GLASNIK MATEMATIČKI
Tom 4 (24) — No. 1 — 1969.

ПОЛЯРНО-ПОДЕРНЫЕ КРИВЫЕ И ПОВЕРХНОСТИ

Эдуард Краньчевич и **Бранко Кучинич**, Загреб

Введение. Циркулярные кривые $3^{\text{го}}$ порядка с двойной точкой (рода нуль) по большей части известны в литературе как подеры параболы. Таким образом можно получить и строфоиду, особенно интересную кривую $3^{\text{го}}$ порядка с таким свойством что четверократный фокус [8] находится на ней самой. При этом выходит

Лемма 1. *Пусть в плоскости даны парабола q и полюс P. Геометрическое место оснований перпендикуляров спущенных из полюса P на касательные к параболе q строфоида тогда и только тогда, когда полюс P на директрисе параболы q* [8].

Заметим, что помянутые перпендикуляры сочиняют пучок прямых с центром в полюсе P, и попытаемся дать одно подобное порождение строфоиды, независимое от выбора полюса P.

1. Во первых докажем верность следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть дано коническое сечение q и полюс P в его плоскости. Геометрическое место оснований перпендикуляров спущенных на прямые пучка (P) из их полюсов в отношении к коническому сечению q является строфоидой, несмотря на то где взят полюс P.*

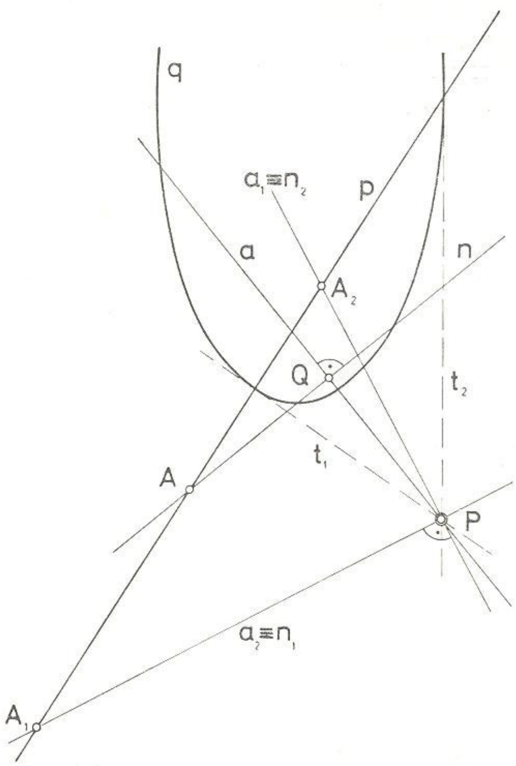
Что бы это доказать, заметим прежде всего что полюсы прямых пучка (P) лежат на поляре p полюса P относительно коническому сечению q. Совокупность прямых $a \in (P)$ пересекает бесконечно удаленную прямую s в ряде точек (s_1). Все прямые n, проходящие через полюсы A и перпендикулярные соответствующим прямым a (*черт.* 1), пересекают эту бесконечно удаленную прямую в некотором ряде (s_2). Пары соответственных точек этих совмещенных рядов сопряженные относительно к абсолютным точкам плоскости (вследствие ортогональности $a \perp n$), и так $(s_1) \overline{\wedge} (s_2)$. Как $(p) \overline{\wedge} (P) \overline{\overline{\wedge}} (s_1) \overline{\wedge}$

Ovaj rad je financirao Savezni fond za naučni rad i Republički fond za naučni rad SRH.

$\overline{\wedge}\,(s_2)$, то следствует из этой цепи перспективных расположений

$$(p)\,\overline{\wedge}\,(s_2)\,. \tag{1.1}$$

Каждой точке $A \leqslant (p)$ соответствует точка $A' \leqslant (s_2)$, а прямые соединяющие такие соответственные точки будут прямые n, которые вследствие соотношения (1.1) обмотают кривую второй степени, которая является параболой $\bar{q}$ потому что носитель ряда (s_2) бесконечно удаленная прямая s. Точки Q (*черт.* 1) (основания из теоремы 1) являются тоже точками подеры парабол $\bar{q}$ относительно к полюсу P, а это как из-



Черт. 1

вестно, циркулярная кривая 3$^{\text{го}}$ порядка с двойной точкой в полюсе P. Обозначим эту кривую k_s^3. В инволюции пар сопряженных прямых полюса P существует одна пара перпендикулярных прямых a_1, a_2. Их узнаем как оси симметрии углов между касательными t_1, t_2 исходящими из полюса P к коническому сечению q [4]. Легко узнать в прямых p, a_1, a_2 стороны автополярного тресторонника, и потому прямые a_1, a_2 одна другой нормали n_2, n_1, спущенные из их полюсов (*черт.* 1). Еще одним способом можно увидеть что полюс P двойная точка кривой k_s^3. Но значительнее что нормали $n_1 \equiv a_2$ и $n_2 \equiv a_1$ (так как и все другие помянутые нормали n) касательные к параболе q которой k_s^3 является подерой. Так как эти касательные между собой перпендикулярны, заключим что директриса параболы q проходит через полюс P, а согласно леммы 1 выходит, что кривая k_s^3 строфоида.

Тотчас видится более значительная и существенная разница такого вывода от обыкновенного вывода подер, потому что теорема 1 правильна для всех конических сечений, пока, например, подеры эллипса и гиперболы вообще не 3го порядка.

2. Возьмем случай когда базисное коническое сечение q (теорема 1) парабола. Заметим прямую $a \leqslant (P)$, паралельную к оси параболы q. Хотя эта прямая проходит через бесконечно удаленную точку B_∞ параболы q, ее полюс A лежит на бесконечно удаленной прямой, значит, это бесконечно удаленная точка прямой p. Перпендикуляр к прямой a, проходящий через точку A, тоже бесконечно удаленная прямая, и потому точка B_∞ точка кривой k_s^3. Прямая a, т. е. ось параболы, определяет направление асимптоты. Это направление, очевидно, ортогонально к направлению асимптоты подеры k_n^3 параболы q того же полюса P [8].

Легко видеть что кривая k_s^3 проходит через точки касания D_1 и D_2 касательных t_1 и t_2 к параболе q исходящих из полюса P и тоже проходит через основание R нормали к параболе q исходящей из полюса P. Если возьмем прямую $a^* \leqslant (P)$ проходящую через фокус F параболы q, то ее полюс A^* совпадает с точкой сечения прямой p и директрисой параболы. Так как инволюция пар сопряженных прямих пучка с центром в фокусе F относительно к параболе q циркулярна [4], то точка F является основанием перпендикуляра прямой a^*, проходящего через точку A^*. Это значит что кривая k_s^3 проходит через фокус F параболы q (аналогично можно видеть что оба действительных фокуса лежат на кривой k_s^3, когда коническое сечение q не парабола).

С прежде насчитаемыми элементами кривая k_s^3 определенная, и видится что она тождественная с так называемой o-кривой параболы q того же полюса P [2], которая определенная как геометрическое место точек сечения общих касательных параболы q и окружностей концентрического пучка с центром в P. Дальше, в [2] было показано что фокус F совпадает с четырёхкратным фокусом F_4 строфоиды $o \equiv k_s^3$.

Рассматривая кривую k_s^3 как о-кривую, легко видеть что строфоида k_s^3 будет так называемая симетрическая строфоида когда кривая q парабола, а полюс P лежит на прямой проходящей через фокус F и перпендикулярной к оси той же параболы. Вырождение (в прямую и окружность или в одну действительную прямую и в пару изотропных прямых) наступит тогда когда полюс P лежит на оси конического сечения q.

3. Эти рассматривания можем аналогично распространить в пространство. Пусть дана поверхность Φ^2 $2^{\text{ой}}$ степени и полюс P. Рассматриваем ли связку плоскостей $\{P\}$ полюса P, можем определить геометрическое место оснований перпендикуляров спущенных на плоскости связки $\{P\}$ из их полюсов относительно к поверхности Φ^2. Все эти перпендикуляры (их ∞^2, потому что ∞^2 плоскостей принадлежат связке $\{P\}$) определяют одну конгруэнцию Δ, и потому определенное геометрическое место — поверхность Φ_s, которая является подерной поверхностью (подеры) конгруэнции Δ относительно к полюсу P.

Что бы определить порядок поверхности осуществленной таким способом, прежде всего мы должны найти порядок и класс конгруэнции Δ. К данной поверхности Φ^2 и полюсу P заметим полярную плоскость π полюса P и коническое сечение $\Pi \equiv \Phi^2 \cap \pi$. Так как слово об ортогональном отношении, заметим дальше бесконечно удаленную плоскость ν и абсолютное коническое сечение в ней. Конгруэнция Δ, это совокупность ∞^2 прямых соединяющих полюсы плоскостей связки $\{P\}$ (все они лежат на плоскости π) и точек, которые соответствуют плоскостям связки $\{P\}$ в полярном отношении к абсолютному коническому сечению. Пересекаем связку $\{P\}$ плоскостями π и ν и в этих плоскостях получим поля $\{\pi\}$ и $\{\nu\}$, которые в перспективном соответствовании. Если присоединим полю $\{\pi\}$ в плоскости π относительно к коническому сечению Π полярное поле $\{\overline{\pi}\}$, а полю $\{\nu\}$ полярное поле $\{\overline{\nu}\}$ относительно к абсолютному коническому сечению в бесконечно удаленной плоскости, тогда получаем коллинеарное соответствие полей $\{\overline{\pi}\}$ и $\{\overline{\nu}\}$ как следствие перспективного соответствия полей $\{\pi\}$ и $\{\nu\}$. Последствие двух полей в коллинеарном соответствии конгруэнция $3^{\text{го}}$ порядка и $1^{\text{го}}$ класса [4], а конгруэнция Δ действительно такой является. Выставляя порядок и класс отметим конгруэнцию Δ с $\Delta\,(3, 1)$.

Подера конгруэнции $\Delta\,(3, 1)$ относительно к изабранному полюсу P будет вообще $7^{\text{го}}$ порядка [1]. Эта конгруэнция тоже и конгруэнция бипланар одной *кубической эволюты* плоскостей (это непрерывная совокупность ∞^1 плоскостей, последствие трех рядов точек в коллинеарном соответствии), которой принадлежат и плоскости π и ν [4]. Отметим эту эволюту с τ. В плоскостях кубической эволюты τ лучи конгруэнции порождают кривую $2^{\text{го}}$ класса [4], а в нашем случае, так как бесконечно удаленная плоскость принадлежит эволюте, эти кривые являются параболами. Кубическую эволюту, которой одна плоскость бесконечно удалена, назовем *параболической кубической эволютой*. В бесконечно удаленной плоскости ν, принадлежащей эволюте, существует тоже кривая h $2^{\text{го}}$ класса обмотанная лучами конгруэнции $\varDelta(3,1)$. Так как конгруэнция $3^{\text{го}}$ порядка, то через каждую точку плоскости ν проходит, кроме двух касательных к кривой h, еще одна луч конгруэнции, которая не лежит в плоскости ν. Все эти бесконечно удаленные лучи конгруэнции в целости пополнены основаниями плоскостей связки $\{P\}$ перпендикулярны к этим лучам. Но так как через каждую точку плоскости ν проходят два этих луча, то выходит что мы должны точки бесконечно удаленной плоскости в определении поверхности $\varPhi_s$ считать дважды. Это значит что из порядка 7 определенной поверхности мы должны вычитать 2. Заключаем что подера таким способом осуществленной конгруэнции $\varDelta(3,1)$ общая поверхность $5^{\text{го}}$ порядка, которая проходит через абсолютное коническое сечение. Назовем ее *сфероидной поверхностъю* $\varPhi_s^5$.

Поищем плоские сечения поверхности $\varPhi_s^5$ плоскостями ω_i кубической эволюты τ. Через произвольную точку такой плоскости проходят две касательные к параболе (лучи конгруэнции) и еще один луч, который в этой плоскости не лежит. Спустим перпендикуляр проходящий через полюс P к одной из плоскостей ω_i и заметим его основание N. Пучок плоскостей (PN) порождает в плоскости ω подеру параболы относительно к полюсу N. Между тем так как, и основания некоторых из остальных лучей конгруэнции $\varDelta$ которые не касательные к замеченной параболе падают в плоскость ω, то в каждой плоскости ω_i находится еще одно коническое сечение. Заключаем: *Все плоскости ω_i кубической эволюты τ пересекают поверхностъ $\varPhi_s^5$ в конических сечениях и еще в циркулярных кривых $3^{\text{го}}$ порядка с двойной точкой в основаниях N_i.* Эти конические сечения кстати говоря не представляют собой окружности, а в плоскости π находим такое коническое сечение $\varPi$. Циркулярная кривая $3^{\text{го}}$ порядка в плоскости π является именно строфоидой типа k_s^3.

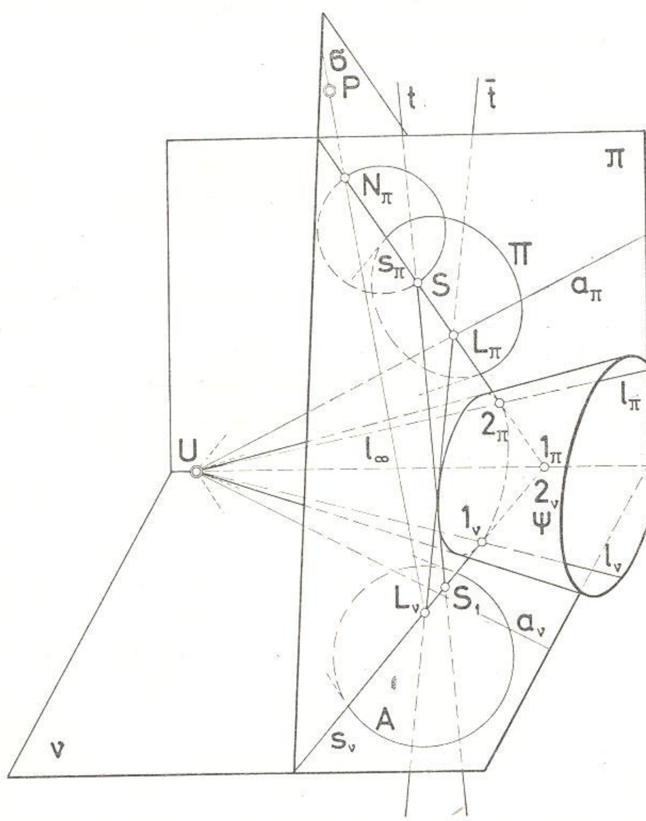
Так как плоскости кубической эволюты τ составляют непрерывное множество ∞^1 плоскостей, то и все основания N_i будут составлять одну пространственную кривую. В самом деле, эта кривая является подерой параболической кубической эволюты τ относительно к полюсу P. Плоскости ω_i этой кубической эволюты высекают в бесконечно удаленной плоскости кривую k_∞^2 $2^{\text{го}}$ класса потому что бесконечно удаленная плоскость принадлежит эволюте. Полярно-взаимная кривая кривой $\bar{k}_\infty^2$ через абсолютное коническое сечение является кривой $\bar{k}_\infty^2$ $2^{\text{го}}$ порядка. Соединив точку P с точками кривой $\bar{k}_\infty^2$ получаем конус $(P, \bar{k}_\infty^2)$ $2^{\text{го}}$ порядка, образующие которого перпендикуляры спущенные именно из точки P на плоскости эволюты τ. Таким образом подера эволюты τ получается как продукт взаимно-однозначного соответствия множества плоскостей ω_i и образующих конуса $(P, \bar{k}_\infty^2)$. По отношению Шала [7] выходит что эта кривая $5^{\text{го}}$ порядка. Назовём ее k_n^5.

Стоит вопрос: будет ли кривая k_n^5 двойной линией поверхности Φ_s^5? Плоское пересечение поверхности Φ_s^5 с плоскостью типа ω_i вырождается в циркулярную кривую $3^{\text{го}}$ порядка рода нуль и коническое сечение, вследствие чего число двойных точек такой вырожденной плоской кривой $5^{\text{го}}$ порядка равно 7. Это значит что каждая из плоскостей ω_i касательная плоскость поверхности с точками касания в некоторых из этих 7 двойных точек ($N_i + 6$ точек сечения конического сечения и кубической кривой). Если бы двойные точки N_i стали точками касания, линия k_n^5 не была бы двойной линией поверхности. Это, между тем, не происходит, потому что каждая из плоскостей проходящая через некоторую из точек N_i пересекает поверхность Φ_s^5 в кривой которой точка N_i действительно является двойной точкой, хотя в точке N_i два основания даны определением поверхности. Следовательно, плоскоти ω_i являются касательными к плоскостям с точками касания в некоторых из помянутых 6 точек сечения, а кривая k_n^5 является двойной кривой поверхности.

Три луча конгруэнции $\Delta(3,1)$ и три плоскости кубической эволюты проходят через точку P поверхности Φ_s^5. В эту точку падают три раза основания N_i. Это значит что точка P является тройной точкой кривой k_n^5 а кроме того точка P тройная точка поверхности Φ_s^5. Дальше, это значит что конические сечения поверхности с каждой из этих трех плоскостей проходят через точку P.

4. Если в двух полях в колинеарном соответствии одна точка самосоответствующая, то последствие этих полей является конгруэнцией $\Delta(2,1)$ $2^{\text{го}}$ порядка и $1^{\text{го}}$ класса [4]. Что бы в нашем случае это произошло то полюсы линий пересечения одной плоскости из связки $\{P\}$ с плоскостями π и ν, которые определены прежде описанным способом, должны быть самосоответствующими. Это может случиться только в некоторой точке U бесконечно удаленной прямой плоскости π. Точка U тогда дает направление сопряженное ранее примеченной плоскости из связки $\{P\}$ относительно к коническому сечению Π. Это значит что эта плоскость проходит через центр L_π конического сечения Π. Одновременно, полярное соответствие относительно к абсолютному коническому сечению дает ортогональное отношение не только для конического сечения Π, а для целой замеченной плоскости, и это можно осуществить только в случае когда эта плоскость является плоскостью симетрии (черт. 2). Следовательно тому, если полюс P возьмем в одной из плоскостей симетрии поверхности Φ^2, то определенная поверхность является подерой конгруэнции $\Delta(2,1)$.

Эта поверхность кстати говоря $5^{\text{го}}$ порядка [1]. Но в последствии мы должны засчитать и бесконечно удаленную плоскость для следующего: конгруэнцию $\Delta(2,1)$ образовы-



Черт. 2

вают все касательные к одному конусу $2^{\text{го}}$ класса, которые пересекают одну замеченную касательную t из его касательных [4]. Касательная t пересекает плоскость ν в точке S_1 которая является центром перспективного соотвествия рядов (l_∞) (ряд точек бесконечно удаленной прямой плоскости π) и (l_ν) (прямая соответствующая прямой l_∞ в поле $\{\nu\}$). Все прямые пучка (S_1) в плоскости ν лучи конгруэнции, а каждая точка каждой из этих прямых является основанием, которое удовлетворяет определению поверхности. Потому следует что наша поверхность сфероидная поверхность $\Phi_s{}^4$ $4^{\text{го}}$ порядка.

Замеченный конус конгруэнции $\Delta(2,1)$ в самом деле параболический цилиндр, потому что его центр лежит в плоскости ν и потому что, кроме плоскости π, и плоскость ν его касательная плоскость. В каждой из касательных плоскостей этого параболического цилиндра Ψ существует пучок лучей конгруэнции с центром в точке G_i являющейся точкой пересечения с касательной t. Плоскости связки $\{P\}$, перпендикулярны к прямым пучка (G_i) высекают в такой замеченной касательной плоскости пучок прямых центра N_i в основании перпендикуляра спущенного из полюса P к этой плоскости. Последствием этих пучков является окружность, которой точки N_i и G_i диаметральны. В касательных плоскостях параболического цилиндра, кроме этой окружности, существует еще одно коническое сечение поверхности, и потому эти плоскости являются касательными плоскостями поверхности $\Phi_s{}^4$ с точкой касания в некоторых из четырех точек сечения конического сечения и окружности. И плоскость π одна из касательных плоскостей, а окружность в ней имеет диаметральные точки S (замеченный центр перспективного соответствия в плоскости π, т. е. точка сечения с касательной t) и N_π (основание перпендикуляра спущенного из полюса к плоскости π). В плоскости π еще существует и коническое сечение Π поверхности $\Phi_s{}^4$ (черт. 2).

Отметим с s_π в плоскости π, т. е. с s_ν в плоскости ν, следы плоскости симетрии σ в которой находится полюс P (черт. 2). Заметим что центр перспективного соответствия S_1 находится в плоскости ν и что прямые соединяющие пару соответствующих точек прямых l_∞ и l_ν проходят через S_1. Прямая l_ν в поле $\{\nu\}$ соответствует прямой l_∞ в поле $\{\pi\}$ [4]. Заметим в поле $\{\pi\}$ точку сечения 1_π следа s_π с прямой l_∞. Это по определению полюс следа a_π некоторой плоскости α из связки плоскостей $\{P\}$ относительно к коническому сечению Π. Так как этот полюс лежит на следу s_π, который является полярой точки U, то след a_π тоже должен пройти через точку U, через которую тогда проходит и след a_ν плоскости α в плоскости ν. Полюс следа a_ν относительно к абсолютному коническому сечению A точка 1_ν соответствующая точке 1_π. Через точку 1_ν должны проходить поляры всех точек следа a_ν, а и поляра точки U, т. е. след s_ν (черт. 2). Так как следу s_ν, кроме точки 1_ν, принадлежит и точка 1_π , то этот след представляет собой прямую соединяющую точки одной парой помянутых соответствующих точек и на этой прямой лежит центр S_1 перспективного соответствия. Аналогично заключаем что центр S перспективного соответствия лежит на следу s_π , и следовательно тому замеченная касательная лежит в плоскости симетрии σ.

Каждая из точек прямой t является точкой типа G_i (центр пучка лучей (G_i) и точка окружности поверхности Φ_s^4). Это значит что прямая t принадлежит поверхности и что в ее плоскостях можем найти еще и циркулярные пересечения 3го порядка. Специально интересно это исследовать именно в плоскости симетрии σ, которая, это очевидно, вместе плоскость симетрии поверхности Φ_s^4. Плоскость σ перпендикулярна к плоскостям цилиндра Ψ и пересекает их в касательных к параболе, которые все пересекают касательную t. Следовательно они лучи конгруэнции $\Delta\,(2,1)$. По определению поверхности Φ_s^4, в плоскости σ является подера такой параболы, т. е. полярно-подерная кривая сечения поверхности Φ^2 плоскостью симетрии σ, следовательно, одна строфоида типа k_s^3 с двойной точкой в полюсе P. Точки прямой t будут основания одной системы лучей конгруэнции которые не лежат в плоскости σ. Точка P тоже и двойная точка поверхности Φ_s^4. Действительно, по определению, в нее падают две точки поверхности, потому что существуют два луча конгруэнции проходящие через точку P, т. е. две касательные плоскости к цилиндру Ψ. В этих двух плоскостях окружность и коническое сечение имеют одну точку сечения в самом деле в точке P, а тоже и все остальные плоские сечения поверхности имеют на этом месте двойную точку. Строфоида k_s^3 в плоскости σ вместе и геометрическое место помянутых оснований N_i.

И каждая из остальных плоскостей пучка (t) пересекает плоскости цилиндра Ψ в касательных к одной параболе c_i. Плоскости связки $\{P\}$, перпендикулярных к касательным параболы c_i, принадлежат пучку (PM_i) где с M_i отметим основания перпендикуляров спущенных из полюса P на плоскости пучка (t). В этих плоскостях находим подеры параболы c_i, т. е. циркулярные кривые 3го порядка с двойной точкой в точках M_i. Действительно точки M_i двойные точки поверхности Φ_s^4 потому что через каждую из них проходят два луча конгруэнции (две касательные к параболе c_i) и основания плоскостей к ним перпендикулярных падают в то же место. Это значит что все точки M_i сочиняют двойную линию поверхности Φ_s^4, а это представляет собой окружность d, которой диаметральные точки полюс P и основание L перпендикуляра спущенного из полюса P к прямой t. Плоскость окружности d, перпендикулярна к прямой t, пересекает бесконечно удаленную кривую поверхности Φ_s^4 (распавшуюся в абсолютное коническое сечение A и одно коническое сечение c_∞) в одной из пар абсолютных точек в которых пересекаются конические сечения A и c_∞. Плоские сечения поверхности Φ_s^4 плоскостям параллельным к плоскости окружности d бициркулярные кривые $4^{\text{го}}$ порядка. Потому, в касательной плоскости γ к цилиндру Ψ, которая параллельна к плоскости окружности d, оба конических сечения являются окружностями.

Каждая из касательных плоскостей к параболическому цилиндру Ψ пересекает двойную окружность d в двух точках. В этих двух точках совпадают два из четырех точек сечения окружности и конического сечения, а остальные две точки сечения точки касания на поверхности Φ_s^4. Плоскости прямой t пересекают окружность d, кроме в основании L, еще в одной точке M_i, которая двойная точка кривой $3^{\text{го}}$ порядка поверхности Φ_s^4, полученной пересеканием такими плоскостями. Прямая t поверхности Φ_s^4 пересекает эту кривую $3^{\text{го}}$ порядка в точке L и в двух точках которые являются точками касания на поверхности такого пучка плоскостей.

Плоскость связки $\{P\}$ параллельна к плоскости π пересекает и плоскость π и плоскость ν в бесконечно удаленной прямой l_∞. Этой прямой принадлежит в плоскости π полюс L_π (центр конического сечения Π) относительно к коническому сечению Π, а в плоскости ν ей принадлежит полюс L_ν относительно к абсолютному коническому сечению. Прямая соединяющая $L_\pi L_\nu$ тоже луч конгруэнции $\Delta(2,1)$, который кроме того что проходит центром конического сечения Π, перпендикулярен к плоскости π. Это происходит из полярного соответствия относительно к абсолютному коническому сечению A. Луч t еще один замеченный луч конгруэнции $\Delta(2,1)$.

5. Пусть полюс P лежит на прямой соединяющей одной диаметральной парой круговых точек [3] поверхности Φ^2. Так как полюс и в этом случае лежит в плоскости симметрии поверхности Φ^2, то это определение не будет существенно различно от определения в **4**. Существенно заметит что коническое сечение Π теперь окружность.

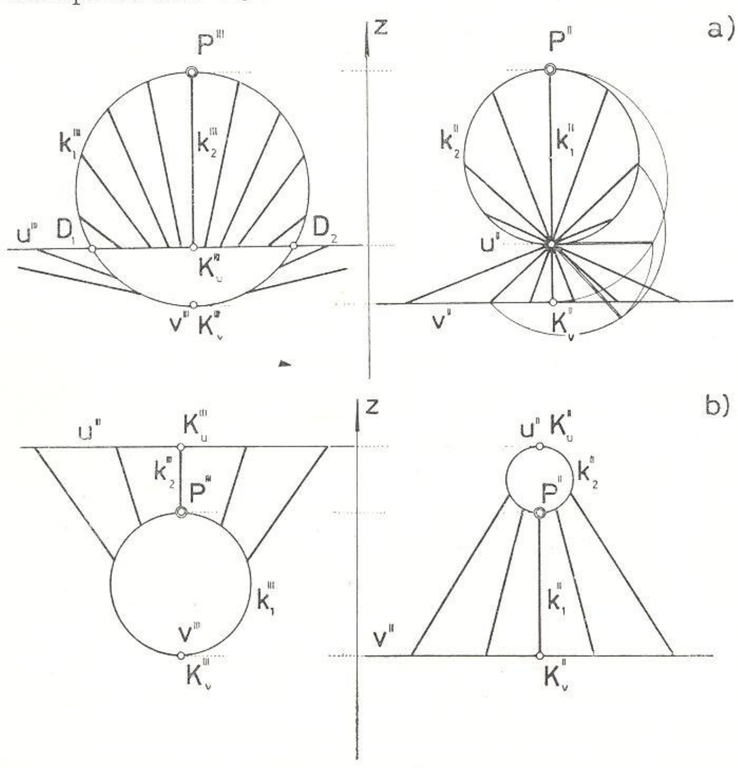
Возьмем произвольную точку E_π в поле $\{\pi\}$ на бесконечно удаленной прямой l_∞ (черт. 2). Эта точка принадлежит как полюс следа e_π одной из плоскостей связки $\{P\}$ относительно к коническому сечению Π. Каждый такой след e_π проходит через полюс L_π (центр окружности Π) и пересекает прямую l_∞ в некоторой точке E'. Точки E_π и E' являются сопряженной парой точек прямой l_∞ относительно к окружности Π. Так как коническое сечение Π окружность, то эта пара точек сопряженная и относительно к абсолютному коническому сечению в плоскости ν. В поле $\{\overline{\nu}\}$ можем найти точку E_ν, точке E_π соответствующую, если найдем полюс следа e_ν в плоскости ν относительно к абсолютному коническому сечению A. Следу e_ν принадлежит точка E'. Поляры всех точек следа e_ν сочиняют пучок прямых центра в искаемом полюсе E_ν. Согласно этому и поляра e' точки $E' \leqslant e_\nu$ проходит через полюс E_ν, но и через точку E_π, потому что E' и E_π представляют собой сопряженную пару точек относительно к абсолютному коническому сечению A. Это значит что прямая соединяющая $\overline{E_\pi\ E_\nu}$ (луч конгруэнции которому принадлежит центр S_1 перспективного соответсвия) представляет собой поляру e' точки E' относительно к абсолютному коническому сечению A, и потому проходит через полюс L_ν. Так как центр перспективного соответствия и дальше на следу s_ν (черт. 2), происходит что точки S_1 и L_ν совпадают. Аналогично, можем показать для точки S и L_π, а это значит что и замеченные прямые t и $\bar{t}$ конгруэнции $\Delta(2,1)$ совпадают в одну прямую t поверхности Φ_s^4. Эта прямая в центре L_π окружности Π перпендикулярна к плоскости π. Результат этого что плоскость двойной окружности d поверхности Φ_s^4 параллельна к плоскости π, а плоскость π является плоскостью γ параболического цилиндра Ψ, в которой бициркулярное сечение 4$^{\text{го}}$ порядка вырождается в две окружности.

6. Пусть поверхность Φ^2 вращательна, а полюс P точка в пространстве лежащая на оси вращения. В этом случае полюс всегда в плоскости симметрии, и потому поджидаем что и теперь получим конгруэнцию $\Delta(2,1)$. Кроме замеченного конического сечения Π в полярной плоскости π заметим тоже на поверхности Φ^2 ее бесконечно удаленное коническое сечение q_∞, которое касательно к абсолютному коническому сечению A в двух точках. Кривые Π и q_∞ пересекаются на бесконечно удаленной прямой l_∞ плоскости π. Прямая m, сопряженная прямой l_∞ относительно к поверхности Φ^2, проходит через полюс P и лежит в плоскости симметрии σ, определенной полюсом P и осью поверхности Φ^2. Прямая m является прямой пересечения касательных плоскостей к поверхности в бесконечно удаленных точках конического сечения Π. Бесконечно удаленной прямой o_∞ плоскостей всех круговых сечений поверхности Φ^2 (прямая соединяющая точки касания конических сечений q_∞ и A) сопряженная относительно к поверхности Φ^2 ось o этой поверхности. Так как ось o лежит в плоскости симметрии σ, полюс этой плоскости относительно к поверхности Φ^2 должен лежать одновременно на прямых l_∞ и o_∞, следовательно в их точке сечения U. Это значит что в полях $\{\bar{\pi}\}$ и $\{\bar{\nu}\}$ одна точка самосоответсвующая, а их последствием является конгруэнция $\Delta(2,1)$. Определенная поверхность Φ_s^4 сфероидная поверхность $4^{\text{го}}$ порядка с характеристиками исследованными в **4.**

7. В двух коллинеарно соответсвующих полях могут существовать две самосоответствующие точки. Тогда их последствие линеарная конгруэнция $\Delta(1,1)$ [4]. В нашем случае эти две самосоответствующие точки U и V могут лежат только на прямой пересечения полей $\{\bar{\pi}\}$ и $\{\bar{\nu}\}$, т. е. на прямой l_∞. В **4** мы заключили что точка U определяет направление сопряженное к плоскости симметрии σ, а это обусловило что полюс P должен находиться в плоскости симметрии. Здесь этому условию мы должни удовлетворит дважди, а это значит что полюс P должен находится на прямой пересечения плоскостей симметрии σ_u и σ_v, т. е. на одной из осей поверхности Φ^2. Так в этом случае полярно-подерная поверхность является подерой линеарной конгруэнции. Таким способом осуществленная поверхность является общей сфероидной поверхностью $3^{\text{го}}$ порядка [1].

Что бы исследовать характеристики этой поверхности (специально число действительных прямых и двойных точек), надо подробнее познакомиться с конгруэнцией $\Delta(1,1)$. Точки U и V прямой l_∞ действительны, и директрисам конгруэнции надо быть действительными. Следовательно, конгруэнция является *гиперболической*. Ось поверхности Φ^2, на которой мы выбрали полюс P, тоже одна из лучей конгруэнции, потому что проходит через центр конического сечения Π, т. е. через точку которая соответствует прямой l_∞ в поле $\{\bar{\pi}\}$. Эта ось тоже проходит и через точку L_ν которая является полюсом прямой l_∞ в поле $\{\bar{\nu}\}$. Это значит что директрисы u и v конгруэнции должны пересекать ось поверхности Φ^2, а должны проходить через точки U и V, которые самосоответствующие. Следовательно, они скрещивающиеся, взаимно перпендикулянрые и лежащие в плоскостях симметрии. В плоскости симметрии σ_u находим плоский случай полярно-подерной кривой вырождающейся в окружность и ось конического сечения (точ. 2). Окружность и здесь существует, пока ось поверхности не засчитаем, потому что она является совокупностью оснований пучка параллельных лучей с центром в точке U, а это часть конгруэнции $\Delta(3,1)$, которую мы должны отбросить что бы получить конгруэнцию $\Delta(1,1)$. Точка P является точкой такой окружности, пока в ее диаметральной точке K_v, находится центр пучка лучей конгруэнции, что следует из ортогонального отношения содержанного в определении полярно-подерной поверхности. Директриса u конгруэнции лежит в плоскости σ_u и это значит, что точкой K_v проходит директриса v. Аналогично, и точкой K_u в плоскости σ_v проходит директриса u. Так получаем подеру линеарной гиперболической конгруэнции, которой директрисы являются ортогональными между собой, а полюс P находится на их кратчайшей трансверзале (оси поверхности Φ^2). Легко заметить что поверхность полученная таким способом будет дважды симметрична — относительно каждой из плоскостей симметрии σ_u и σ_v.

В зависмости от вида поверхности Φ^2 и совмещения полюса P на её оси, может случиться что полюс P находится между точками K_u и K_v, основаниями кратчайшей трансверзали на директрисах u и v, или может полюс P пасть вне отрезка $K_u K_v$. Это, как покажется, получит два различных типа поверхностей Φ_s^3.



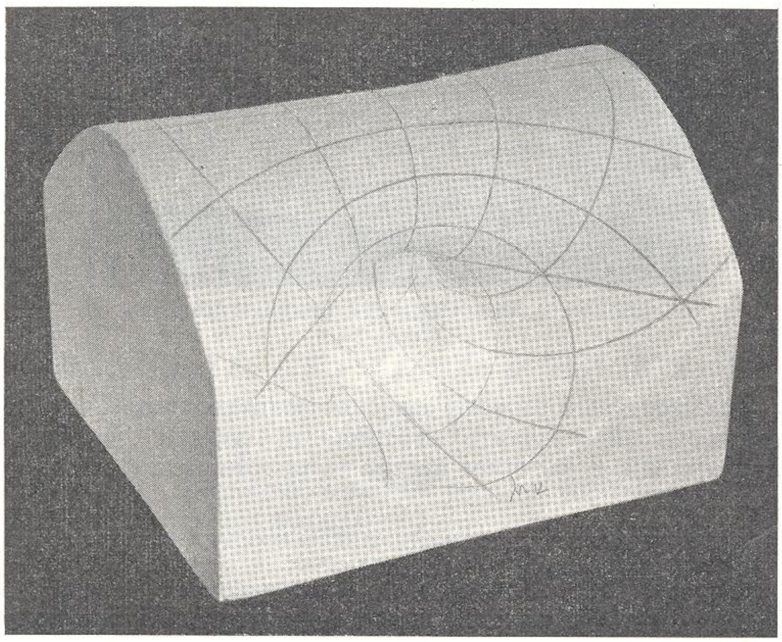
Черт. 3

В [1] показано что полюс P обыкновенная точка поверхности Φ_s^3 (это и здесь очевидно) и что прямые u, v и l_∞ прямые поверхности. В плоскости (u, l_∞) должна находиться третья прямая g, что бы получить действительный трехсторонник поверхности. В общем случае прямую g получаем как множество оснований на лучах пучка (V) в плоскости

(u, l_∞) [1]. Так как прямые u и v взаимно перпендикулярны, прямая g совпадает с прямой u, и потому выходит что прямая u двухзначна, а плоскость (u, l_∞) торзальна к поверхности Φ_s^3. Аналогично можем показать для прямой v и плоскость (v, l_∞). Это дает предугадать что на прямых u и v существуют двойные точки поверхности Φ_s^3. Вследствие этого исследуем плоские сечения поверхности плоскостям пучков (u) и (v) (черт. 3). В каждой из этих плоскостей, кроме торзальных, плоское сечение должно быть составлено из прямой u, т. е. v, и одной окружности. В плоскости симметрии σ_u, кроме прямой u, одна такая окружность k_1, а в плоскости симметрии σ_v прямая v и окружность k_2. Помянутые два различных положения полюса P и двойная симметрия поверхности Φ_s^3, причиняют отношения на черт. 3a, т. е. 3b, где две системы окружностей являются проектированными в замеченные отрезки прямых линий. Во всяком случае окружности из одного пучка плоскостей пересекают их ось (u или v) в тех же двух точках, действительных или сопряжено-мнимых, что показано помощью мощности окружности на черт. 3a в случае действительных точек сечения. Это значит, что на нашей поверхности существуют четыре двойные точки, из которых две действительные и две сопряжено-мнимые (в случае a), или все четыре мнимые (в случае b). Дальше заключаем, что прямые u и v (кроме действительной двухзначности) в самом деле являются четверозначными, и что прямые соединяющие эти четыре точки являются остальными четырьмя мнимыми четверозначными прямыми. Пока мы открыли три действительных прямых нашей поверхности, а засчитая многозначность всех прямых, получим 25 прямых поверхностей $(6 \cdot 4 + 1 = 25)$. Что бы удовлетворить условиям тресторонников и 10 точкам сечения одной прямой с остальнымы [6], осталось нам исследовать еще две обыкновенные прямые поверхности, которые должны пересекать прямую l_∞. Пучок (l_∞) параллельных плоскостей пересекает поверхность Φ_s^3 в прямой l_∞ и в конических сечениях которые не являются окружностями. Это верно тоже для плоскости (P, l_∞), а так как точка P является обыкновенной точкой поверхности, то коническое сечение g^2 должно пройти через эту точку. Потому что каждая из плоскостей пучка (l_∞) перпендикулярна к оси поверхности Φ^2, то помянутая двойная симметрия сохраняется и для конического сечения g^2. Что бы одно коническое сечение прошло через свой центр P, оно должно распасться в двух пересекающихся в точке P прямых g_1 и g_2, для которых плоскости σ_u и σ_v являются плоскостями симметрии их углов. Прямые g_1 и g_2 могут быть действительные или сопряжено-мнимые, зависимо от типа поверхности. Между тем, они никак не могут быть изотропные прямые, потому что абсолютные точки прямой l_∞ не являются двойными точками поверхности.

Вследствие лучшего замечения поверхности Φ_s^3 еще подчеркнём что действительные двойные точки D_1 и D_2 в случае a являются круговыми точками, что легко заметим на черт. 3а. Это значит что четыре мнимых четверозначных прямых в самом деле две пары изотропных прямых.

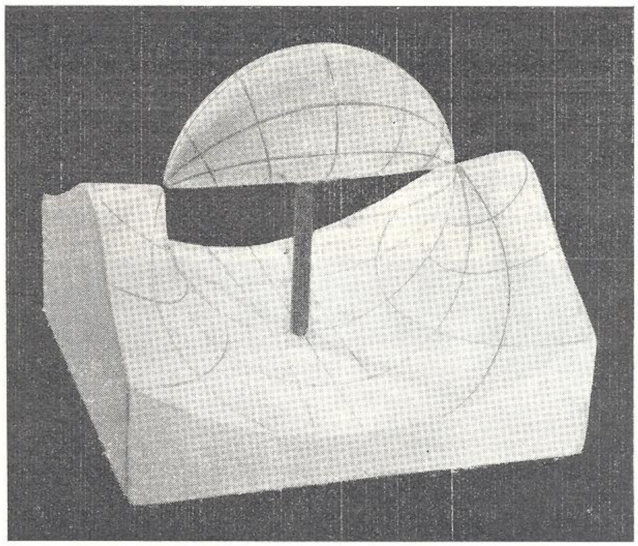
Кроме двух возможных положений полюса P на кратчайшей трансверзале, существует и смежное положение, когда полюс P находится на одной из директрис u или v. Такой вид поверхности знаком и исследован [5], а у нее две двойные точки мнимые и одна действительная двухзначная двойная точка в полюсе.



Черт. 4

Поверхность Φ_s^3 очень интересна визуально, потому что целая или большей частью стешнена между двумя параллельными торзальными плоскостями. Как легко заметить на черт. 4 и 5, можем поверхность Φ_s^3 считать циклыдой Дюпена.

8. Пусть поверхность Φ^2 вращательна, а полюс P лежит на оси вращения. Хотя сейчас каждая из плоскостей связки $\{P\}$ которой принадлежит ось поверхности Φ^2 симметральна, в нашем соответствии полей $\{\pi\}$ и $\{\nu\}$ будут все точки прямой l_∞ самосоответствующие и потому последствие этих полей вырожденная конгруэнция $\Delta(1, 0)$, т. е. связка прямых. Полярно-подерная поверхность теперь является шаром определенным окружностью Π и полюсом P. Это тривиально,



Черт. 5

если заметим что в каждой плоскости проходящей через ось поверхности Φ^2 существует плоский случай полярно-подерной кривой, в котором всегда вырождение в одинаковую окружность.

Прежние рассматривания о поверхностях можем собрать:

Теорема 2. *Полярно-подерная поверхность в* 3 *поверхности Φ^2 2ой степени относительно к выбранному полюсу P в общем случае сфероидная поверхность 5го порядка с двойной линией — пространственной кривой 5го порядка и тройной точкой в полюсе P. Если полюс выбранный в одной из плоскостей симметрии σ поверхности Φ^2, или если поверхность Φ^2 вращательна а полюс вне оси вращения, то полярно-подерная поверхность является сфероидной поповерхностью 4го порядка с двойной окружностью проходящей через полюс P. Поверхность в этом случае симметрическая относительно к той же плоскости σ. Если полюс выбранный в двух из плоскостей симметрии σ_u, σ_v поверхности Φ^2, т. е. на одной из осей поверхности Φ^2, то полярно-подерная поверхность является общей сфероидной поверхностью 3го порядка с четирьмя двойными точками, из которых две* *могут быть действительные, а две всегда мнимые. Эта поверхность дважды симметрическая. В случае когда полюс P находится на оси вращательной поверхности Φ^2 полярно-подерная поверхность является шаром.*

ЛИТЕРАТУРА:

[1] *E. Kranjčević*, Fusspunktfiächen der Linearkongruenzen, Glasnik Matematički **3** (**23**) (1968), 269—274,

[2] *B. Kučinić*, Über den Zusammenhang zweier Herleitungen ebener zirkulärer Kurven 3-er Ordnung vom Geschlecht Null, Glasnik Matematički **3** (**23**) (1968), 105—116,

[3] *V. Niče*, Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije, Rad JAZU Zagreb, **278** (**86**) 1945, 153—194,

[4] *V. Niče*, Uvod u sintetičku geometriju, Zagreb, 1956,

[5] *D. Palman*, Die Flächen 3. Ordnung mit vier Doppelpunkten, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. **9** (1954), 129—150,

[6] *T. Reye*, Die Geometrie der Lage, Bd III, Leipzig, 1910,

[7] *R. Sturm*, Liniengeometrie, Bd I, Leipzig, 1892,

[8] *H. Wieleitner*, Spezielle Ebene Kurven, Leipzig, 1908.

(Поступило 12. I 1968.)

Математический институт
Универзитета в Загребе

POLARNO-NOŽIŠNE KRIVULJE I PLOHE

Eduard Kranjčević i Branko Kučinić, Zagreb

Sadržaj

Kao prilog geometriji polarnih polja i polarnih prostora u članku se pokazuju ovi teoremi:

Teorem 1. *Ako je dana konika q i pol P u njenoj ravnini, geometrijsko mjesto nožišta okomica spuštenih na pravce pramena (P) iz njihovih polova s obzirom na koniku q je strofoida, bez obzira na to gdje je uzet pol P.*

Definicija. *Geometrijsko mjesto nožišta okomica spuštenih na ravnine svežnja {P} iz njihovih polova s obzirom na jednu fiksnu plohu Φ^2 2. stupnja je ploha, koju zovemo »polarno-nožišna ploha«.*

Teorem 2. *Polarno-nožišna ploha općenito je sferična ploha 5. reda s dvostrukom linijom — prostornom krivuljom 5. reda s trostrukom tačkom u polu P. Ako je pol izabran u jednoj simetralnoj ravnini σ plohe Φ^2, ili ako je ploha Φ^2 rotaciona a pol nije na osi rotacije, polarno-nožišna ploha je opća sferična ploha 4. reda s dvostrukom kružnicom koja prolazi polom P. Čitava ploha je u tom slučaju simetrična s obzirom na ravninu σ. Ako je pol izabran u dvije ravnine simetrije σ_1, σ_2 plohe Φ^2, tj. na jednoj njenoj osi, po-*

larno-nožišna ploha je opća sferična ploha 3. reda s 4 dvostruke tačke, od kojih dvije mogu biti realne, a dvije su uvijek imaginarne. Takva ploha je simetrična s obzirom na obje ravnine σ_1 *i* σ_2. *U slučaju kad se pol P nalazi na osi rotacione plohe* Φ^2 *polarno-nožišna ploha je kugla.*

Ovakve plohe detaljno se ispituju, a osim standardnih singulariteta, osobito njihovi raspadnuti ravninski presjeci, tj. pravci i konike.