

EIN MODELL DER HYPERBOLISCHEN EBENE IN DER THEORIE DER KEGELSCHNITTNETZE

Branko Kučinić, Zagreb

Einführung

Wird das *Kleinsche* Modell der hyperbolischen Ebene durch die allgemeine quadratische Inversion [5] transformiert, so werden die Geraden dieser Ebene in jene Kegelschnitte abgebildet, welche die drei Grundpunkte dieser Transformation enthalten. Das Geradenfeld wird also in ein Kegelschnittnetz abgebildet. Die Grundelemente dieser quadratischen Transformation können immer so angenommen werden, dass die *Kleinsche* Absolute in eine Gerade übergeführt wird. Auf der so gewonnenen geometrischen Figur werden wir ein neues Modell der Geometrie der hyperbolischen Ebene aufbauen können.

1. Die Φ -Figur

Aus der Theorie des Kegelschnittnetzes in der projektiven Ebene seien einige einfache Tatsachen hervorgehoben.

Definition 1. Die Menge aller Kegelschnitte m der reellen projektiven Ebene Π_2 , welche mit drei nichtkollinearen Punkten F, G, H inzidieren, nennen wir das »(FGH)-Netz« und bezeichnen es mit $\mathfrak{N}(FGH)$. Ist s die Gerade dieser Ebene, welche mit keiner von diesen drei Punkten inzident ist, so sei die Figur, welche aus $\mathfrak{N}(FGH)$ und aus der Geraden s besteht, die » Φ -Figur« genannt. Dabei sind F, G, H die »Grundpunkte« und s die »Grundgerade« dieser Figur.

Lemma 1. Die Kegelschnitte des $\mathfrak{N}(FGH)$ werden durch die Grundgerade s in drei Klassen geteilt:

I Die zweiparametrische Menge M_1 der Kegelschnitte, die die Gerade s reell schneiden,

II Die zweiparametrische Menge M_2 der Kegelschnitte, die die Gerade s imaginär schneiden,

III Die einparametrische Menge M_3 der Kegelschnitte, die die Gerade s berühren.

Definition 2. Die Menge \mathfrak{S} der Involutionen i (einschließlich der parabolischen!) der Grundgeraden s sei auf $\mathfrak{N}(FGH)$ so abgebildet, dass dabei der Kegelschnitt m des Netzes dann der Involution i zugeordnet ist, wenn die beiden (eventuell zusammenfallenden) Schnittpunkte des Kegelschnitts und der Grundgeraden s mit den Doppelpunkten der Involution i identisch sind. Diese Abbildung sei die »(m, i)-Abbildung« genannt, und mit

$$i = \varphi(m) \quad \text{bzw.} \quad m = \varphi^{-1}(i) \quad (1.1)$$

bezeichnet.

Es gilt jetzt:

Lemma 2. Die (m, i)-Abbildung ist umkehrbar eindeutig.

Lemma 3. Bei der Abbildung $i = \varphi(m)$ ist i eine hyperbolische, elliptische, bzw. parabolische Involution, je nachdem der Kegelschnitt m zur Klasse M_1 , der Klasse M_2 , bzw. der Klasse M_3 gehört.

Definition 3. Es sei jetzt Π die Menge jener Punkte \bar{P} der projektiven Ebene Π_2 , welche von den Grundpunkten F, G, H verschieden sind. Die Menge Π sei auf die Menge \mathfrak{S} der Involutionen i der Grundgeraden s so abgebildet, dass dabei die Involution i dann und nur dann dem Punkt \bar{P} zugeordnet ist, wenn das vollständige Viereck $FGHP$ (nach dem zweiten Desarguesschen Satz) auf der Geraden s die Involution i bestimmt. Diese Abbildung sei die »(i, \bar{P})-Abbildung« genannt und mit

$$\bar{P} = \chi(i) \quad \text{bzw.} \quad i = \chi^{-1}(\bar{P}) \quad (1.2)$$

bezeichnet.

Lemma 4. Die (i, \bar{P})-Abbildung ist umkehrbar eindeutig.

Beweis. Die Eindeutigkeit der $i = \chi^{-1}(\bar{P})$ Abbildung ist evident, da durch das Viereck $FGH\bar{P}$ auf der Geraden s eine und nur eine Involution i bestimmt ist. Es sei nun die Involution i durch ihre Doppelpunkte D_1, D_2 gegeben, und der Punkt $\bar{P} = \chi(i)$ soll konstruiert werden. Die Verbindungsgerade FG (bzw. FH) wird durch die Gerade s im Punkt G_1 (bzw. H_1) geschnitten. Auf Grund des Doppelverhältnisses $(D_1 D_2 G_1 G_2) = -1$, bzw. $(D_1 D_2 H_1 H_2) = -1$, kann der Punkt G_2 (bzw. H_2) konstruktiv bestimmt werden. Der Seite $FG \equiv FG_1$ (bzw. $FH \equiv FH_1$) liegt die Seite HG_2 (bzw. GH_2) gegenüber und diese zwei Seitengeraden schneiden sich, offenbar, in einem und nur einem Punkt \bar{P} .

Definition 4. Durch (1.1) und (1.2) ist auch eine Abbildung zwischen $\mathfrak{N}(FGH)$ und Π bestimmt, denn es ist

$$\bar{P} = \chi[\varphi(m)]$$

oder

$$\bar{P} = \psi(m) \quad \text{bzw.} \quad m = \psi^{-1}(\bar{P}). \quad (1.3)$$

Damit ist also die »(m, \bar{P})-Abbildung« bestimmt.

Lemma 5. Die (m, \bar{P})-Abbildung ist umkehrbar eindeutig.

Wird die Inzidenz des Punktes \bar{P} mit dem Kegelschnitt m durch $\bar{P} I m$ bezeichnet, so gilt

Lemma 6.

$$[\bar{P} = \psi(p) \wedge \bar{T} = \psi(t); p I \bar{T}] \Rightarrow t I \bar{P}.$$

Ist nun $\bar{P} = \psi(p)$, so bilden die Kegelschnitte t, welche den Bedingungen

$$T \in \mathfrak{N}(FGH) \wedge t I \bar{P}$$

genügen, ein Kegelschnittbüschel, welches mit

$$\mathfrak{B}(F, G, H, \bar{P})$$

bezeichnet sei. Aus Lemma 6 folgt dann unmittelbar

Lemma 7.

$$\forall t \in \mathfrak{B}(FGH, \psi(p)) \Rightarrow \psi(t) I p \quad (\text{Abb. 1}).$$

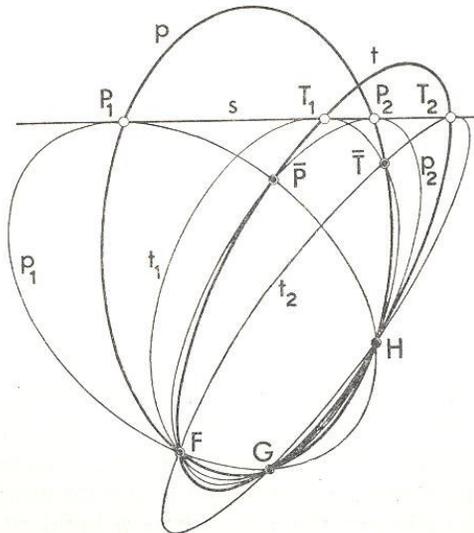


Abb. 1.

Beweis. Der Kegelschnitt p bestimmt auf der Geraden s die Involution $i = \varphi(p)$ mit den Doppelpunkten P_1, P_2 und er bestimmt damit auch zwei Kegelschnitte p_1, p_2 der Klasse M_3 , die sich in $\bar{P} = \psi(p)$ schneiden. Jeder Kegelschnitt $t \in \mathfrak{B}(FGH\bar{P})$ schneidet die Gerade s im zugeordneten Punktepaar T_1, T_2 der Involution i (Abb. 1). Die Punkte P_1, P_2, T_1, T_2 bilden also ein harmonisches Quadrupel, also ist auch T_1, T_2, P_1, P_2 ein harmonisches Quadrupel, woraus dann folgt, dass für die Involution i^* mit den Doppelpunkten T_1, T_2 die Punkte P_1, P_2 ein zugeordnetes Punktepaar bilden. Also gilt $i^* = \varphi(t)$ (Lemma 2). Da dem Kegelschnitt t der Punkt $\bar{T} = \psi(t)$ angehört (Lemma 5), so bestimmt das $\mathfrak{B}(FGH\bar{T})$ auf der Geraden s dieselbe neue Involution. Da der Kegelschnitt p die Geraden s in einem zugeordneten Punktepaar schneidet, so gehört er zum $\mathfrak{B}(FGH\bar{T})$. Also ist $\bar{T} I p$.

2. Die Grundelemente des Modells der hyperbolischen Ebene in der Φ -Figur

In der h -Ebene	In der Φ -Figur
die »Gerade« (oder der »Idealpunkt«)	der Kegelschnitt der Klasse M_1
der »Punkt« (oder die »Idealgerade«)	der Kegelschnitt der Klasse M_2
das »Ende« (oder die »Absolutgerade« — die Tangente der Absoluten)	der Kegelschnitt der Klasse M_3

3. Die Inzidenz in der Φ -Figur

a. Die Inzidenzrelation. Ist T ein »Punkt« und p eine »Gerade«, so sei die » h -Inzidenz« bestimmt durch

$$T \tilde{I} p \stackrel{\text{def}}{\iff} T \in \mathfrak{B}(FGH\psi(p)). \quad (3.1)$$

Aus (3.1) nach Lemma 7 folgt dann unmittelbar

$$p \in \mathfrak{B}(FGH\psi(T)), \quad (3.2)$$

woraus die duale Symmetrie der Inzidenzrelation ersichtlich ist. Würden wir im »Wörterbuch der Elemente« (No. 2) für den Begriff des »Punktes« anstatt des Kegelschnittes der Klasse M_2 sein ψ -Bild einführen, bekämen wir die Inzidenzrelation im gewöhnlichen Sinne, d. h. die »Punkte« die mit der »Geraden« p inzident sind, wären die ψ -Bilder, die auf dem Kegelschnitt p der Klasse M_1 liegen (Abb. 2).

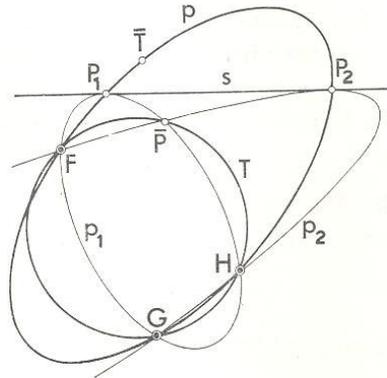


Abb. 2.

b. Die Inzidenzaxiome. Als Grundlage für unsere Betrachtungen der hyperbolischen Ebene seien aus dem *Hilbertschen* Axiomensystem [3] die (etwas modifizierten) Axiome der ebenen absoluten Geometrie genommen, und dazu noch das Lobatschewskische Parallelenaxiom. Nachdem wir noch die weiteren Grundrelationen für unser Modell in der Φ -Figur interpretieren, werden sich diese Axiome als richtige Sätze der projektiven Geometrie über diese Figur offenbaren. Damit wird also bewiesen, dass unsere »Geometrie in der Φ -Figur« der Geometrie der hyperbolischen Ebene isomorph ist. Da wir die Inzidenzrelation in unseren Modell schon eingeführt haben, so können wir jetzt die ebenen Inzidenzaxiome beweisen. Dabei werden wir die Axiome I_1 und I_2 [3] durch einen Satz ersetzen.

$(I_1 I_2)$: *Es gibt eine und nur eine Gerade die mit zwei verschiedenen Punkten inzident ist.*

Das Axiom I_3 sei nun in zwei Teile geteilt:

$(I_3 a)$: *Auf jeder Geraden gibt es immer wenigstens zwei Punkten.*

$(I_3 b)$: *Es gibt wenigstens drei nicht kollineare Punkte.*

c. Beweis des Axioms $(I_1 I_2)$. Es seien also T und S zwei verschiedene »Punkte« und mit p sei die eventuell existierende »Verbindungsgerade« bezeichnet. Dann müsste nach (3.2) gelten

$$p \in \mathfrak{B}(FGH_\psi(T)) \wedge p \in \mathfrak{B}(FGH_\psi(S)).$$

Dann ist aber p als Kegelschnitt durch $F, G, H, \overline{T}, \overline{S}$ eindeutig bestimmt. Es muss noch gezeigt werden, dass p zur Klasse M_1 gehört. Das ist aber offensichtlich, denn jeder Kegelschnitt aus den Büscheln $\mathfrak{B}(FGHT)$ und $\mathfrak{B}(FGHS)$ schneidet die Gerade s reell. Diese zwei Büschel bestimmen nämlich auf der Geraden s verschiedene elliptische Involutionen (Def. 3 und 4), in denen alle zugeordnete Punktepaare reell sind. Das ist leicht einzusehen, wenn die Involutionen der

Geraden s auf ein Kegelschnitt \bar{s} abgebildet werden (Steiner, [6]), wobei sich das Zentrum der elliptischen Involution 2. Ordnung innerhalb des Kegelschnittes \bar{s} befindet. Alle Strahlen dieses Zentrums, die die zugeordneten Punktpaare bestimmen, schneiden nämlich den Kegelschnitt \bar{s} reell.

d. Zwei Gerade. Betrachten wir nun das duale Problem. Die gegebenen »Geraden« p und q bestimmen die ψ -Bilder

$$\bar{P} = \psi(p) \wedge \bar{Q} = \psi(q),$$

welche mit den Grundpunkten F, G, H eindeutig den Kegelschnitt

$$T \equiv (FGH\bar{P}\bar{Q})$$

bestimmen. Es gilt dabei

$$T \tilde{I} p \wedge T \tilde{I} q.$$

Die »Geraden« p und q schneiden sich nur dann wenn $T \in M_2$. Das Kegelschnittbüschel $\mathfrak{B}(FGH\bar{P})$ wird durch die Gerade s in einer hyperbolischen Involution i_p^H geschnitten, für welche P_1, P_2 (die Schnittpunkte des Kegelschnittes p und der Geraden s) Doppelpunkte sind, während diese Gerade durch das Büschel $\mathfrak{B}(FGH\bar{Q})$ in einer zweiten hyperbolischen Involution i_q^H , mit den Doppelpunkten Q_1 und Q_2 geschnitten wird. Der Kegelschnitt T schneidet die Gerade s in den Punkten X_1, X_2 die reell oder konjugiert imaginär sein können. Da

$$T \in \mathfrak{B}(FGH\bar{P}) \wedge T \in \mathfrak{B}(FGH\bar{Q})$$

gilt, so ist für das Paar X_1, X_2

$$(X_1, X_2) \in i_p^H \wedge (X_1, X_2) \in i_q^H$$

gültig, und hieraus auch

$$(P_1 P_2 X_1 X_2) = (Q_1 Q_2 X_1 X_2) = -1. \quad (3.3)$$

(3.3) bedeutet, dass die Paare P_1, P_2 und Q_1, Q_2 die Involution i_T bestimmen in der X_1, X_2 die Doppelpunkte sind. Da $i_T = \varphi(T)$ (1.1) gilt, wird der »Punkt« T nur dann reell, wenn die Involution i_T eine elliptische ist. Es ist also

$$(P_1 P_2 Q_1 Q_2) < 0, \quad (3.4)$$

und die »Geraden« p und q sind *schneidende* »Gerade«. Ist aber i_T eine hyperbolische Involution, so wird

$$(P_1 P_2 Q_1 Q_2) > 0, \quad (3.5)$$

und $T \in M_1$ ist also ein idealer »Punkt«. Die p und q sind dann *nicht-schneidende* »Gerade«. Endlich, für

$$(P_1 P_2 Q_1 Q_2) = 0 \vee (P_1 P_2 Q_1 Q_2) = \pm \infty \quad (3.6)$$

ist i_T eine parabolische Involution ($T \in M_3$, T ist ein »Ende«), und die »Geraden« p und q sind *parallel*. Es gilt also:

Satz 3.1. *Die »Geraden« p und q sind schneidende, nicht-schneidende oder parallele »Gerade« je nachdem, ob sie durch ihre Schnittpunkte auf der Grundgeraden s eine elliptische, hyperbolische oder parabolische Involution bestimmen.*

Es ist interessant statt des Kegelschnittes T den zugeordneten Punkt $\bar{T} = \psi(T)$ zu betrachten. Wegen der Inzidenz (jetzt in gewöhnlichem Sinne) fällt er immer in einen Schnittpunkt der »Geraden« p und q (abgesehen von den Schnittpunkten F, G, H). In diesem Fall würden die Betrachtungen zu denselben Ergebnissen führen, je nach den Involutionen, die das Viereck $FGHT$ auf der Geraden s bestimmt.

e. Beweis des Axioms $I_3 a$. Durch die gegebene »Gerade« p wird das Kegelschnittbüschel $\mathfrak{B}(FGHP)$ bestimmt, das auf der Geraden s dieselbe hyperbolische Involution i_p wie die »Gerade« p bestimmt. Jeder Kegelschnitt $T \in \mathfrak{B}(FGHP)$ befriedigt die Inzidenzrelation (3.1), und jeder solcher Kegelschnitt schneidet auf der Geraden s das zugeordnete Punktepaar der hyperbolischen Involution i_p aus. Wieviele Kegelschnitte T gehören zur II. Klasse (die »Punkte« sind)? Die Antwort auf diese Frage ist dieselbe wie die Antwort auf die Frage, wieviele imaginäre zugeordnete Punktepaare eine hyperbolische Involution besitzt. Man sieht, dass es ∞^1 solcher Paare gibt, wenn man auf der Reihe der 2. Ordnung [6] eine solche hyperbolische Involution betrachtet, dessen Zentrum ausserhalb dieser Reihe fällt. Der Kegelschnitt \bar{s} (der die Involution trägt) wird durch die Strahlen des Zentrums, die die zugeordneten Punktepaare verbinden, sowohl in Paaren reeller als auch imaginärer Punkte geschnitten. Also, auf der gegebenen »Geraden« p gibt es nicht zwei, sondern ∞^1 »Punkte«. Die »Gerade« p kann damit als eine »Reihe« von »Punkten« dargestellt werden, d. h. als eine Menge der Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{B}(FGHP)$. Auf diese Weise werden die »Idealpunkte« und die »Enden« — die Kegelschnitte p_1, p_2 miteinbezogen (Abb. 2).

Aus den Betrachtungen bei dem Beweis des Axioms ($I_3 a$) geht hervor:

Satz 3.2. *Drei »Punkte« sind dann und nur dann kollinear, wenn sie zu demselben auf der Geraden s eine hyperbolische Involution bestimmenden Büschel $\mathfrak{B}(FGHP)$ gehören.*

f. Die Geraden eines Punktes. Da festgestellt ist, dass es auf einer »Geraden« ∞^1 »Punkte« gibt, erhebt sich das duale Problem — wieviele »Geraden« sind mit dem gegebenen »Punkt« inzident, und was für »Geraden« sind es.

Es sei T ein reeller »Punkt« ($T \in M_2$), und es sei $\bar{T} = \psi(T)$, wodurch jenes Büschel $\mathfrak{B}(FG\bar{T})$ bestimmt ist, welches auf der Geraden s dieselbe Involution $i_T = \chi^{-1}(T)$ (1.2) wie der »Punkt« T bestimmt. Auf Grund des Lemmas 3 ist i_T eine elliptische Involution. D. h.:

$$\forall p \in \mathfrak{B}(FG\bar{T}) \Rightarrow p \in M_1 \quad (3.7)$$

$$\wedge \forall p \in \mathfrak{B}(FG\bar{T}) \Rightarrow p \bar{I} T. \quad (3.8)$$

Also, der reelle »Punkt« enthält ∞^1 »Geraden« und alle diese »Geraden« sind reell. Auf diese Weise haben wir das »Geradenbüschel« I. Art bekommen.

Es sei der »Punkt« T ein idealer »Punkt« ($T \in M_1$). Die Involution i_T ist jetzt eine hyperbolische, und die Relation (3.7) gilt demnach nicht mehr. In dem Büschel $\mathfrak{B}(FG\bar{T})$ gibt es jetzt ∞^1 der Kegelschnitte der Klasse M_1 , ∞^1 der Kegelschnitte der Klasse M_2 und zwei Kegelschnitte der Klasse M_3 . Also, der ideale »Punkt« T enthält ∞^1 reelle »Gerade«, ∞^1 ideale »Gerade« und diese zwei Geradengruppen sind durch zwei absolute »Gerade« getrennt. Dass dann die *gemeinsame »Normale«* dieser »Geraden« besteht, wird später bewiesen, und dass wir damit das *Büschel der nichtschneidenden »Geraden«* bekommen, folgt auf Grund des Satzes 3.1.

Es sei jetzt $T \in M_3$ angenommen. Der Punkt \bar{T} ist dann der Berührungspunkt, und die Involution i_T ist eine parabolische. Die Relation (3.7) gilt für alle Kegelschnitte $p \in \mathfrak{B}(FG\bar{T})$, mit Ausnahme des Kegelschnittes T . Das bedeutet, dass ein »Ende« ∞^1 »Geraden« enthält und dass alle reell sind, ausser einer, die eine absolute »Gerade« ist. Auf Grund des Satzes 3.1 ist offensichtlich, dass wir hier das »Parallelenbüschel« mit dem gemeinsamen »Ende« T bekommen haben.

g. Beweis des Axioms I_3 b. Zwei »Punkte« bestimmen immer eine »Gerade« (Axiom $I_1 I_2$), und zwei solche »Punkte« gehören deshalb immer zu einem Büschel $\mathfrak{B}(FG\bar{H}P)$. Für $\forall T \in M_2$ gilt

$$\mathfrak{B}(FG\bar{H}P) \cap \mathfrak{N}(FGH) \neq 0,$$

weil die Menge aller T der Klasse M_2 im Büschel $\mathfrak{B}(FG\bar{H}P)$ einparametrig, und im $\mathfrak{N}(FGH)$ zweiparametrig ist.

4. Die Relationen der Anordnung und der Kongruenz. Die Beziehung zur Π_1 -Interpretation

Die Anordnungsrelation. Für drei »Punkte« A, B, C sagen wir, dass » B zwischen A und C liegt«, wenn folgende Bedingungen befriedigt sind:

U_1 : Drei Kegelschnitte der Klasse M_2 (die »Punkte«) A, B, C gehören demselben Kegelschnittbüschel an (Satz 3.2);

U_2 : Für die imaginären Schnittpunkte (die Doppelpunkte der elliptischen Involution) der Kegelschnitte A, B, C mit der Geraden s gilt: $(A_1 A_2 B_1 B_2) < (A_1 A_2 C_1 C_2)$;

U_3 : Gleichzeitig gilt $(B_1 B_2 C_1 C_2) < (A_1 A_2 C_1 C_2)$.

Aus der Bedingung U_1 folgt, dass die Doppelpunkte $A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ der elliptischen Involutionen $i_{AE} = \varphi(A)$, $i_{BE} = \varphi(B)$, $i_{CE} = \varphi(C)$ zugleich die Paare der zugeordneten Punkte derselben hyperbolischen Involution sind. Die Doppelverhältnisse in den Bedingungen U_2 und U_3 besitzen verschiedene Werte, und es wird verlangt, dass diese Werte in der gegebenen Beziehung stehen. Dies hat entsprechende Beziehungen zwischen den korrespondierenden Elementen des Netzes $\mathfrak{N}(FGH)$ zur Folge. Alles, was im Netz $\mathfrak{N}(FGH)$ geschieht, bemerkt man in der Involution auf der Geraden s . Man könnte alles, was bis jetzt dargestellt wurde, ausschliesslich mit Hilfe der Involutionen auf der Geraden s interpretieren und dann die Resultate in das Netz $\mathfrak{N}(FGH)$ versetzen. Das ist die direkte Folge des Lemmas 2. In den Bedingungen U_2, U_3 wurde eben dieser Weg gegangen, und es wird sich zeigen warum.

Im Artikel [1] hat S. Bilinski eine Interpretation gegeben, wo ein reeller Punkt der hyperbolischen Ebene durch eine elliptische Involution und eine reelle Gerade durch eine hyperbolische Involution auf der fixen Geraden Π_1 dargestellt wird, wobei hier Π_1 den eindimensionalen projektiven Raum bedeutet. Daher wird diese Interpretation die Π_1 -Interpretation genannt. Versuchen wir jetzt eine Beziehung zu dieser Interpretation herzustellen. Zu diesem Zweck ersetzen wir das Netz $\mathfrak{N}(FGH)$ durch die entsprechenden Involutionen auf der Geraden s . Diese Abbildung führen wir auf Grund des Lemmas 2 durch. Wenn es sich zeigt, dass dabei die Grundrelationen einander entsprechen, kann man daraus schliessen, dass beides Interpretationen ein und derselben Geometrie sind [4].

Und tatsächlich nach Lemma 2 entspricht jetzt:

a. Der »Geraden« — die *hyperbolische Involution*.

b. Dem »Punkt« — die *elliptische Involution*.

c. Der *Inzidenzrelation* (No. 3) — die Beziehung $(P_1 P_2 T_1 T_2) = -1$. Weiterhin könnten wir die Inzidenzaxiome und die aus diesen hervorgehenden wesentlichen Sätze nachprüfen, aber es ist offensichtlich, dass das in beiden Geometrien gleich ist.

d. Die *Anordnungsrelation* — Die Bedingungen U_2 und U_3 sind von vornherein so ausgedrückt, wie das dem »Wörterbuch der Π_1 -Interpretation« entspricht. Übertragen wir noch U_1 , d. h. die Kollinearitätsbedingung. Aus dieser Bedingung (Satz 3.2) geht hervor (wenn X, Y Doppelpunkte der hyperbolischen Involution sind):

$$(XYA_1 A_2) = -1, \quad (XYB_1 B_2) = -1, \quad (XYC_1 C_2) = -1. \quad (4.1,2,3)$$

Daraus folgt:

$$(A_1 B_1 C_1 C_2) = (A_2 B_2 C_2 C_1)! \quad (4.4)$$

Das entspricht aber der Kollinearitätsbedingung von drei »Punkten« in der Π_1 -Interpretation [1], und es ist jetzt klar, dass auch die zweite Gruppe der Axiome in der Geometrie der Φ -Figur befriedigt ist.

e. Um nun die Beziehung zur Π_1 -Interpretation [1] vollständig herzustellen, ist es nötig, noch die *Kongruenzrelation* so einzuführen, dass sie in beiden Geometrien gleichbedeutend wird. Das verlangt eigentlich die Gleichheit:

$$(A_1 A_2 B_1 B_2) = (C_1 C_2 D_1 D_2). \quad (4.5)$$

Diese Kongruenzrelation für die Länge ist eigentlich als die dritte Grundrelation der hyperbolischen Geometrie hinreichend. Wir können jedoch die Kongruenzrelation auch für die Winkel einführen. Wir sagen also, dass die Winkel der »Geraden« p und q bzw. der »Geraden« s und t kongruent sind, wenn für die Doppelpunkte der entsprechenden hyperbolischen Involutionen die Beziehung

$$(P_1 P_2 Q_1 Q_2) = (S_1 S_2 T_1 T_2) \quad (4.6)$$

gültig ist.

So sind wir zur Ergebnis gekommen, dass beide Interpretationen isomorph sind, also ist die eben definierte Geometrie in der Φ -Figur ebenso die Geometrie der hyperbolischen Ebene wie die Geometrie der Π_1 -Interpretation. Um das noch besser einzusehen, wollen wir das Parallelenaxiom von Lobatschewski in der Interpretation der Φ -Figur beweisen.

5. Das Parallelenaxiom

Es sei jetzt das hyperbolische Parallelenaxiom in unserer Interpretation bewiesen. Durch den »Punkt« T ist sein ψ -Bild \bar{T} bestimmt. Da die Inzidenzrelation nicht befriedigt ist, so befindet sich \bar{T} nicht auf dem Kegelschnitt p . Alle Kegelschnitte des Büschels $\mathfrak{B}(\overline{FGHT})$ schneiden die Gerade s . Alle sind also reelle »Gerade«, und alle diese »Geraden« sind mit dem »Punkt« T inzident. Es ist offensichtlich, dass jeder Kegelschnitt $r \in \mathfrak{B}(\overline{FGHT})$ den Kegelschnitt p ausser in F, G, H noch in einem weiteren Punkt R schneidet, und

umgekehrt, dass jeder Punkt R des Kegelschnittes p einen und nur einen Kegelschnitt $r \in \mathfrak{B}(FGHT)$ bestimmt. Liegt der Punkt R so, dass das Viereck $(FGHR)$ auf der Grundgeraden s eine hyperbolische Involution bestimmt, dann wird eine solche Involution auf s auch durch das Kegelschnittbüschel (der »Geraden«) $\mathfrak{B}(FGHR)$ bestimmt, in dem die Kegelschnitte p und r immer ein Paar bilden. Das heisst, dass die Schnittpunkte P_1, P_2 und R_1, R_2 dieser Kegelschnitte mit der Geraden s die zugeordneten Punktepaare einer hyperbolischen Involution sind. Daher gilt $(P_1 P_2 R_1 R_2) > 0$ und nach dem Satz 3.1

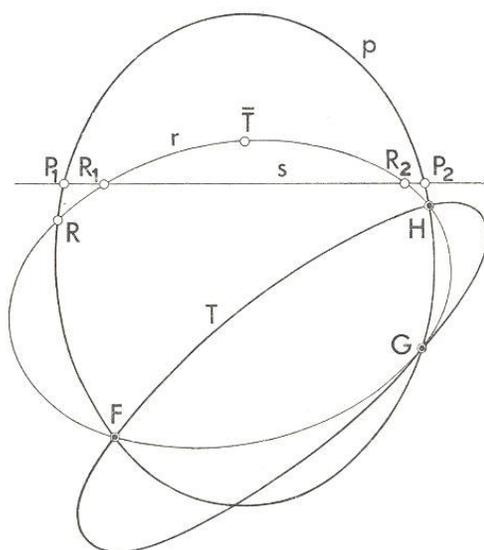


Abb. 3.

sind die »Geraden« p und q »Nichtschneidende« (Abb. 3). Man bemerkt sogleich, dass es ∞^1 (und nicht nur zwei) solcher Möglichkeiten gibt, mit ∞^1 Auswahlmöglichkeiten des Punktes R , damit sich die »Geraden« p und r schneiden. Es gibt weiter zwei Möglichkeiten ($R \equiv P_1$ und $R \equiv P_2$), wobei $(P_1 P_2 R_1 R_2) = 0$ oder $\pm \infty$ gilt, so dass auch die »Geraden« p und r parallel sind. Man sieht also, dass durch einen mit der »Geraden« p nicht inzidenten »Punkt« T zwei mit der »Geraden« p parallele »Gerade« hindurchgehen.

6. Die hyperbolische Metrik und einige ihrer Folgerungen

Die Metrik in der Φ -Interpretation wird nun offensichtlich mit der Metrik der Π_1 -Interpretation auf der Geraden s gegeben. Das hyperbolische Entfernungsmaß zweier »Punkte« A, B wird also durch den Ausdruck

$$(7.8) \quad d = 2 \operatorname{Ar th} \sqrt{(A_1 A_2 B_1 B_2)} = 2 \operatorname{Ar th} D^{\frac{1}{2}} \quad (6.1)$$

gegeben [1]. Das Doppelverhältnis D ist immer positiv, wenn die »Punkte« A und B reell sind, denn die zwei »Punkte« A und B bestimmen durch ihre imaginären Schnittpunkte mit der Geraden s immer eine hyperbolische Involution auf s (Axiom $I_1 I_2$). Es gilt also:

$$D = (A_1 A_2 B_1 B_2) > 0. \quad (6.2)$$

Man kann das durch Einführung projektiver Koordinaten analytisch beweisen. Dabei sind $A_1(a_1 + ia_2)$, $A_2(a_1 - ia_2)$, $B_1(b_1 + ib_2)$, $B_2(b_1 - ib_2)$ die Schnittpunkte mit der Geraden s . Man muss noch beachten, dass dabei

$$a_2 > 0, \quad b_2 > 0 \quad (6.3)$$

ist, wodurch die beiden Punktepaare geordnet sind. Man berechnet [2]:

$$D = \frac{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}{(b_1 + a_1)^2 + (b_2 + a_2)^2}. \quad (6.4)$$

Aus (6.4) und (6.3) ergibt sich dann

$$D = (A_1 A_2 B_1 B_2) < 1. \quad (6.5)$$

Die Relationen (6.1), (6.2) und (6.5) zeigen, dass die Entfernung d zweier reeller »Punkte« eine reelle und endliche Grösse ist. Es seien hier noch zwei spezielle Fälle angeführt:

a. Es seien A ein reeller »Punkt« und B ein »Ende«. Dann ist $B_1 = B_2$, und also $D = 1$. Aus (6.1) folgt dann $d = \infty$. Man könnte auch umgekehrt die »Enden« als solche »Punkte« einführen, für die die Entfernung von einem gegebenen reellen »Punkt« $d = \infty$ ist.

b. Es seien A ein reeller und B ein idealer »Punkt«, und es seien $A_1(a_1 + ia_2)$, $A_2(a_1 - ia_2)$, $B_1(b_1)$, $B_2(b_2)$, wobei

$$b_1 \neq b_2, \quad a_2 > 0 \quad (6.6)$$

gelten soll. In diesem Falle ist die Entfernung der »Punkte« A und B immer eine komplexe Grösse. Man könnte aber umgekehrt die idealen »Punkte« auch so einführen, dass man sie als jene »Punkte« definiert, für welche die Entfernung von irgendeinem reellen »Punkt« eine komplexe Grösse ist.

Betrachten wir jetzt noch das hyperbolische Winkelmass. Damit ein Winkel zweier »Geraden« existieren könnte, müssen sie sich schneiden. Dann muss das Doppelverhältnis Δ ihres Schnittpunktes mit der Geraden s negativ sein (Satz 3.1). Das Winkelmass wird durch den Ausdruck:

$$\varphi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{-(P_1 P_2 Q_1 Q_2)}{+}} = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{-\Delta}{+}} \quad (6.7)$$

gegeben [1]. Es ist offensichtlich, dass im Falle, wenn sich die »Geraden« nicht schneiden ($\Delta > 0$) der Winkel φ nicht definiert wird, bzw. dass $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ ist, wenn sie parallel sind ($\Delta = 0$ oder $\Delta = \pm \infty$). Der Winkel zweier »Geraden« ist hier immer der nicht-orientierte Winkel zwischen den orientierten »Geraden«. Die »Geraden« werden durch die Lage der Doppelpunkte der entsprechenden hyperbolischen Involutionsen auf der Geraden s so orientiert, wie es in der Π_1 -Interpretation [1] gemacht wird. Bemerken wir, dass dieses Modell nach (6.7) zur grossen Familie der Modelle mit der Hesseschen Metrik gehört ([7], S. 186—187).

Aus (6.7) folgt die Orthogonalitätsbedingung zweier »Geraden« p und q , denn für

$$\Delta = (P_1 P_2 Q_1 Q_2) = -1 \quad (6.8)$$

ist $\varphi = \pi/2$. Die geometrische Bedeutung von (6.8) in der Φ -Figur ist die folgende: Die »Gerade« p bestimmt durch ihr ψ -Bild \overline{P} das Kegelschnittbüschel $\mathfrak{B}(FGHP)$, dessen Kegelschnitte die mit der »Geraden« p inzidenten »Punkte« sind. Alle diese Kegelschnitte schneiden auf der Geraden s die zugeordneten Punktepaare der hyperbolischen Involution aus. Dabei sind P_1, P_2 die Doppelpunkte, die mit den erwähnten Punktepaaren harmonische Quadrupeln bilden. In der Regel wird (siehe No. 3e), bei der reellen »Geraden« p der »Punkt« des Büschels (aus der »Reihe«) $\mathfrak{B}(FGHP)$ ein idealer »Punkt« sein (er schneidet die Gerade s reell). In diesem Fall ist ein solcher idealer »Punkt« eigentlich die reelle »Gerade« q , welche die Orthogonalitätsbedingung befriedigt. Man kann also sagen: Die »Gerade« q ist zu der »Geraden« p orthogonal, wenn sie als ein idealer »Punkt« der »Geraden« p gegeben ist, und umgekehrt. Man bemerkt hier die Analogie mit dem Kleinschen Modell, denn die Polaren der idealen Punkte sind in Bezug auf die Absolute der Kleinschen Interpretation orthogonal auf jene Gerade, zu welcher diese idealen Punkte gehören.

Im $\mathfrak{B}(FGHP)$ gibt es ∞^1 Kegelschnitte, die die Gerade s reell schneiden (No. 3e), d. h. es gibt ∞^1 »Geraden« q_i , die auf der »Geraden« p orthogonal sind. Alle diese »Geraden« gehören demselben Büschel der »Nichtschneidenden« an, weil sie die Bedingung des Nichtschneidens befriedigen (Satz 3.1) und durch denselben idealen »Punkt« gehen, der durch denselben Kegelschnitt wie die »Gerade« p dargestellt wird. Es ist klar, dass die »Gerade« p die gemeinsame »Normale« dieser »Nichtschneidenden« ist. Dass sie die einzige ist, kann man aus Folgendem schliessen: für zwei beliebige »Nichtschneidende« q_1, q_2 zeigt das Doppelverhältnis (6.8), dass P_1, P_2 ein zugeordnetes Paar zweier entsprechenden hyperbolischen Involutionsen ist. Es gibt aber nur ein gemeinsames Paar zweier Involutionsen [6].

L I T E R A T U R :

- [1] *S. Bilinski*, Eine Interpretation der ebenen hyperbolischen Geometrie in der projektiven Geometrie der Geraden, *Glasnik Mat.-Fiz. Astr.* **20** (1965), 99—135,
 [2] *N. A. Glagoljev*, Projektivnaja geometrija, Moskva, 1963,
 [3] *D. Hilbert*, Grundlagen der Geometrie, 8. Aufl, Stuttgart, 1956,
 [4] *N. V. Jefimov*, Visšaja geometrija, Moskva, 1953,
 [5] *V. Niče*, Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije, *Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn.* 78/86 (1945), 153—194,
 [6] *T. Reye*, Geometrie der Lage I, Leipzig, 1909,
 [7] *B. A. Rozenfeljd*, Neevklidovy prostranstva, Moskva, 1969.

(Eingegangen am 26. III 1970)

*Mathematisches Institut
der Universität Zagreb***MODEL HIPERBOLIČNE RAVNINE UNUTAR TEORIJE MREŽE
KONIKA***Branko Kučinić, Zagreb*

S a d r ž a j

Promatra se dio projektivne geometrije tzv. Φ -figure. Ovu figuru čini mreža konika triju temeljnih tačaka F, G, H i temeljni pravac s koji nije incidentan ni s jednom od tih triju tačaka. Uvodi se obostrano jednoznačno preslikavanje (m, i) između konika mreže $\mathfrak{N}(FGH)$ i involucija na pravcu s , čime su konike te mreže podijeljene u tri klase: Klasa M_1 od ∞^2 konika koje sijeku pravac s , klasa M_2 od ∞^2 konika koje pravac s ne sijeku i klasa M_3 od ∞^1 konika koje pravac s diraju.

Koristeći osobitosti geometrije ove Φ -figure uvodi se interpretacija hiperbolične ravnine. Pod »pravcem« hiperbolične ravnine (ujedno idealna točka) podrazumijeva se konika klase M_1 , pod »točkom« (ujedno idealan pravac) konika klase M_2 , a »krajevi« su predloženi konikama klase M_3 .

Da se pokaže da ovako interpretirani elementi čine geometriju hiperbolične ravnine, uvode se tri osnovne geometrijske relacije, a zatim se aksiomi hiperbolične geometrije shvaćaju kao teoremi projektivne geometrije Φ -figure i kao takvi se dokazuju. U tom postupku, za kojeg se pokazuje da ga je moguće provesti, proizlazi i niz osobitosti i teorema hiperbolične geometrije u ovakvom modelu. Značajnija je međutim veza ovakvog modela s II_1 -interpretacijom [1], ako je ova dana na temeljnom pravcu s . Pokazuje se da postoji obostrano jednoznačno pridruženje interpretiranih elemenata u ova dva modela, pri čemu su sačuvane tri osnovne geometrijske relacije.

Ova činjenica više nego skraćuje spomenuti postupak dokazivanja, jer postaje očito da se radi o dva modela iste geometrije. Posebno se ipak dokazuje aksiom o paralelama Lobačevskog.

Veza s Π_1 -interpretacijom koristi se i za uvođenje hiperbolične metrike u Φ -model. Tako su hiperbolične mjere dužine i kuta dane izrazima (6.1) i (6.7), gdje se pojavljuju dvoomjeri sjecišta odgovarajućih konika mreže $\mathfrak{N}(FGH)$ s temeljnim pravcem s .