

Originelle wissenschaftliche Arbeit  
 Angenommen 08. 10.1997

IVANKA BABIĆ, BRANKO KUČINIĆ

# Hyperbolische Perspektive I

*Dieser Artikel ist dem Herrn Prof. Akademiker Dr. sc. S. Bilinski gewidmet, weil er in unseren Kreisen die Forschungen über das Projizieren im hyperbolischen  $H^3$ -Raum initiierte und weil er unser Professor war.*

## Hyperbolic Perspective I

### ABSTRACT

In the hyperbolic space the central projection is considered, adjusted to the perspective, by defining the image plane and centre of projection, and the reference plane perpendicular to the image plane. This is the analogy of the so called piercing point method in the Euclidean space supplemented by indefinitely distant elements. The analogue of the method of Monge in  $H^3$ -space realised on M-model enables necessary constructive procedures. The position and metric relations associated with the reference plane are also worked out thoroughly. Thus, the whole procedure is prepared to be applied.

Basic differences from the perspective of Euclidean space are: h-horizon is hyperbola, there is avoidable hyperbola instead of avoidable line, and the pencils of parallel lines in the plane (1 can be projected into the elliptic, parabolic and hyperbolic pencils (Theorem 3).

### Keywords:

hyperbolic space, H-model, central projection, perspective, piercing point method

## Hyperbolička perspektiva I

### SAŽETAK

U hiperboličkom prostoru razmatra se centralno projiciranje, prilagođeno za perspektivu, tako da se definira ravnina slike i centar projiciranja, te osnovna ravnina okomita na ravninu slike. Ovo je analogija tzv. metode probodišta u euklidskom prostoru nadopunjenom neizmjereno dalekim elementima. Analogon Mongeove metode u  $H^3$ -prostoru ostvaren na M-modelu omogućuje potrebne konstruktivne postupke. Razrađeni su položajni i metrički odnosi vezani uz osnovnu ravninu. Time je čitav postupak pripremljen za primjenu.

Osnovne razlike od perspektive euklidskog prostora su: h - horizont je hiperbola, postoji *izbježna hiperbola* umjesto izbjeznog pravca, a pramenovi paralelnih pravaca ravnine  $P_1$  mogu se preslikati u eliptičke, paraboličke ili hiperboličke pramenove (Teorem 3).

### Ključne riječi:

hiperbolički prostor, M-model, centralna projekcija, perspektiva, metoda probodišta

In dieser Arbeit wird das Problem der Konstruktion einer Perspektive im M-Modell des hyperbolischen  $H^3$ -Raumes erforscht. Das Grundziel der Arbeit ist die Perspektivbilder von der Reel-objekten zu konstruieren, die auch selbst reelle Bilder sind. Die Methode, wodurch das erreicht wird, ist die Durchschnittsmethode. Damit die Zentralprojektion zur Perspektive wird, soll man die Elemente für die Konstruktion des perspektivischen Bildes auf einer Bildebene so organisieren, daß die Eindeutigkeit erreicht wird. Eine Perspektive entsteht dabei wie im euclidischen Raum durch Projektion eines Objekts aus einem Punkt auf eine Bildebene. Dabei werden die Ergebnisse über die Zentralprojektion aus [8] und [9], über die darstellende Geometrie im hyperbolischen  $H^3$ -Raum aus [1], [3], [4] und über das M-Modell aus [2] benützt.

Es sei im  $H^3$ -Raum ein Paar zueinander senkrechten – Ebenen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  und ein eigentlicher Punkt  $O$  als Projektionszentrum ( $O \notin \Pi_1, O \notin \Pi_2$ ) angegeben.  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  werden als Grundriß bzw. Aufrißebene für die Mongeer Methode gemäß [1], [3], [4] verwendet. Weiters bezeichnen wir  $\Pi_1$  auch als Grundebene und  $\Pi_2$  ist die Bildebene für die Zentralprojektion. Damit wird die Zentralprojektion eines Raumteiles auf die Bildebene bzw. Aufrißebene  $\Pi_2$  eindeutig definiert, die analog zur Durchschnittsmethode im euclidischen Raum ist [7].

Die Projektionsstrahlen, die die Bildebene in den eigentlichen Punkten durchstoßen, bilden das Innere des Parallelkegels  $\Phi$ , dessen Spitze das Projektionszentrum  $O$ , der sogenannten Augpunkt, der Perspektive ist. Der Abstand  $d$  des Zentrums  $O$  von der Bildebene  $\Pi_2$  ist die Paralleldistanz (Abb.1.: im Profil die Ebene  $\Gamma$ ). Das bedeutet, daß nur von solchen Objekten die sich innerhalb des Parallelkegels  $\Phi$  befinden, ein reelles Bild existiert. Wegen der Eindeutigkeit soll die Seite des Parallelkegels  $\Phi$ , die gegensätzlich der Ebene  $\Pi_2$  in

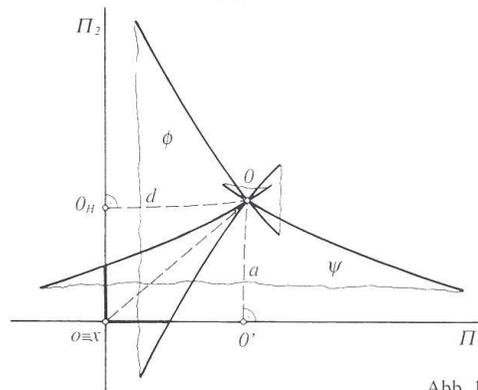


Abb. 1

bezug  $O$  ist, vernachlässigt werden. Analog zum euklidischen bezeichnet man den Parallelkegel  $\Phi$  als *Verschwindungskegel*, weil seine ganze Oberfläche auf die Grenzpunkte der Bildebene  $\Pi_2$  projiziert wird.

Analog gibt es einen Parallelkegel  $Y$  aller Parallelen zu  $P_1$  mit der Spitze  $O$  und der Distanz  $a$  zu  $P_1$ . Die Erzeugende von  $Y$  projizieren die Grenzpunkte der Grundebene  $P_1$ . Auch hier soll die Seite des Parallelkegels  $Y$ , die gegensätzlich der Ebene  $P_1$  in bezug  $O$  ist, vernachlässigt werden. Für die weitere Untersuchungen ist es wichtig die Schnittkurve des Parallelkegels  $Y$  mit der  $P_2$ -Ebene zu bestimmen.

**Definition**

Die Schnittkurve des Parallelkegels  $\Psi$  und der Bildebene  $\Pi_2$  nennt man die *h - Horizont*.

Das ist die Menge der Punkte der  $P_2$ -Ebene, die die perspektivischen Bilder von den Grenzpunkten der Ebene  $P_1$  sind. Diese Schnittkurve ist offensichtlich ein Hyperbelast  $h$ , wobei der andere Ast dieser Hyperbel reell sein kann oder nicht. Sie hat jedoch keinerlei Bedeutung, da die andere Seite des Parallelkegels  $Y$  vernachlässigt wird.

Die wichtige Rolle hat auch die Schnittkurve des Verschwindungskegels  $\Phi$  mit der  $\Pi_1$ -Ebene. Man kann beweisen, daß diese Kurve auch eine Hyperbel ist.

**Definition**

Die Schnittkurve des Verschwindungskegels  $\Phi$  und der Grundebene  $\Pi_1$  nennt man die *Verschwindungshyperbel* und bezeichnet man mit  $i$ .

Die Verschwindungshyperbel  $i$  ist die Menge von den Punkten der  $P_1$ -Ebene, deren perspektivischen Bilder die Grenzpunkte der Bildebene  $P_2$  sind.

Die Grundfläche von Objekten mit reellen perspektivischen Bilder müssen im Innern der Verschwindungshyperbel  $i$  liegen.

Der reelle Schnitt der Parallelkegel  $\Phi$  und  $\Psi$  mit der gemeinsamen Spitze  $O$  besteht aus zwei Erzeugenden durch  $O$ , die parallel zur  $x$ -Achse sind (Abb. 1).

Zusammenfassend gilt:

Jedes Objekt bzw. jeder Punkt  $A$ , der im Innern des Parallelkegels  $\Phi$  liegt, wird durch den Strahl  $AO$  projiziert, wobei das perspektivische Bild  $A_c$  der zweite Durchstoßpunkt des Projektionsstrahles  $AO$  mit der Bildebene  $\Pi_2$  ist. Das perspektivische Bild eines Punktes kann man auch erhalten, indem man zuerst seinen Grundriß abbildet und dann auf dem Bild einer zu  $\Pi_1$  normalen Geraden die entsprechende Höhe aufträgt. Um eine Projektion komplizierteren Gebilden zu konstruieren, wird das Auftragen der Höhen benötigt. Die Höhen befinden sich an den Geraden eines hyperbolischen Geradenbündels, die die Grundebene  $\Pi_1$  als Basis haben, und deren erste Durchstoßpunkte, aber innerhalb der Verschwindungshyperbel  $i$  sein sollen.

Im  $M$ -Modell [2] wird das hyperbolische  $H^3$ -Raum in der Möbius-Ebene auf folgende Weise interpretiert:

Die Kreise und die Geraden der Möbius-Ebene sind die Randbilder der Ebenen des  $H^3$ -Raumes.

Die Paare verschiedener Punkte der Möbius-Ebene sind die Bilder der Grenzpunkte der Geraden des  $H^3$ -Raumes. Ein geordnetes Punkttripel der Möbius-Ebene bestimmt das Bild eines Punktes auf der Trägergeraden des  $H^3$ -Raumes, wobei die erste zwei Punkte die Bilder der Grenzpunkte dieser Trägergeraden sind.

Die Inzidenz ist im gewöhnlichen Sinne: eine Gerade gehört der Ebene an, wenn ihre Grenzpunkte mit dem Randbild der Ebene inzident sind.

Wir betrachten das Analogon der Mongeer Methode des orthogonalen Projizierens auf ein Paar zueinander senkrechten Ebenen  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  im  $M$ -Modell [1], [3], [4]. Eine so realisierte konstruktive Bearbeitung des  $H^3$ -Raumes läßt die Konstruktionen mit dem euklidischen Lineal und dem Zirkel zu.

Die Bildebene  $\Pi_2$ , die Grundebene  $\Pi_1$ , die senkrecht zur  $\Pi_2$ -Ebene ist, und der Augpunkt  $O$ , wurden auf dem Bild 1a, im  $M$ -Modell dargestellt. Die Schnittgerade der Grundebene  $\Pi_1$  und der Bildebene  $\Pi_2$  ist die Spurgerade  $o \equiv x$  von der Ebene  $\Pi_1$ . Die von den Normalen auf  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  durch  $O$  aufgespannte Ebene  $\Gamma$  schneidet die Ebene  $\Pi_1$  längs der Geraden  $g_l$  und die Ebene  $\Pi_2$  längs der Geraden  $g_c$ .  $g_l$  ist senkrecht zur Spurgeraden  $o \equiv x$  durch den Grundriß  $O'$  des Augpunktes  $O$ .  $g_c$  ist senkrecht auch zur Spurgeraden  $o \equiv x$  durch den Aufriß  $O'' \equiv O_H$ , den sogenannten Hauptpunkt.

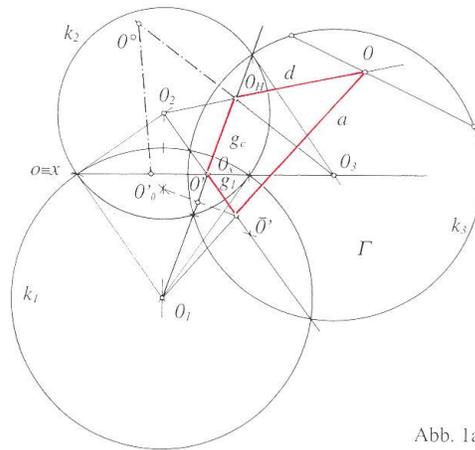


Abb. 1a

Nach der Rotation der Grundebene  $\Pi_1$  um die Spurgerade  $o \equiv x$  in die Bildebene  $\Pi_2$  nach dem dargestellten Verfahren in [3], liegen die Punkte  $O'$  und  $O_H$  auf derselben Geraden  $g_c \equiv g_l$  der Bildebene. Wahre Länge der Distanzen  $d$  und  $a$  sind auf dem umgeklappten Lambertier Viereck  $OO''O'_H$  in die Bildebene  $\Pi_2$  zu sehen, dabei gilt:

$$d_o = O_o O_H \quad a_o = O_o O_o' \quad (\text{Abb. 1a}).$$

Die Verschwindungshyperbel  $i$  wird so konstruiert, daß man die ersten Durchstoßpunkte der Kegelerzeugende  $\Phi$  nach der Konstruktionen in [3] bestimmt. Da es sich um einen Verschwindungskegel handelt, deckt sich der Aufriß seiner Basis mit  $k_2$  (Abb.2). Die Achse dieses Kegels ist zu  $\Pi_1$  überparallel und seine vier Erzeugende sind zu  $\Pi_1$  parallel (mit der Distanz  $a$ ). Die Grenzpunkte der zweien zur  $x$ -Achse parallel Erzeugenden sind gleichzeitig die reellen zwei Grenzpunkte des Kegelschnitts  $i$ , der noch zwei verschiedene Grenzpunkte hat. Daraus geht hervor, daß diese Kurve 2. Ordnung gemäß [5] eine Hyperbel ist.

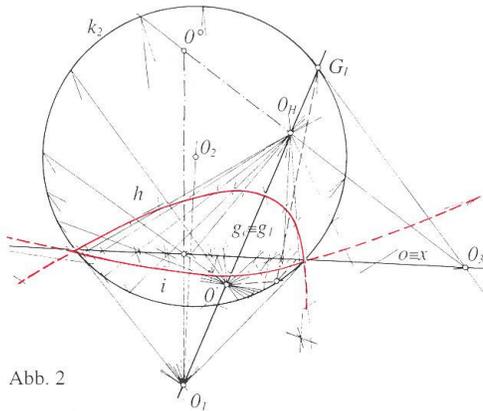


Abb. 2

In der Bildebene wird der  $h$ -Horizont so bestimmt, daß die zweiten Durchstoßpunkte der Kegelerzeugende  $\Psi$  auf Grund [3] konstruiert werden (Abb.2). In diesem Fall ist der Grundriß der Kegelbasis  $\Psi$  mit der Bildebene  $\Pi_2$  gedeckt.

**GERADEN DER GRUNDEBENE  $\Pi_1$**

In der Grundebene  $\Pi_1$ , die gleichzeitig die Grundrißebene ist, sollen die Geraden hervorgehoben werden, die zur Spurgeraden  $o=xi$  senkrecht sind und die Mengen der Geraden, die überparallel zur Spurgeraden  $o=xi$  sind. (Abb.3).

Die Geraden, die zur Spurgeraden  $o=xi$  senkrecht sind, bilden ein hyperbolisches Geradenbüschel, deren Geraden die  $p$ -Geraden genannt werden und den Falllinien in der Ebene analog sind [3]. Das Perspektivbild jeder von diesen Geraden bekommt man so, daß durch diese  $p$ -Geraden und den Augpunkt  $O$  eine Hilfsebene gelegt wird. Jede solche Ebene ist zur Bildebene  $\Pi_2$  senkrecht und das ist eine sogenannte zweitprojizierende Ebene. Ihre Schnittgerade mit der Ebene  $\Pi_2$  ist der zweite Spurgerade dieser Ebene, die das Perspektivbild der  $p$ -Geraden enthält. Alle diese Ebenen bilden ein Ebenenbüschel, dessen Träger die Gerade  $OO_1$  ist, die durch den Augpunkt  $O$  und den Scheitelpunkt  $O_1$  des  $p$ -Geradenbüschels verläuft. Alle zweite Spurgeraden dieser Ebenen bilden ein elliptisches Geradenbüschel in der Bildebene  $\Pi_2$ , dessen Scheitelpunkt der Punkt  $O_H$  ist (wegen  $OO_H \perp \Pi_2$ ). Jeder von diesen zweiten

Spurgeraden schneidet die Spurgerade  $o=xi$  in einem Punkt, der der Durchstoßpunkt der zugehörigen  $p$ -Geraden mit der Bildebene  $\Pi_2$  ist. Dem nach kann das perspektivische Bild jeder von den  $p$ -Geraden so bestimmt werden, daß durch ihren Durchstoßpunkt, zum Beispiel  $P \in o=xi$ , und durch den Punkt  $O_H$  die  $p_c$ -Gerade aufgestellt wird. Der Schnittpunkt  $P_H$  auf diese Weise gewonnenen  $p_c$ -Geraden mit der  $h$ -Horizont ist das Perspektivbild einer von den Grenzpunkten der  $p$ -Geraden. Der Schnittpunkt  $K$  der  $p_c$ -Geraden mit dem Randbild der Bildebene  $\Pi_2$  ist der Durchstoßpunkt dieser  $p$ -Geraden mit der Verschwindungskegel  $\Phi$ . Das perspektivische Bild des Teiles der  $p$ -Geraden vom Punkt  $K$  außerhalb des Parallelkegels  $\Phi$  ist uneigentlich (ideell)

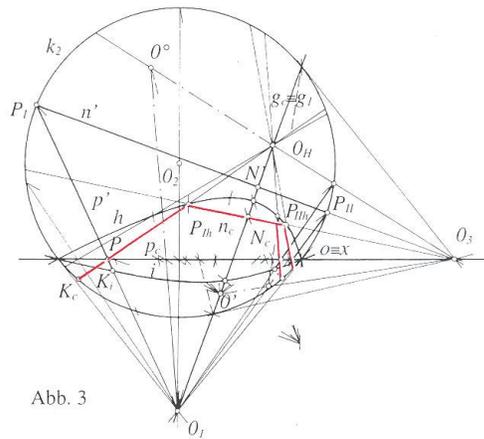


Abb. 3

**Theorem 1**

Das perspektivische Bild des Büschels der überparallelen  $p$ -Geraden der Ebene  $\Pi_1$  ist ein elliptisches Geradenbüschel, dessen Scheitelpunkt der Punkt  $O_H$  ist.

Jede  $p$ -Gerade definiert, nach angeführten Theoremen in [3] und [1], ein Büschel der  $n$ -Geraden, dessen Geraden zur Spurgeraden  $o=xi$  überparallel sind. Es ist wichtig in der Ebene  $\Pi_1$  jenes Geradenbüschel der  $n$ -Geraden hervorzuheben, dessen Trägergerade, die durch den Punkt  $O'$  verlaufende  $p$ -Gerade, sogenannte  $g_1$ -Gerade, ist. In diesem Fall ist die  $g_1$ -Gerade auch die gemeinsame Senkrechte des Büschels der  $n$ -Geraden, was nach den bewiesenen Tatsachen in [1] gilt. Der Scheitelpunkt dieses Büschels ist der uneigentliche (ideelle) Punkt  $O_3$  (Abb.3). In diesem Fall bilden die festgelegten Ebenen durch den Augpunkt  $O$  und jede von den  $n$ -Geraden ein Ebenenbüschel, dessen Trägergerade die Gerade  $OO_3$  ist. Die zweiten Spurgeraden dieser Ebenen, in denen die perspektivischen Bilder der  $n$ -Geraden liegen, sind zueinander überparallel. Sie bestimmen ein Geradenbüschel mit dem Scheitel  $O_3$  und mit der gemeinsamen Senkrechten  $g_c$ . Also, um das perspektivische Bild einer von den  $n$ -Geraden bestimmen zu können, genügt es, das Bild nur eines Punktes dieser

$n$ -Geraden zu konstruieren. Das kann das Bild einer von ihren Grenzpunkten sein, der mit der  $h$ -Horizont inzident ist, oder der Schnittpunkt  $N$  der Geraden  $n$  und  $g_l$ . Der Punkt  $N_c$  liegt dann auf der Gerade  $g_c$ , weil der Projektionsstrahl  $NO$  in der Ebene  $\Gamma$  liegt und die Bildebene  $\Pi_2$  auf der  $g_c$ -Geraden durchstößt. Bei dieser Abbildung werden einige  $n$ -Geraden aus dem Geradenbüschel  $O_3$  in den uneigentlichen  $n_c$ -Geraden abgebildet.

### Theorem 2

Das perspektivische Bild eines Büschels von überparallelen  $n$ -Geraden, dessen Trägergerade eine  $p$ -Geraden in  $\Pi_1$  ist, ist ein hyperbolisches Geradenbüschel von  $n_c$ -Geraden mit dem Scheitel, der ein uneigentlicher Punkt der Spurgerade  $o \equiv x$  ist.

Es ist hervorzuheben, daß jede  $p$ -Gerade parallel zu einer von den  $n$ -Geraden des  $g_l$ -Geradenbüschels ist. Daraus folgt, daß sich ihre perspektivischen Bilder in einem Punkt des  $h$ -Horizontes schneiden. Dieser Schnittpunkt ist das perspektivische Bild ihres gemeinsamen Grenzpunktes.

Wenn man zwei beliebige zueinander parallele Geraden der Ebene  $\Pi_1$  betrachtet, schneiden einander ihre perspektivischen Bilder immer in einem Punkt des  $h$ -Horizontes. Jeder Punkt des Randbildes der Ebene  $\Pi_1$  definiert nämlich ein Geradenbüschel von parallelen Geraden. Die Ebenen, die durch den Augpunkt  $O$  und durch jede von diesen Geraden festgelegt werden, bilden ein parabolisches Ebenenbüschel, dessen Trägergerade eine Erzeugende des Parallelkegels  $\Psi$  ist. Diese Erzeugende schneidet die Bildebene  $\Pi_2$  in einem Punkt des  $h$ -Horizontes. Das bedeutet, daß dieser Punkt der Scheitelpunkt des Geradenbüschels ist, und das ebenjeniges, das das perspektivische Bild des betrachteten parabolischen Geradenbüschels ist. In der Ebene  $\Pi_1$  gibt es zwei parabolische Geradenbüschel, deren Geraden zur Spurgerade  $o \equiv x$  parallel sind. Diese zwei parabolischen Geradenbüschel werden wieder auf zwei parabolische Geradenbüschel der Bildebene  $\Pi_2$  abgebildet, wobei deren Scheitelpunkte dieselben Grenzpunkte der Spurgeraden  $o \equiv x$  sind.

### Theorem 3

Die perspektivischen Bilder der parabolischen Geradenbüschel der Ebene  $\Pi_1$  sind die Geradenbüschel der Bildebene  $\Pi_2$ , deren Scheitelpunkte die Punkte des  $h$ -Horizontes sind. Abhängig davon, ob der Punkt des  $h$ -Horizontes ein eigentlicher, unendlich ferner oder uneigentlicher Punkt ist, ist das Geradenbüschel elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch.

Um eine Gerade der Ebene  $\Pi_1$  abzubilden, verwenden wir zwei spezielle Punkte: den *Spurpunkt* d.h. der Durchstoßpunkt der Geraden mit der Bildebene  $\Pi_2$ , der mit seinem perspektivischen Bild zusammenfällt, und einen von den Grenzpunkten der Geraden (Abb.4).

Jede Gerade der  $\Pi_1$ -Ebene hat den Spurpunkt in der Schnittgeraden  $o \equiv x$ , und das perspektivische Bild ihren

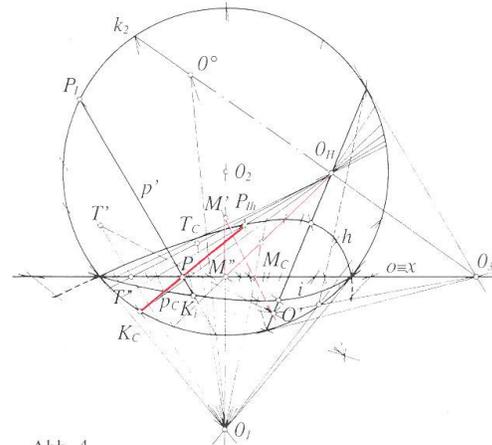


Abb. 4

Grenzpunkten, die die *Fluchtpunkte* der Geraden genannt werden, gehört dem  $h$ -Horizont an. Mit diesen zwei Punkten ist eindeutig das perspektivische Bild der Geraden bestimmt. Es gilt auch die Umkehrung. Wenn in der Bildebene eine Gerade angegeben ist, auf der die zwei Punkte: als Spurpunkt und Fluchtpunkt (Punkt am  $h$ -Horizont) bezeichnet sind, entspricht dieser Geraden eindeutig eine Gerade in der Ebene  $\Pi_1$ . Diese Gerade verläuft durch den Spurpunkt und jenen Grenzpunkt der Grundebene  $\Pi_1$ , der mittels der Erzeugende des Parallelkegels  $\Psi$  bestimmt wird. Dabei ist der Durchstoßpunkt dieser Erzeugende mit der Bildebene der Fluchtpunkt d.h. der Punkt, der mit dem  $h$ -Horizont inzident ist. Auf Grund dieser Überlegungen folgt:

### Theorem 4

Jeder Geraden der Grundebene  $\Pi_1$  entspricht in der Bildebene ein geordnetes Punktepaar  $(P, P_{fl})$  - der Spurpunkt und der Fluchtpunkt. Der Spurpunkt kann dabei eigentlicher, unendlich ferner Punkt oder uneigentlicher Punkt sein. Umgekehrt, jedem geordneten Punktepaar  $(R, R_{fl})$  in der Bildebene kann man genau nur eine Gerade der Ebene  $\Pi_1$  zuordnen, wenn der Punkt  $R$  auf der Spurgerade  $o \equiv x$  liegt, und der Punkt  $R_{fl}$  zum  $h$ -Horizont gehört, oder wenn die beiden Punkte  $R$  und  $R_{fl}$  zum  $h$ -Horizont gehören.

### PUNKTE IN DER GRUNDEBENE $\Pi_1$

Die Punkte der Grundebene  $\Pi_1$  werden als Schnittpunkte zweier Geraden der Grundebene erfaßt. Speziell verlaufen durch jeden Punkt eine  $p$ - und eine  $n$ -Gerade. Die Bilder dieser Geraden können entweder wie im vorigen Abschnitt durch die Bilder zweier spezieller Punkte (Spurpunkt, Fluchtpunkt) oder durch das zum euklidischen analoge Durchschnitverfahren [7], [3] bestimmt werden. Das perspektivische Bild  $T_c$  des Punktes  $T$  kann man noch als der zweite Durchstoßpunkt des Projektionsstrahles  $TO$  mit der Bildebene  $\Pi_2$  gemäß [3] konstruieren (Abb.4).

**FIGUREN IN DER GRUNDEBENE  $\Pi_1$** 

Auf Grund der oben erwähnten Tatsachen ist es einfach das perspektivische Bild einer beliebigen Figur der  $\Pi_1$ -Ebene zu bestimmen.

Das Zentrum der  $H$ -perspektiven Kollineation in der Bildebene ist der Punkt  $Z$ , in dem der durch den Augpunkt  $O$  senkrecht zur Symmetrieebene des Winkels  $(\Pi_1, \Pi_2)$  aufgestellte Strahl  $z$  die Bildebene  $\Pi_2$  durch-

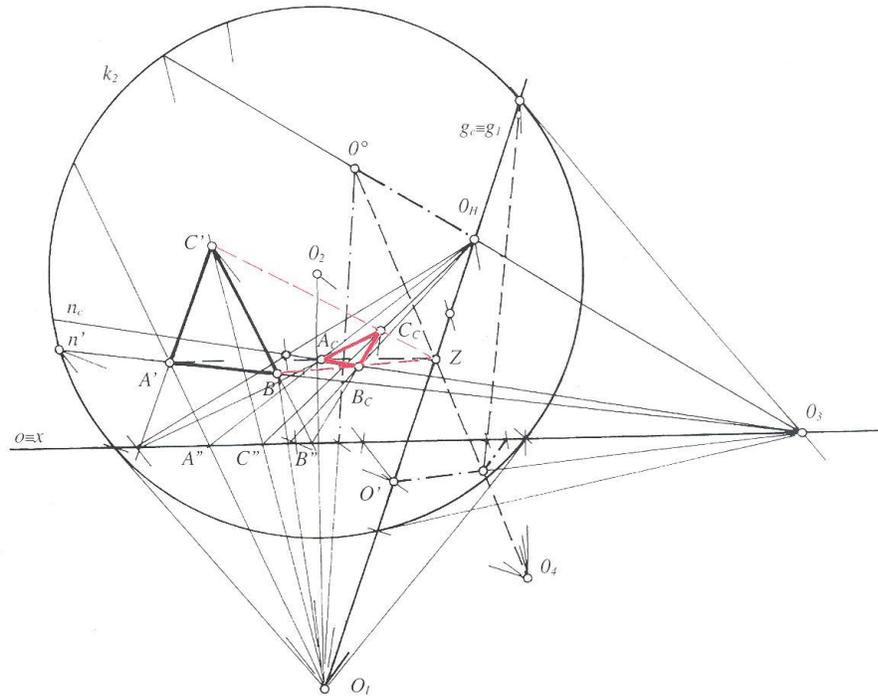


Abb. 5

In Abb.5 wird das Dreieck  $ABC$  dargestellt. Die Seite  $AB$  dieses Dreieckes ist zur Spurgerade  $o \equiv x$  überparallel, das heißt, auf der  $n$ -Geraden liegende Seite. Der Grundriß des Dreieckes ist in "wahrer Gestalt" dargestellt und sein Aufriß ist die Strecke, die auf der  $o \equiv x$  Achse liegt. In diesem Fall wurden die  $p$ - und  $n$ - Geraden und auch ihre Eigenschaften benutzt. Durch jeden Punkt des Dreieckes  $A'B'C'$  ist eine  $p$ -Gerade gelegt, während die Seite  $AB$  schon auf der  $n$ -Geraden liegt. Auf Grund der Theoremen 1 und 2 ist das perspektivische Bild  $A_c B_c$  der Seite  $AB$  konstruiert. Der Punkt  $C_c$  ist durch das Durchschnittsverfahren wie in Abb.4 bestimmt. Weiter verwenden wir, daß einander die Geraden  $A'C'$  und  $A_c C_c$  im Punkt der Spurgerade  $o \equiv x$  schneiden, was auch für andere zugeordnete Geradenpaare gilt. Diese Tatsache ist evident, da durch den Spurpunkt der Geraden auch ihr Grundriß und das perspektivische Bild verlaufen (Theorem 4).

Da sich zugeordnete Geraden in den Punkten längs einer Achse schneiden, existiert eine  $H$ -perspektiven Kollineation in der Bildebene. Nach dem Grundtheorem der  $H$ -perspektiven Kollineation [4], bedingt die Existenz der Achse auch die Existenz des  $H$ -Zentrums.

stößt. Dieser Strahl  $z$  ist die Trägergerade eines Ebenenbüschels, der die Bildebene in dem Geradenbüschel mit dem Scheitel  $Z$  schneidet. Da der Projektionsstrahl  $z$  auch in der Ebene  $\Gamma$  liegt, schneidet er die Gerade  $g_c$  im Punkt  $Z$ , also  $Z \in g_c$ . Die Schnittgerade jeder Ebene des Ebenenbüschels mit der Bildebene enthält die umgeklappte Lage des Punktes der  $\Pi_1$ -Ebene und auch sein perspektivisches Bild, das heißt zum Beispiel das Paar  $(A', A_c)$ , und verläuft in jedem Fall durch den Punkt  $Z$ . Das bedeutet, daß der Punkt  $Z$  das Zentrum der  $H$ -perspektiven Kollineation in der Bildebene ist. Daraus geht hervor, daß die Figuren der  $\Pi_1$ -Ebene nach der Rotation in die Bildebene und ihre perspektivischen Bilder  $H$ -perspektiv kollinear zugeordnet sind. Die Achse der  $H$ -perspektiven Kollineation ist der Spurgerade  $o \equiv x$  und das  $H$ -Zentrum ist der Punkt  $Z$ .

**GERADEN SENKRECHT ZUR GRUNDEBENE  $\Pi_1$   
 $H$ -HÖHEN DER OBJEKTE**

Die Geraden, die zur Grundebene  $\Pi_1$  senkrecht sind, sind gleichzeitig zur Bildebene  $\Pi_2$  überparallel. Jede Ebene, die durch die Gerade  $t \perp \Pi_1$  und den Augpunkt  $O$  festgelegt ist, ist senkrecht zur Ebene  $\Pi_1$ . Sie schneidet die Bildebene  $\Pi_2$  in der Geraden  $t_c \perp o \equiv x$  (laut [3]). Daraus folgt, daß die perspektivischen Bilder von zur

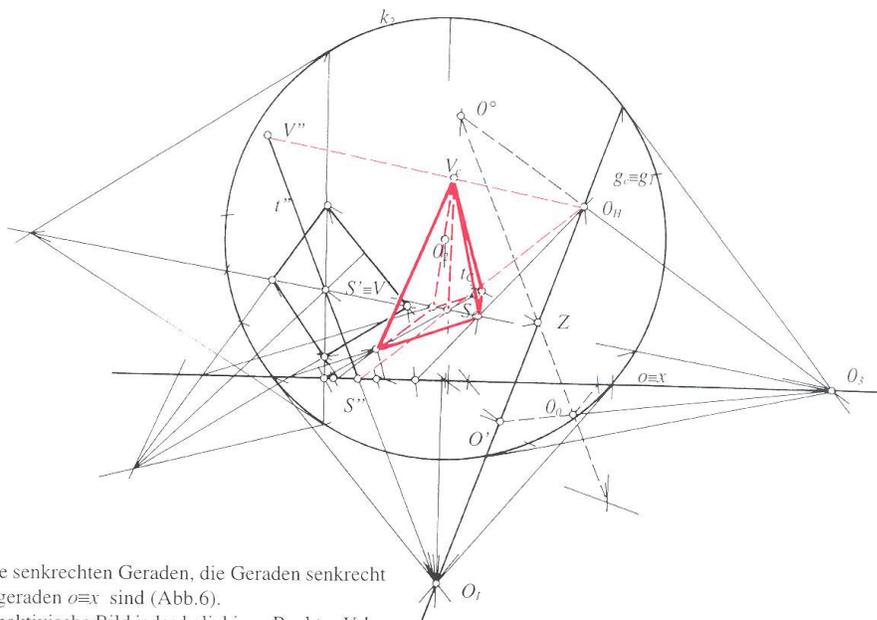


Abb. 6

$\Pi_1$ -Ebene senkrechten Geraden, die Geraden senkrecht zur Spurgeraden  $o \equiv x$  sind (Abb.6).

Das perspektivische Bild jedes beliebigen Punktes  $V$  der Geraden  $t$  ist als der zweite Durchstoßpunkt des Strahles  $VO$  mit der Ebene  $\Pi_2$  bestimmt. Es wird der Grund- und Aufriß des Strahles  $VO$  benutzt und der zweite Durchstoßpunkt nach der beschriebenen Weise in [3] konstruiert. Wegen der Inzidenzrelation von Punkt und Geraden ist der Punkt  $V_c$  mit der Geraden  $t_c$  inzident (Abb.6).

In der Abb.6 ist das perspektivische Bild der pseudoquadratischen gerechten Pyramide, deren Basis in der  $\Pi_1$ -Ebene liegt, nach dem folgenden Verfahren aufgebaut: Zuerst ist der Grundriß des Pseudoquadrates konstruiert. Seine Diagonalen sind zueinander senkrecht und gleich lang. (Die gegenüberliegenden Seiten sind überparallel.) Der Aufriß des Pseudoquadrates ist die auf der Spurgeraden  $o \equiv x$  liegende Strecke. Sein perspektivisches Bild wurde nach dem obenerwähnten Verfahren konstruiert, wobei auch die  $H$ -perspektive Kollineation in der Bildebene benutzt wurde.

Die Achse  $t$  der Pyramide ist die Senkrechte zur Basisebene  $\Pi_1$  durch den Schnittpunkt der Diagonalen des Pseudoquadrates. Das perspektivische Bild  $t_c$  der Achse  $t$  ist zu  $o \equiv x$  senkrecht und nach vorhererwähnten Weise konstruiert.

Das perspektivische Bild  $V_c \in t_c$  der Pyramidenspitze  $V$  ist mittels Durchschnitverfahren bestimmt.

Auf gleiche Weise kann das perspektivische Bild jedes Objekts konstruiert werden.

#### Dr. sc. Ivanka Babić

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,  
10 000 Zagreb, Kačićeva 26,  
tel/fax: +385(01) 66 00 642  
e-mail: ibabic@juraj.gradnz. grad.hr

#### LITERATUR

- [1] BABIĆ, I.: Projektije pravaca i točaka  $H$ -ravnine u  $M$ -modelu, Zbornik radova XVII jugoslavenskog savjetovanja za nacrtnu geometriju, Zagreb, (1990), 76-83.
- [2] BABIĆ, I. und KUĆINIĆ, B.:  $M$ -Modell des hyperbolischen  $H^3$ -Raums in der Möbius-Ebene, Rad HAZU (467) 11 (1994), 67-75.
- [3] BABIĆ, I.: Darstellende Geometrie im hyperbolischen  $H^3$ -Raum I. Teil, Rad HAZU (470) 12 (1995), 167-186.
- [4] BABIĆ, I.: Darstellende Geometrie im hyperbolischen  $H^3$ -Raum II. Teil, Rad HAZU (472) 13 (1997), 13-26.
- [5] KLEIN, F.: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1928.
- [6] KRUPPA, E.: Darstellende Geometrie im projektiven Raum mit elliptischer oder hyperbolischer Maßbestimmung, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. math.-nat. Kl. Abt. IIa, 171 (1962), 75-92.
- [7] NIĆE, V.: *Perspektiva*, Školska knjiga, Zagreb, 1961.
- [8] ŠNAJDER, Z.: Spur- und Fluchtpunktmethode bei Zentralprojektion im hyperbolischen Raum, Matem. vesnik, 2 (17), Beograd, (1965), 127-136.
- [9] ŠNAJDER, Z.: Die Zentral- und Zentralgrundrissprojektionsmethode im dreidimensionalen hyperbolischen Raum-Lagenaufgaben, Matem. vesnik, 6 (21), Beograd, (1969), 355-364.

#### Dr. sc. Branko Kućinić

Građevinski fakultet Sveučilišta u Zagrebu,  
10 000 Zagreb, Kačićeva 26,  
tel/fax: +385(01) 66 00 642  
e-mail: bkucinic@juraj.gradnz. grad.hr