GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 3 (23) — No. 1 — 1968.

ÜBER DEN ZUSAMMENHANG ZWEIER HERLEITUNGEN EBENER ZIRKULÄRER KURVEN 3-ER ORDNUNG VOM GESCHLECHT NULL

Branko Kučinić, Zagreb

Einleitung. Man kann die zirkulären Kurven 3-er Ordnung vom Geschlecht Null durch die allgemeine Kvadratinversion des Kreises k (mit dem Mittelpunkt O_2) an dem Kreis c (mit dem Mittelpunkt O_1) mit dem Pol P auf dem Kreis k, herstellen. Eine derartige zirkuläre Kurve k_c^3 wird im Pol den Doppelpunkt haben, und wird auch durch die Schnittpunkte der Kreise k und c, sowie durch die Punkte P_1, P_2 gehen, die die Berührungspunkte derjenigen Tangenten sind, welche aus dem Pol P an den Kreis c gezogen sind (die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ ist die Polare p des Pols P bezüglich des Kreises c). Die Tangenten der Kurve k_c^3 im Doppelpunkt sind die Verbindungsgeraden des Pols mit den Schnittpunkten A, B des Kreises k und der Polare p [5]. Der vierfache Brennpunkt F_4 einer derartigen Kurve k_c^3 liegt auf dem durch die Punkte O_1, O_2, P (*Abb.* 1) bestimmten Kreis f, als der vierte Punkt des harmonischen Quadrupels $(PO_1 O_2 F_4) = -1$ [4].

In der Literatur finden wir sehr oft die zirkulären Kurven 3-er Ordnung vom Geschlecht Null als Fusspunktkurven der Parabel bezüglich eines gegebenen Pols P [9]. Dabei ist der Pol ein Doppelpunkt der Fusspunktkurve k_n^3, und ihre Tangenten in diesem Punkt liegen senkrecht auf die diesen Pol enthaltenden Tangenten der erzeugenden Parabel q. Die Kurve k_n^3 wird die Parabel q in demjenigen Punkt R berühren, der der Berührungspunkt jener Tangente ist, die auf die den Pol P enthaltende Normale dieser Parabel senkrecht steht. Da diese Kurve immer einen reellen uneigentlichen Punkt hat, wird sie auch eine Asymptote haben, die, auf Grund der Definition der Fusspunktkurven, zur Achse der Parabel senkrecht ist. Die genaue Lage der Asymptote kann man so bestimmen, dass man den Hauptpunkt H bestimmt, in welchem die Asymptote die Kurve k_n^3 kreuzt. Dieser Punkt kann als der Fusspunkt derjenigen Normale bestimmt werden, die aus dem Pol P auf die Tangente der Parabel gezogen ist, und die zur Verbindungsgeraden des Pols und des Brennpunktes F der Parabel q parallel ist [6]. Der vierfache Brennpunkt F_4 befindet sich in der Mitte der durch den Pol P und durch den Brennpunkt F gebildeten Strecke.

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

In den beiden erwähnten Fällen der Herleitung einer unikursalen zirkulären Kurve 3-er Ordnung wurden genügend Elemente gegeben, durch die diese Kurve vollkommen bestimmt ist. Da es auch andere Herleitungen solcher Kurven gibt, von denen einige nur gewisse spezielle Arten dieser Kurven ergeben, während durch die anderen nur die betrachteten Kurven erzeugt werden, wird die Frage gestellt, ob die beiden erwähnten Herleitungen alle zirkulären Kurven 3-er Ordnung vom Geschlecht 0 umfassen. Für die Fusspunktkurven der Parabel ist die Antwort auf diese Frage bejahend [3]. Um dieselbe Antwort für die allgemeine Inversion eines Kreises an einem Kreis geben zu können, stellen wir die Verbindung zwischen diesen beiden Herleitungen her. Man könnte zwar auch mit einfacheren Mitteln dasselbe Ziel erreichen, aber eine solche Verbindung wird uns auch einige neue Möglichkeiten konstruktiver Anwendung geben, bzw. wird sie uns ermöglichen, dass wir eine derartige gewünschte Kurve durch Herleitung mittels der allgemeinen Inversion, sowie auch als Fusspunktkurve der Parabel bekommen, was mittels der Definition der allgemeinen Inversion nicht direkt ausführbar ist. Die gewöhnliche Inversion an dem Kreis (unterschiedlich von der allgemeinen Inversion deren spezieller Fall sie ist) lässt sich sehr einfach mit den Fusspunktkurven durch die Definition der polar-reziproken Kurven verbinden [9]. Im Fall der allgemeinen Inversion ist diese Verbindung nicht so offenbar.

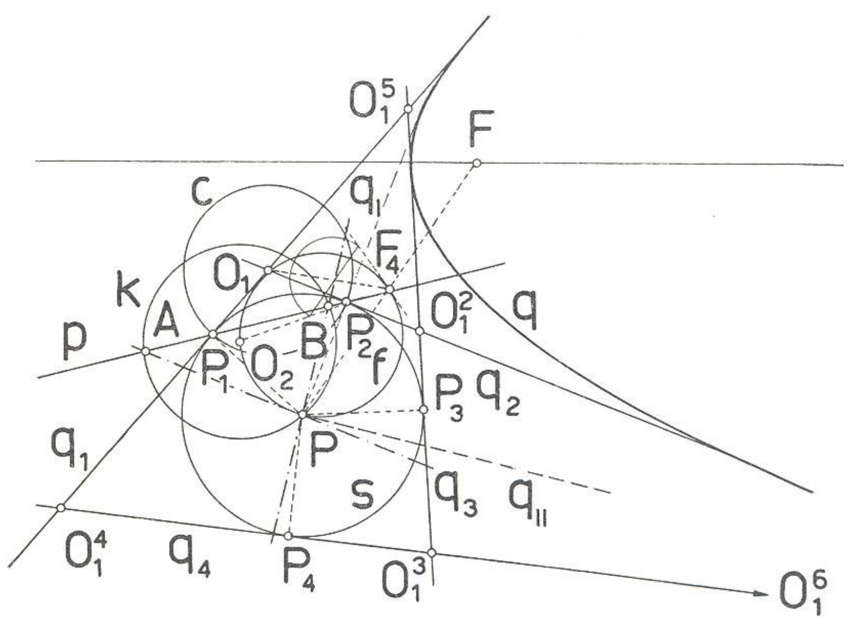

Abb. 1

1. Führen wir zuerst einen Apparat für die Fusspunktkurven der Parabel und einen Apparat für die allgemeine Inversion eines Kreises an einem anderem Kreis in solchen Zusammenhang her, dass die beiden Apparate dieselbe Wirkung haben, d. h. es soll $k_n^3 \equiv k_c^3$ sein. Wir werden uns der bekannten Konstruktion bedienen, die uns ermöglicht, dass wir für irgendeine vorgegebene zirkuläre Kurve 3-er Ordnung vom Geschlecht Null die Instrumente der allgemeinen Inversion (P, c, k) bilden können, und dabei sollen der Kreis k und unsere Kurve quadratisch verwandt sein [4]. Man muss auf der Kurve k_c^3 mittels eines Kreises, der den Mittelpunkt im Doppelpunkt P hat, solche Punkte P_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bestimmen, die von dem Punkt P gleich entfernt sind. Diejenigen zwei von diesen vier Punkten, die in Paaren auch konjugiert imaginär sein können, können wir als die in der Einleitung erwähnten Punkte P_1, P_2 annehmen. Es ist notwendig dies so zu tun, weil die allgemeine Inversion auf dem Kreis eine Gleichheit $\overline{PP_1} = \overline{PP_2}$ verlangt. Der Kreis c ist jetzt so bestimmt, dass die Geraden PP_1 und PP_2 seine Tangenten mit den Berührungspunkten in P_1, bzw. P_2 sind. Der Mittelpunkt O_1 des Kreises c befindet sich im Schnittpunkt der Normalen q_1, q_2, die in den Punkten P_1, P_2 auf die Geraden PP_1, PP_2 errichtet sind. Anders gesagt, die Punkte P_1, P_2 der Kurve k_c^3 sind die Fusspunkte der aus dem Pol P auf die Geraden q_1, q_2 gezogen Normalen. Wenn wir wünschen, dass die Kurve k_c^3 zugleich auch die Fusspunktkurve irgend einer Parabel q bei gleichem Pol P sein soll, müssen die Geraden q_1, q_2 die Tangenten dieser Parabel im Sinne der Definition der sogenannten negativen Fusspunktkurven sein [7]. Wenn wir darauf bestehen, dass diese Parabel völlig bestimmt wird, müssen wir dasselbe mit allen vier Punkten P_i durchführen, womit wir die vier Tangenten q_i der Parabel q, erhalten. Wir können uns leicht überzeugen, dass diese Kurve k_c^3 wirklich mit der Fusspunktkurve k_n^3 der Parabel identisch wird, da man sieht, dass die beiden Kurven sich, ausser in dem Doppelpunkt, noch in 6 einfachen Punkten ($P_i + 2$ absolute) decken, und damit diese Kurve 3-er Ordnung eindeutig bestimmt ist. Der gesuchte Zusammenhang ist also sichtbar. Wenn wir die oberen Erörterungen und Eigenschaften der beiden beschriebenen Arten der Erzeugung unserer Kurve berücksichtigen, gelten offenbar die folgenden Sätze:

Satz 1.1. *Wenn der Apparat, der durch die allgemeine Inversion die zirkuläre Kurve k_c^3 3-er Ordnung des Geschlechtes 0 herstellt, d. h. wenn der Pol P und die Kreise c (O_1) und k (O_2) und damit auch die Polare p, und die auf ihr liegenden Punkte P_1, P_2, A, B, gegeben sind, kann diejenige Parabel q bestimmt werden, für die, nebst den gleichen Pol P, die Fusspunktkurve k_n^3 mit der invertierten Kurve identisch ist. Diese Parabel ist durch vier Tangenten bestimmt, und zwar sind das die Normalen q_1, q_2 die in den Punkten P_1, P_2 auf Verbindungsgeraden PP_1, PP_2 nor-*

mal liegen, und die den Punkt P enthaltenden Normalen q_I, q_{II} der Tangenten PA, PB (Abb. 1).

Auf Grund dessen, was uns über den vierfachen Brennpunkt in beiden Fällen der Herleitung bekannt ist, ist es möglich gleich auch den Brennpunkt F der Parabel q zu bestimmen.

Es ist leicht die Umkehrung von diesen Sätzen zu zeigen, die dann die Verbindung in entgegenesetzter Richtung herstellt ($k_n^3 \rightarrow \rightarrow k_c^3$). Wenn nämlich eine Parabel q und ein Pol P gegeben sind, ist es nötig, um einen Apparat der allgemeinen Inversion mit der gleichen Wirkung herzustellen, irgendwelche vier Tangenten der Parabel zu bestimmen, die vom Pol gleich entfernt sind. Die vier Fusspunkte P_i der den Pol enthaltenden Normalen, sind solche Punkte der Kurve k_n^3, die die Relation $\overline{PP_n} = \overline{PP_m}$ ($n \neq m$) befriedigen, und deshalb zwei von ihnen zur Bestimmung des Kreises c brauchbar sind. Die erwähnten vier Tangenten q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) werden wir so bestimmen, dass wir die gemeinsamen Tangenten irgendwelchen Kreises s mit dem Mittelpunkt P (*Abb.* 1) und der Parabel q finden. Irgendwelcher von den 6 Schnittpunkten dieser vier Tangenten kann man als Mittelpunkt O_1 des Kreises c annehmen, also, für jede Wahl der Entfernung vom Pol (Kreis s) werden 6 verschiedene Apparate für eine allgemeine Inversion bestehen. Alle vier Tangenten q_i sind nicht immer reell. Aber auch dann, wenn alle vier in Paaren konjugiert-imaginär sind, bestehen immer zwei reelle Schnittpunkte, so dass keine grösseren Schwirigheiten bei der Bestimmung des Kreises c entstehen können. Nach der Bestimmung des Kreises c ist es leicht den erzeugenden Kreis k (Abb. 1) [4] und die anderen, an die Kurve k_c^3 gebundenen Elemente zu bestimmen.

Wenn wir den Halbmesser des Kreises s (mit dem Zentrum in P) stetig ändern, werden auch alle 4 Tangenten stetig geändert, welche diesem Kreis und der Parabel q gemeinsam sind, und 6 ihrer Schnittpunkte $O_1, O_1^2, O_1^3, O_1^4, O_1^5, O_1^6$ werden dabei eine Kurve o beschreiben. Unsere Betrachtungen zeigen, dass wir jeden Punkt der Kurve o als Mittelpunkt O_1 des Kreises c nehmen können. Das bedeutet aber, dass wir dieselbe Kurve k_c^3 durch die allgemeine Inversion auf ∞^1 Weisen herstellen können. Wir werden die Kurve o näher untersuchen und aus ihrem Zusammenhang mit der Kurve k_c^3 werden auch manche ihrer Eigenschaften folgen.

2. Die Kurve o definieren wir als den geometrischen Ort der Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten der fixen Parabel q und der konzentrischen Kreise des Büschels mit dem Zentrum P. Für jeden Kreis dieses Büschels schneidet jede von solchen vier Tangenten die drei übrigen in den Punkten der Kurve o. Da durch jede Tangente der Parabel q ein Kreis s des gegebenen Büschels eindeutig bestimmt ist, sieht man, dass die erzeugte Kurve o 3-er Ordnung wird, und dies werden wir auch strenger beweisen. Es wird vorkommen, dass manche der gemeinsamen Tangenten in

Paaren konjugiert-imaginär sein werden, aber solche Paare schneiden sich in reellen Punkten, was eben bedeutet, dass sich die Kurve o teilweise in die Parabel hineinziehen kann, d. h. sie kann sie schneiden. Wenn wir zum Beispiel 2 reelle und 2 konjugiert-imaginäre Tangenten haben, bekommen wir 2 reelle und 2 konjugiert-imaginäre Schnittpunkte, was eigentlich nur die Tatsache illustriert, dass jede Gerade der Ebene die Kurve 3-er Ordnung wenigstens in einem reellen Punkt schneidet.

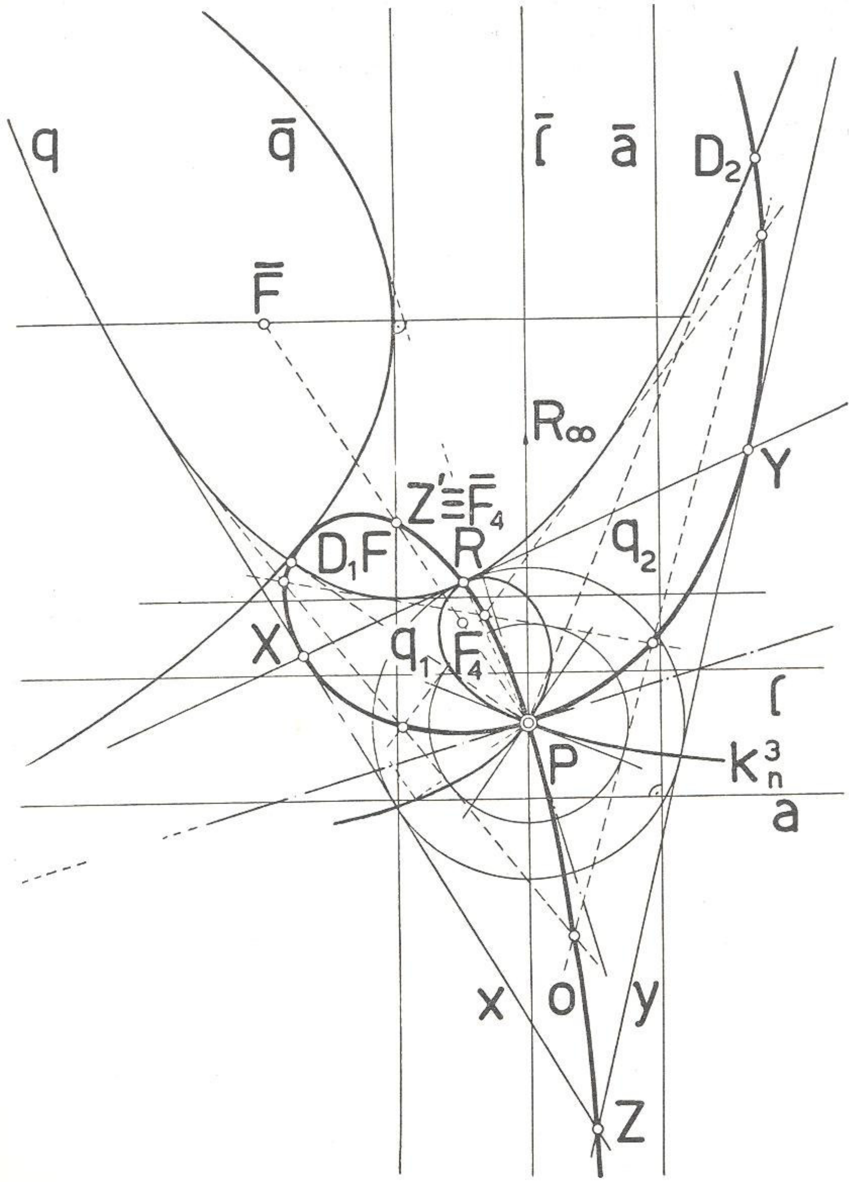

Abb. 2

Jedem Kreis des konzentrischen Büschels haben wir ein vollständiges Vierseit umbeschrieben, das aus seinen mit der Parabel gemeinsamen Tangenten gebildet wird. Wenn wir den Durchmesser des Kreises nach Null streben lassen, werden vier von den sechs Schnittpunkten O_1^i in einen Punkt P zusammenfallen und werden in diesem Punkt das Schneiden der Kurve o mit sich selbst verursachen, während die übrigen zwei Schnittpunkte die Berührungspunkte D_1, D_2 derjenigen Tangenten q_1, q_2 werden, die aus dem Punkt P auf die Parabel q gezogen sind. Das umbeschriebene Vierseit artet hier in zwei Geraden des Punktes P aus. Diese zwei Geraden müssen wir aber als doppeldeutig betrachten (*Abb.* 2).

Wir haben gesehen, dass die Kurve o 3-er Ordnung sein könnte. Um dies zu beweisen, müssen wir beweisen dass sie durch irgendeine Gerade m in drei Punkten geschnitten wird. Wählen wir auf der Geraden m einen Punkt M und ziehen gleichzeitig die ihn enthaltenden zwei Tangenten der Parabel q. Durch diese Tangenten sind zwei Kreise m_1, m_2 des Zentrums P bestimmt, die die Gerade m in den Punkten M_1, M_1' auf dem Kreis m_1 und in den Punkten M_2, M'_2 auf dem Kreis m_2 schneiden. Man nehme weiterhin an, dass auf diese Weise die Punkte M_1, M'_1, M_2, M'_2 dem Punkt M ein-vierdeutig zugeordnet sind, aber so, dass die Punkte in dem zweiten System (die Schnittpunkte mit den Kreisen) in Paaren symmetrisch liegen bezüglich des Fusspunktes N der den Pol enthaltenden Normale an die Gerade m. Falls der Punkt M ein Punkt der Kurve o ist, werden die obigen zwei Tangenten der Parabel einen Kreis mit dem Mittelpunkt im Pol P bestimmen, und zwar so, dass die Punkte M_1, M_2 sowie auch die Punkte M_1', M_2' zusammenfallen. Da diese Punkte die Punkte des gleichen Systems in der erwähnten Verwandschaft sind, sind sie keine Doppelpunkte, sondern sogenannte Verzweigungspunkte. Für diese Punkte gilt auch weiterhin die Symmetrie bezüglich des Punktes N. Die Zahl derartiger Punkte kann durch die Relation $2n\,(n_1 - 1)$ [8] gefunden werden. In unserem Fall gilt also $2 \cdot 1\,(4 - 1) = 6$, also drei Kreise, bzw. drei Punkte der Kurve o liegen auf der Geraden m.

Bekanntlich kann man aus jedem Punkt der Ebene (also auch aus dem Punkt P), ausser aus dem unendlich fernen Punkt R_∞, wenigstens noch eine (wenn nicht drei) reelle Normalen auf die Parabel q ziehen. Diese Normale wird die Parabel in einem Punkt R schneiden, der als derjenige Punkt zur Fusspunktkurve k_n^3 gehört, in welchem diese Kurve die Parabel q berührt [1]. Wir können daraus schliessen, dass in dem Büschel konzentrischer Kreise ein solcher Kreis mit dem Halbmesser $\overline{PR}$ besteht, der im dem Punkt R mit der Parabel eine gemeinsame Tangente hat. Das beschriebene Vierseit artet jetzt in ein Dreiseit aus dessen eine Seite (die Tangente im Punkt R) als doppeldeutig angenommen werden muss. Hieraus folgt, das 4 der 6 Schnittpunkte O_1^i zwei und zwei in die

Punkte X, Y (*Abb.* 2) zusammenfallen, und die übrigen zwei Seiten des Dreiseits, d. h. die gemeinsamen Tangenten der Parabel und des Kreises mit dem Halbmesser $\overline{PR}$, werden zugleich die Tangenten x, y der Kurve o in den Punkten X und Y. Der Punkt R und noch ein Punkt Z bleiben zwei gewöhnliche Schnittpunkte. Die geometrischen Eigenschaften der Parabel zeigen zugleich, dass der Kreis in unserem Büschel mit dem Halbmesser $\overline{PR}$ das reelle Gebiet von dem konjugiertimaginären für ein Paar des zugeordneten Tangentenwurfes teilt.

Machen wir nun dasselbe für den unendlich fernen Punkt R_∞ der Parabel q. Da wir in diesem Fall in dem Büschel der Kreise den Kreis mit unendlich grossem Halbmesser nehmen müssen, wird dieser Kreis selbst eine unendlich ferne Gerade, und zugleich wird er die gemeinsame Tangente dieses Kreises und der Parabel in diesem Punkt R_∞. Das ist diejenige Doppelseite des dem oben analogen neuen Dreiecks $X'Y'Z'$, die man noch bestimmen muss. Die unendlich ferne Gerade, als Kreis angenommen, hat den Mittelpunkt irgendwo im Endlichen. Daraus folgt, dass jedes isotrope Geradenpaar diesen Kreis berührt, und das wird uns ermöglichen die zwei Seiten x' und y' unseres Dreiecks zu finden, die gemeinsame Tangenten dieses Kreises und der Parabel q sind. Offenbar sind dies die Tangenten der Parabel q, die die absoluten Punkte der Ebene enthalten, also sich im Brennpunkt der Parabel schneiden. Deshalb gilt $Z' \equiv F$. Da jede der Geraden x', y' in den absoluten Punkten X', Y' zwei Punkte der Kurve o enthalten, werden die Geraden x', y' auch die Tangenten dieser Kurve o, die sich in derem vierfachen Brennpunkt $\overline{F}_4$ schneiden. Es gilt deshalb $\overline{F}_4 \equiv F \equiv Z'$. Die Kurve o ist also zirkulär, enthält den Brennpunkt der Parabel q und hat in diesem Punkt ihren vierfachen Brennpunkt. Sie ist also eine Strophoide. Vom unendlich fernen Punkt R_∞ der Kurve o kennen wir die Richtung, die durch die Achse der Parabel q bestimmt ist. Um die genaue Lage der Asymptote zu bestimmen (und unabhängig davon auch die Tangenten im Doppelpunkt), werden wir die bekannte Tatsache benützen, dass die Strophoide die Fusspunktkurve irgendwelcher Parabel $\overline{q}$ ist, deren Pol P auf der Leitgerade dieser Parabel sich befindet [9]. Diese Leitgerade $\overline{l}$ ist uns bekannt, weil sie eine den Punkt P enthaltende Parallele mit der Asymptote der Kurve o (Richtung des Punktes R_∞) ist (*Abb.* 2). Auf Grund der Tatsache $\overline{PF}_4 = \frac{1}{2}\overline{PF}$ können wir den Brennpunkt der Parabel $\overline{q}$ bestimmen, durch welchen, nebst der Leitgeraden $\overline{l}$, diese Parabel bestimmt ist. Dieselbe Relation zeigt, dass die Scheitelpunkttangente der Parabel $\overline{q}$ in die Achse der Parabel q gefallen ist. Schliesslich bekommen wir, auf Grund aller bisherigen Betrachtungen den folgenden

Satz 2.1. *Die Fusspunktkurve k_n^3, einer Parabel q bei gegebenem Pol P kann durch die allgemeine Inversion des Kreises* *an einem Kreis auf* ∞^1 *Weisen ausgeführt werden, und alle* ∞^1 *Mittelpunkte* O_1^i *der Grundkreise* c_i *liegen auf einer Strophoide* o, *die als der geometrische Ort der Schnittpunkte der Gemeintangenten der Parabel* q *und je eines Kreises des konzentrischen Büschels des Zentrums* P *definiert ist. Die Kurve* o *hat mit der Kurve* k_n^3 *den gemeinsamen Doppelpunkt* P, *wie auch jeden Fusspunkt der aus dem Pol* P *auf die Parabel* q *gefällten Normale. Mit der Parabel* q, *hat diese Kurve ausser dem Punkt* R, *auch die Berührungspunkte* D_1, D_2 *derjenigen Tangenten gemeinsamen, die aus dem Pol an diese Parabel gelegt sind. Diese Kurve* o *enthält ausserdem ihren Brennpunkt* F, *in den auch der vierfach Brennpunkt* $\overline{F}_4$ *der Kurve* o *fällt. Durch die Punkte* P, R, D_1, D_2, F *und durch die absoluten Punkte* X', Y' *ist die Kurve* o *eindeutig bestimmt. Ausserdem ist diese Kurve* o *auch die Fusspunktkurve der Parabel* $\overline{q}$ *(mit demselben Pol), dessen Scheitelpunkttangente in die Achse der Parabel* q *fällt, und ihr Brennpunkt* $\overline{F}$ *ist von dieser Achse gleichweit entfernt wie der Pol* P, *nur auf der anderen Seite, und befindet sich auf der Verbindungsgeraden des Pols und des Brennpunktes* F *der Parabel* q. *Für alle vier so verbundene Kurven ist besonders charakteristisch, dass die Asymptoten der Kurven* k_n^3 *und* o *senkrecht stehen, ebenso wie die Achsen der Parabeln* q *und* $\overline{q}$. *Die Brenpunkte* $F \equiv \overline{F}_4$, F_4, $\overline{F}$ *dieser vier Kurven befinden sich auf einer Geraden des Pols* P.

Das Zusammenziehen der Kreise in dem konzentrischen Büschel mit dem Zentrum P führte uns zur Ausartung des beschriebenen Vierseits, das aus zwei sich schneidenden Geraden besteht, welche die aus dem Punkt P auf die Parabel q gezogenen Tangenten q_1, q_2 sind. Diese Ausartung und die Eigenschaften eines vollständigen Vierseits weisen darauf hin, dass diese zwei Tangenten und die Tangenten der Kurve o im Doppelpunkt P einen harmonischen Geradenwurf bilden, und da diese anderen Tangenten aufeinander senkrecht stehen (eine Eigenschaft der Strophoide [9]), folgt daraus, dass solche zwei Tangentenpaare die eingeschlossenen Winkel gegenseitig halbieren. Auf Grund der Annahme dass die Tangenten im Doppelpunkt der Kurve k_n^3 und die Tangenten q_1, q_2 zu einander senkrecht sind, folgt der

S a t z 2.2. *Die Tangenten im Doppelpunkt der Kurve* k_n^3 *und die diesen Punkt enthaltenden Tangenten der Kurve* o *bilden einen harmonischen Geradenwurf, und jedes dieser Geradenpaare halbiert den Winkel des anderen. Dasselbe gilt wörtlich auch für die zwei Tangentenpaare, die aus dem gleichen Doppelpunkt an die Parabeln* q, $\overline{q}$ *gezogen werden, deren Fusspunktkurven die Kurven* k_n^3 *und* o *sind.*

3. Man weiss, dass die Tangenten jeder Strophoide im ihrem Doppelpunkt auf einander senkrecht stehen [9]. Denn die Tangenten im Doppelpunkt der Kurve k_c^3 schliessen bei allgemeiner Inversion den Peripheriewinkel des Kreises k über derjenigen Sehne ein, die durch die Polare des Pols P bezüglich des Kreises c (*Abb. 1*) abgeschnitten wird. In unserem Fall ist dieser Winkel ein rechter, und so bekommt man auch folgenden

Satz 3.1. *Durch die allgemeine Inversion eines Kreises an einem anderem Kreis erhält man eine Strophoide, wenn der Mittelpunkt O_2 des erzeugenden Kreises k, der den Pol P enthält, auf der Polare des Pols bezüglich des Kreises c liegt.*

In diesem Fall wird die Kurve o keinen bedeutenden Änderungen unterliegen, nur wird jedes Tangentenpaar in den Doppelpunkten der beiden Kurven aufeinander senkrecht stehen, und nur dadurch wird der Satz 2.2 ergänzt.

Wird der Pol P auf die Achse der Parabel q gelegt, dann wird wegen der Deckung in der Achsensymmetrie aller Kreise des konzentrischen Büschels, und wegen der Achsensymmetrie der Parabel, die Achse der Parabel ein Teil des Erzeugnisses (Teil der Kurve o), die wir als die Gerade o^1 bezeichnen. Der Rest dieses Erzeugnisses wird ein Kegelschnitt o^2 sein, der auf Grund des im Punkt 2 Erwähnten zirkulär sein muss, und es ist demnach o^2 ein Kreis. Für diesen Kreis wird das Dreieck XYZ (*Abb.* 2) gleichschenklig, und die Seite XY fällt mit der Scheitelpunkttangente der Parabel q zusammen. Den Mittelpunkt dieses Kreises werden wir im Schnittpunkt derjenigen Normalen suchen, die in den Punkten X, Y, auf die übriggebliebenen zwei Seiten x, y, des Dreiecks XYZ gefällt sind (die Seiten x, y, sind die Tangenten der Kurve o^2). Auf Grund der Tatsache, dass die Scheitelpunkttangente einer Parabel, für den Pol in ihrem Brennpunkt, die Fusspunktkurve dieser Parabel ist, folgt, dass der Mittelpunkt des Kreises o^2 in den Brennpunkt F der Parabel q fällt. Dies ist im völligen Einklang mit den Betrachtungen, die im Punkt 2, im Zusammenhang mit dem unendlich fernen Punkt R_∞, durchgeführt sind, und dies umso mehr, als der Mittelpunkt des Kreises gleichzeitig dessen vierfacher Brennpunkt ist. Die Parabel $\bar{q}$, resp. ihr Tangentenbüschel wird in das gewöhnliche Geradenbüschel ausarten. Für die Fusspunktkurve k_n^3 ist bekannt, dass sie bei solcher Auswahl des Pols symmetrisch wird. Für die inverse Kurve k_c^3 wird meistens eine Symmetriebedingung verlangt, so dass die Mittelpunkte O_1, O_2 und der Pol P (damit auch der vierfache Brennpunkt F_4) auf einer Geraden liegen [4], was offenbar ist, denn nach der Definition der Kurve o (jetzt $o^1 + o^2$) kann jeder ihrer Punkte als Mittelpunkt O_1 angenommen werden, also auch der Geradenpunkt auf o^1. Da dies aber auch für die Punkte des Kreises o^2 gilt, ist klar, dass die erwähnte Bedingung nicht nötig ist. Es gilt also auch der folgende

Satz 3.2. *Damit die zirkuläre Kurve 3-er Ordnung, die durch die allgemeine Inversion erzeugt ist, symmetrisch wird, ist not-*

wendig und hinreichend dass die Achse der durch die Tangenten q_1, q_2, q_I, q_{II}, bestimmten Parabel (siehe den Satz 1.1) *den Pol P enthält.*

Um den Kreis k konstruktiv zu bestimmen, wenn der Kreis c und der Pol P gegeben sind, sind die Operationen umgekehrt auszuführen.

Wenn wir die Absicht haben durch die allgemeine Inversion die sogenannte gerade Strophoide [9] zu erzeugen, die in der Strophoidenmenge eine symmetrische Kurve ist, müssen die Bedingungen 3.1 und 3.2 gleichzeitig erfüllt sein, und dies führt uns zu der bekannten Tatsache, dass der Doppelpunkt der geraden Strophoide, der als Pol der Fusspunktkurve der Parabel aufgefasst werden soll, sich im Schnittpunkt der Leitgeraden und der Achse dieser Parabel befindet.

Falls der Pol auf die Parabel oder innerhalb ihrer fällt, hat die Kurve k_n^3 im Pol eine Spitze oder einem isolierten Doppelpunkt, und die Bedingungen für diesen Fall waren bei der allgemeinen Inversion schon früher bekannt [5]. Die Kurve o unterliegt auch jetzt keinen wesentlichen Änderungen. Nur wenn der Pol in den Brennpunkt der Parabel fällt, erkennt man aus den Eigenschaften dieses Brennpunktes und der Mittelpunkte der konzentrischen Kreise, dass die Kurve in die Achse o^1 der Parabel und in ein Paar isotroper Geraden des Pols ausarten wird.

Am Ende erwähnen wir noch (obwohl dies grundsätzlich nicht in dem Rahmen dieser Arbeit gehört) dass wir die Kurve o analog definieren können auch in demjenigen Fall, wenn wir als Grundkurve q eine Ellipse oder eine Hyperbel anstatt der Parabel nehmen. Analoge Betrachtungen zeigen, dass eine solche allgemeiner definierte Kurve o auch immer eine Strophoide sein wird.

LITERATUR:

[1] *R. Cesarec,* Analitička geometrija linearnog i kvadratnog područja, I dio, Školska knjiga, Zagreb, 1957,

[2] *H. Grassmann,* Projektive Geometrie der Ebene, II Band, II Teil, TBG, Leipzig und Berlin, 1927,

[3] *A. Grünwald,* Betrachtung von Fusspunktkurven in der Ebene und im Raume, Prag, 1906, Selbstverlag,

[4] *V. Niče,* Konstrukcija četverostrukog fokusa cirkularnih krivulja 3. reda i nekih 4. reda roda nultoga, Nast. Vjesnik, Zagreb, **51** (1943), 271—280,

[5] *V. Niče,* Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. Zagreb **278** (1945), 153—194,

[6] *D. Palman,* O jednoj vrsti ploha 3. reda sa 4 dvostruke tačke i o cirkularnim krivuljama 3. reda, Rad Jugosl. Akad. Znan. Umjetn. Zagreb **302** (1957), 145—170,

[7] *A. A. Savelov*, Ploskie krivye, FM, Moskva, 1960,
[8] *R. Sturm*, Liniengeometrie, I Teil, Leipzig, 1892.
[9] *H. Wielleitner*, Spezielle Ebene Kurven, GJG, Leipzig, 1908.

(Eingegangen am 3. V 1967.)

Mathematisches Institut
der Universität Zagreb

POVEZANOST DVAJU IZVOĐENJA RAVNINSKIH CIRKULARNIH KRIVULJA 3. REDA RODA NULTOGA

Branko Kučinić, Zagreb

Sadržaj

U članku se istražuje veza između nožišnih krivulja parabole i ravninskih cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga dobivenih poopćenom kvadratnom inverzijom. Način na koji se ova veza uspostavlja omogućuje i neke nove elemente u konstruktivnoj obradi takvih krivulja. S tim u vezi dokazuju se ovi teoremi:

Teorem 1.1. *Ako je dan aparat koji poopćenom inverzijom proizvodi cirkularnu krivulju k_c^3 3. reda roda 0, tj. ako je dan pol P i kružnice $c(O_1)$ i $k(O_2)$, pa s ovim i polara p i na njoj tačke P_1, P_2 (sjecišta s kružnicom c) i A, B (sjecišta s kružnicom k), moguće je formirati parabolu q za koju je, uz isti pol P, nožišna krivulja k_n^3 identična sa krivuljom k_c^3. Ova parabola određena je sa četiri tangente i to q_1, q_2, okomice u tačkama P_1, P_2 na spojnice PP_1, PP_2 i q_I, q_{II}, okomice u tački P na tangente PA, PB (Sl. 1).*

Teorem 2.1. *Nožišna krivulja k_n^3 parabole q uz dani pol P može se dobiti poopćenom inverzijom kružnice na kružnici na ∞^1 načina, a svih ∞^1 središta O_1^i temeljnih kružnica c_i leže na jednoj strofoidi o koja je definirana kao geometrijsko mjesto sjecišta zajedničkih tangenata parabole q i kružnica koncentričnog pramena s centrom u P. Krivulja o ima s krivuljom k_n^3 zajedničku dvostuku tačku P i svako nožište R okomice spuštene iz pola P na parabolu q, a s parabolom q, osim tačke R, ima zajednička još i dirališta D_1, D_2 tangenata povučenih iz pola na tu parabolu i prolazi i njenim fokusom F, kamo pada i četverostruki fokus $\overline{F}_4$ krivulje o. Tačkama P, R, D_1, D_2, F i apsolutnim tačkama X', Y' krivulja o je jednoznačno određena. Osim toga ona je i nožišna krivulja parabole $\overline{q}$ (uz isti pol), čija tjemena tangenta pada u os parabole q, a fokus $\overline{F}$ joj je od te osi udaljen koliko i pol P, samo s druge strane, i nalazi se na spojnici pola i fokusa F parabole q. Za sve četiri ovako povezane krivulje karakteristično je naročito, da su okomite asimptote krivulja k_n^3 i o, a isto tako i osi parabola q i $\overline{q}$, i da se fokusi $F \equiv \overline{F}_4, F_4, \overline{F}$ tih četiriju krivulja nalaze na jednom pravcu pola P.*

T e o r e m 2.2. *Tangente u dvostrukoj tački krivulje* k_n^3 *i isto takve tangente krivulje o čine harmonijsku četvorku pravaca i svaki takav par raspolavlja kutove što ih drugi par zatvara. To isto doslovce važi i za dva para tangenata povučenih iz iste dvostruke tačke na parabole* q *i* $\overline{q}$ *kojima su krivulje* k_n^3 *i o nožišne krivulje.*

T e o r e m 3.1. *Poopćenom inverzijom kružnice na kružnici dobit ćemo strofoidu ako središte* O_2 *generatorne kružnice* k, *koja prolazi polom* P, *leži na polari pola s obzirom na kružnicu* c.

T e o r e m 3.2. *Da cirkularna krivulja 3. reda dobivena poopćenom inverzijom bude simetrična, nužno je i dovoljno da postoji parabola određena tangentama* q_1, q_2, q_I, q_{II} *(vidi teorem* 1.1.) *čija os ide kroz pol* P.