из которых распадаются в пары параллельных прямых. Рассматривания аналогичные тем в [4], могут и теперь провезтись, чем не получится ничего нового. Тогда мы должны и Π_1-интерпретацию рассматривать на бесконечно удаленной прямой s^∞. Более всего это увидим если одну уже создану Φ-модель в плоскости Π_2 с прямой s, которая не является бесконечно удаленной, отобразим центрально из одной точки S которая находится вне плоскости Π_2 на какую-нибудь вторую плоскость Π'_2, но так что плоскости Π_2' надо быть параллельной с плоскостью $\Sigma = (S\,s)$. Таким отображением получим именно модель Φ^∞, потому что прямая s плоскости Π_2 отображается в бесконечно удаленную прямую s^∞ плоскости Π'_2. Эта перспективная коллинеация поль Π_2 и Π'_2 сохраняет для этого случая существенные геометрические соответствия в сетки N (FGH), относительно N $(F'G'H')$, как и отношение соответственных конических сечений к прямой s, относительно s^∞. Потому что тогда сохранены инволюции и двойные соотношения, то Π_1-интерпретация от прямой s переходит в Π_1-интерпретацию прямой s^∞. Очевидно, дальше, что модель в Φ'-фигуре тоже является моделью геометрии гиперболической плоскости.

Посмотрым какие фундаментальные элементы в модели Φ^∞ и как выявляются некоторые их взаимные соотношения. У „прямой" p (гипербола) „концы" которые являются такими двумя параболами оси которых параллельны к асимптютам гиперболы p. Рассматриваем ли вместо „точек" их Ψ-образы [4], „концы" „прямой" p будут представлены бесконечно удаленными точками этих асимптот. Упомянутые две параболы пересекаются кроме в точках F', G', H' еще в одной точке $\overline{P}$ которая является Ψ-образом „прямой" p.

Из теоремы 3.1 [4] происходит что параллельные „прямые" можно узнать как такие гиперболы для которых стоит свойство что одна асимптота одной гиперболы параллельна с одной асимптотой второй гиперболы. Значит, гиперболическая параллельность „прямых" визуально сведена на параллельность асмптот.

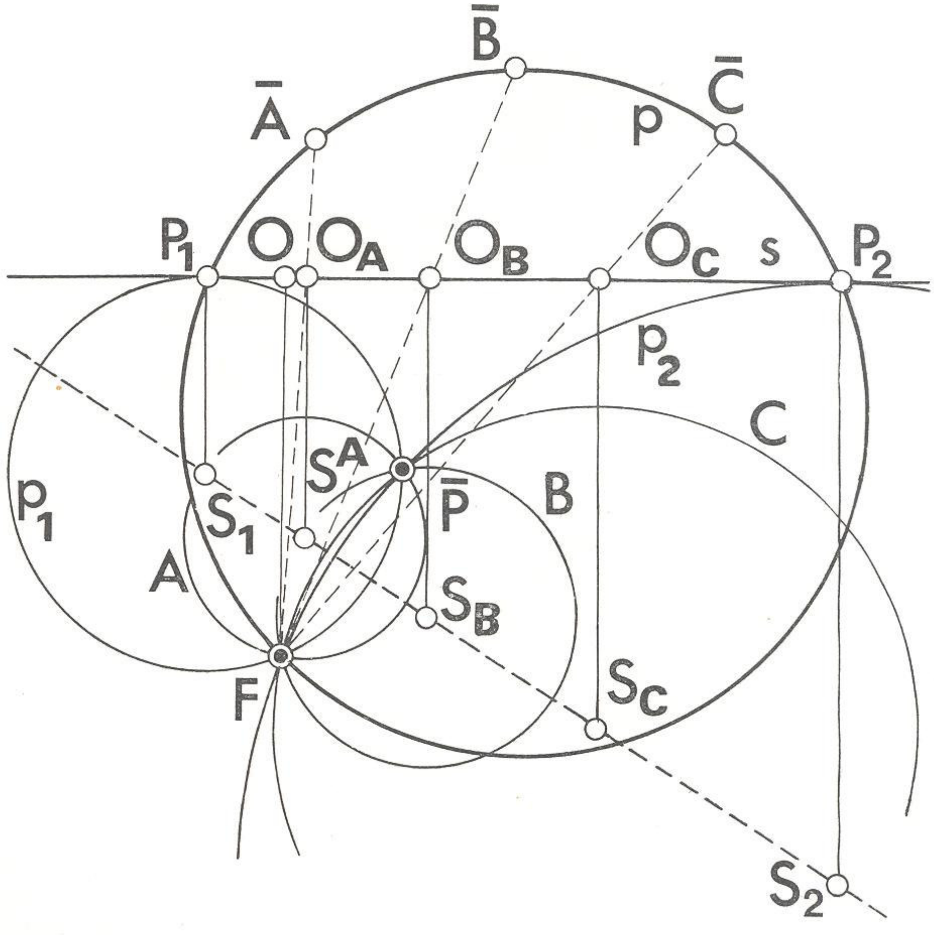
Если желаем для двух „прямых" установить являются ли они пересекающими или непересекающими и непараллельными надо асимптоты их гипербол при помощи трансляции привести в конкурентное положение. Инволюция определена такими четырьмя асимптотами является тожедественой инволюции с ними генерированой на бесконечно удаленной прямой s^∞. Значит (теорема 3.1 [4]), две „прямые" являются пересекающими если так сведеные асимптоты их гипербол определяют эллиптическую инволюцию. Они являются непересекающими и непараллельными когда эта инволюция гиперболическая. Перпендикулярны такие „прямые" которых асимптоты сочиняют гармоническое двойное соотношение.

2. Модель Φ^i

Выберем теперь вариант фундаментальной прямой s которая не является бесконечно удаленной. Пусть тогда две из трех фундаментальных точек, точки G и H, будут сопряжено-мнимые и совпадающие с абсолютными точками G^i и H^i Евклидовой плоскости Π_2. Всегда можно выбрать прямоугольную координатную систему Картезия в плоскости Π_2 так чтобы ось x совпал с прямой s, а точке исхода O явилясь подерной точкой перпендикуляра спущенного из действительной точки F на прямую s. Если тогда удаленность $\overline{FO}$ выберем как единицу меры в плоскости Π_2 (это может быть и абсолютная единица меры), точка F будет иметь координаты $F\ (0, -1)$. Эти метрические рассматривания не имеют существенного значения, но введены ради позднейших сопоставлений.

Из наших прежних рассматриваний очевидно что в Φ^i-фигуре будет и теперь модель геометрии гиперболической плоскости. Сетка конических сечений $N\,(FGH)$ стается теперь сеткой окружностей, т. е. системой из ∞^2 окружностей проходящих точкой $\bar{F}$. Окружиости из системы $N\,(F)$ пересекающие действительно прямую s (конические сечения совокупности M_1) представляют собой действительные „прямые" гиперболической плоскости, пока окружности из этой системы непересекающие прямую s имеют значение действительных „точек". В этой модели смотрим на „точки" исключительно как на Ψ-образы, но вместе с тем и на инциденцию в обикновенном значении [4]. „Точки" $\overline{T_i} = \Psi\,(T_i)$ действительны если с точкой F определяют пучок окружностей высекающий на прямой s эллиптическую инволюцию. Это возможно только для тех „точек" которые лежат „с другой стороны" прямой s в отношении к точке F. Назовем ли эту другую сторону „верхней" полуплоскостью плоскости Π_2 эта верхная полуплоскость будет выполнена Ψ-образами действительных „точек", пока в нижнюю полуплоскость будут падать Ψ-образы действительных „прямых", т. е. идеальных „точек" [4]. Ясно что идеальные „прямые" представлены окружностями не пересекающими действительно прямую s. „Концы" действительных „прямых", по этой конвенции, являются точками прямой s. Все ыто значит что действительная часть „прямой" (ряд действительных точек) является такой дугой окружности которая в верхней полуплоскости, пока дуги окружностей в нижней полуплоскости имеют значение идеальной части „прямой".

Исследуем теперь подробнее соотношение размещения для которого надо поставить формально различные устовия од тех в [4], если желаем „точки" представить Ψ-образами. С этой целью прежде всего посмотрим как конструктивно легко определить Ψ-образ $\overline{B}$ какой-нибудь „точки" B „прямой" p. Точки $\overline{B}$ надо пасть так чтобы пучок окружностей $\mathcal{B}\,(FB)$ высекал на прямой s такую самую эллиптическую инволюцию i_b которая генерированна и окружностей B. Прямая соединняющая $\overline{FB}$ пересекает прямую s в центральной точке O_B такой инволюции, а эта точка является подерной точкой перпендикуляра спущенного из центра S_B окружности B на прямую s (черт. 1). Иными словами, Ψ-обра-



зы „точек" на „прямой" (окружности) p получаются центральным проектированием из точки F на окружность p, которое применим на центральные точки эллиптических инволюций генерированых на прямой s „точками" которые инцидентны с „прямой" p. Это значит что размещение трех точек $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ „прямой" p (размещение в обикновенном смысле) остается таким самым как и размещение центральных точек их инволюций, т. е. размещение точек O_A, O_B, O_C на прямой s (черт. 1). Желаем ли установить что размещение введено в ([4] точ. 4) получает размещение в обикновенном смысле для Ψ-образов „точек", достаточно это показать для центральных точек соответствующих инволюций. Посмотрим потому, является ли требование чтобы на прямой s точка O_B была между точками O_A и O_C последствием соответствующих условий для размещения из [4]. Если двойным точкам соответствующих трех эллиптических инволюций обозначим координаты

$$\begin{aligned} &A_{1,2}\ \ (a_1 \pm i\, a_2) \\ &B_{1,2}\ \ (b_1 \pm i\, b_2) \\ &C_{1,2}\ \ (c_1 \pm i\, c_2), \end{aligned} \tag{2.1}$$

координатами центральных точек этих инволюций являются

$$O_A\,(a_1),\ O_B\,(b_1),\ O_C\,(c_1). \tag{2.2}$$

Факт что точка O_B между O_A и O_C является следующими соотношениями для длин:

$$\overline{O_A O_B} < \overline{O_A O_C} \tag{2.3}$$

$$\overline{O_B O_C} < \overline{O_A O_C} \tag{2.4}$$

или

$$|\, b_1 - a_1 \,| < |\, c_1 - a_1 \,| \tag{2.5}$$

$$|\, c_1 - b_1 \,| < |\, c_1 - a_1 \,|. \tag{2.6}$$

В [4] соотношение размещения является тремя условиями:

$$U_1 : \quad (A_1 B_1 C_1 C_2) = (A_2 B_2 C_2 C_1) \tag{2.7}$$

$$U_2 : \quad (A_1 A_2 B_1 B_2) = (A_1 A_2 C_1 C_2) \tag{2.8}$$

$$U_3 : \quad (B_1 B_2 C_1 C_2) = (A_1 A_2 C_1 C_2). \tag{2.9}$$

Соотношения (2.5) и (2.6) происходят из соотношений (2.8) и (2.9) при условии колинеарности (2.7) и координатами (2.1), а мы это и хотели показать. Следовательно, соотношение размещения в этом специальном случае (модель Φ^i), при чем инциденцию интерпретируем в обикновенном смысле, является соотношением размещения в обикновенном смысле.

Как „прямые" не модифицированны, останет первичное соотношение конгруентности для углов такое самое как в [4]:

$$(P_1P_2Q_1Q_2) = (R_1R_2S_1S_2). \tag{2.10}$$

Эти двойные соотношения назовем „характеристиками" углов. Точки P_i, Q_i, R_i, S_i являются точками пересечения „прямых" (окружностей) и фундаментальной прямой s.

Выделим ли элементи и три фундаментальные соотношения этой геометрии, заметим что модель Φ^i является в самом деле моделью Гярматия ([2] и [3]). Как мера угла наследуется из Φ-модели [4], будет эта мера и в модели Гярматия выражена с

$$\varphi = 2 \operatorname{arc\,tg} \underset{+}{\sqrt{-(P_1P_2Q_1Q_2)}}. \tag{2.11}$$

Соотношение для меры удалленности двух точек не может в этую модель быть, перенесено тождественным способом, потому что смысл псевдоточек изменен.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *S. Bilinski*, Eine Interpretation der ebenen hyperbolischen Geometrie in der projektiven Geometrie der Geraden, Glasnik mat.-fiz. astr., *20* (1965) 99–135,

[2] *L. Gyarmathi*, A hyperbolikus geometria egy újabb modellje, Acta Univ. Debreceninensis, *6* (1960) 21–36,

[3] *L. Gyarmathi*, A hyperbolikus geometria egy újabb modellje (folytatás), Acta Univ. Debreceninensis, *7* (1962) 31–36,

[4] *B. Kučinić*, Ein Modell der hyperbolischen Ebene in der Theorie der Kegelschnittnetze, Glasnik matematički, *5* (1970) 319–333.

Математический институт
Универзитета в Загребе

Поступило для опубликованни 16. X. 1970. г. в Отделении математических, физических и технических наук Югославской академии в Загребе.

B R A N K O K U Č I N I Ć

SPECIJALNI SLUČAJEVI JEDNOG MODELA GEOMETRIJE HIPERBOLIČNE RAVNINE

Prikazana su dva specijalna slučaja Φ-modela [4]:

1. Model Φ^{∞} *(afini slučaj).* Unutar jedne mreže konika nalazimo pravce hiperbolične ravnine prikazane hiperbolama, točke elipsama, a krajeve parabolama. Pokazuju se osobine takvog modela, među kojima i ta da je hiperbolična paralelnost pravaca svedena na paralelnost asimptota u običnom smislu.

2. Model Φ^{i} *(euklidski slučaj).* Temeljni pravac modela [4] nije beskonačno dalek, a dvije od triju temeljnih točaka su apsolutne točke ravnine. Mreža konika postaje mreža kružnica, a uvede li se relacija incidencije u običnom smislu, pokazuje se da je ovaj specijalni slučaj zapravo Gyarmathijev model geometrije hiperbolične ravnine ([2] i [3]). Koristeći se ovom činjenicom možemo u Gyarmathijev model uvesti metričke relacije (2.11).

Institut za matematiku Sveučilišta
u Zagrebu

Primljeno za publikaciju 16. listopada 1970. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.